CABIRIA ANDREIAN-CAZACU • ARISTIDE DELEANU • MARTIN JURCHESCU

TOPOLOGIE

CATEGORII

SUPRAFEȚE RIEMANNIENE

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

■ TOPOLOGIE
■ CATEGORII
■ SUPRAFEȚE RIEMANNIENE

Coperta și supracoperta de EUGEN STOIAN

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, ARISTIDE DELEANU
și MARTIN JURCHESCU

TOPOLOGIE

CATEGORII

SUPRAFEȚE

RIEMANNIENE

Profesorului nostru
S. STOILOW

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
București 1966

PREFAȚĂ

Materialul din volumul de față este inspirat din expunerile făcute de cei trei autori în cadrul „Seminarului S. Stoilow", ținut la Institutul de matematică al Academiei Republicii Socialiste România în anii 1962—1963, 1963—1964, 1964—1965.

Cartea este împărțită în trei părți.

Prima parte este consacrată expunerii unei teorii a dimensiunii pentru categoria spațiilor topologice metrice separabile. Expunerea urmează îndeaproape pe cea dată în cartea Dimension Theory *de W. Hurewicz și H. Wallman, cu excepția paragrafului 4, unde se dă o demonstrație diferită pentru teorema de punct fix a lui Brouwer.*

Cea de-a doua parte este consacrată expunerii teoriei categoriilor și este subdivizată în trei capitole.

În absența unei teorii a mulțimilor cu o infinitate de tipuri, adoptăm în expunere punctul de vedere al universurilor care are ca punct de plecare o teorie a mulțimilor cu un singur tip (al mulțimilor), dar introduce în acesta o ierarhie de subtipuri (universurile).

Capitolul I conține faptele de bază ale teoriei categoriilor. Functorii adjuncți introduși de D. M. Kan joacă un rol important în întreaga expunere. În acest capitol aceștia sînt utilizați mai ales în legătură cu studiul limitelor proiective și inductive pentru functori. În scopul unei clasificări a categoriilor sînt prezentate categoriile aditive și categoriile abeliene după Buchsbaum și Gronthendieck și categoriile cantoriene după lucrarea [7].

Acestea din urmă reprezintă echivalentul neaditiv al categoriilor abeliene și au ca exemplu tipic categoria **𝔘-Ens**, *după cum categoriile abeliene au ca exemplu tipic categoria* **𝔘-Ab**.

Pentru aceste clase de categorii sînt date două teoreme generale de stabilitate. Semnalăm de asemenea introducerea noțiunii de morfism strict după lucrarea [7] *care permite definiția bună pentru functori Im și Coim.*

Capitolul II este consacrat expunerii teoriei generale a fasciculelor. Deși urmează în linii mari expunerea clasică a lui R. Godement, expunerea de față se deosebește de cea a lui Godement prin accentuarea rolului ei de model pentru teoria generală a categoriilor și functorilor. Astfel, de exemplu, faptul că prefasciculele și fasciculele de grupuri abeliene pe un spațiu topologic X formează categorii abeliene este dedus din cele două teoreme generale

de stabilitate și din faptul că avem un functor de completare R^0 de la categoria prefasciculelor în categoria fasciculelor. Mai mult, avem o situație similară pentru prefasciculele și fasciculele de mulțimi pe X, evident cu înlocuirea cuvîntului „abelian" prin cuvîntul „cantorian".

Capitolul III se ocupă cu ∂-functori. Functorii sateliți care se definesc cu ajutorul unei proprietăți universale joacă un rol central în acest capitol, și la acest punct expunerea urmează cartea Homological algebra *a lui H. Cartan și S. Eilenberg. Teoria functorilor derivați este inițial subordonată teoriei sateliților, dar se demonstrează apoi teorema lui de Rham abstractă care dă un procedeu comod de calcul al functorilor derivați cu ajutorul rezoluțiilor aciclice și rezoluțiilor injective. Teoria generală a functorilor derivați este aplicată la definiția și calculul grupurilor de coomologie ale unui spațiu topologic cu coeficienți într-un fascicul.*

Partea a treia *din acest volum este consacrată teoriei lui Teichmüller.*

În problema clasică a modulelor suprafețelor riemanniene pusă de Riemann, memoriile lui Teichmüller au marcat o nouă etapă de dezvoltare. Ele au determinat numeroase cercetări importante datorită lui Ahlfors, Bers, Rauch, Kodaira și Spencer, Weil, Grauert, Grothendieck și alții. Expunerea de față stabilește rezultatul de bază : spațiul Teichmüller al suprafețelor riemanniene, compacte, de gen $g = 1$, respectiv > 1, canonice, este omeomorf cu spațiul euclidian de dimensiune 2 respectiv de dimensiunea $6g-6$. Diversitatea metodelor matematice, specifice operei lui Teichmüller, a impus prezentarea multor teorii auxiliare. Astfel primele trei capitole urmăresc în esență caracterizarea claselor de omotopie ale omeomorfismelor unei suprafețe riemanniene compacte pe o suprafață conform echivalentă.

Un alt instrument important al teoriei, reprezentările cvasiconforme și legătura lor cu diferențialele pătratice, formează capitolul IV. Rezultatele principale ale teoriei sînt grupate în capitolul V : folosind după Bers un sistem de module pentru o suprafață riemanniană compactă canonică, se demonstrează teoremele de existență și unicitate a unei reprezentări cvasiconforme extremale, reprezentarea Teichmüller, în fiecare clasă de omeomorfisme omotope, precum și teorema despre spațiul Teichmüller.

AUTORII

CUPRINS

PARTEA ÎNTÎI

TEORIA DIMENSIUNII

Pag.

§ 1. Proprietăți generale 13
§ 2. Teorema sumei 17
§ 3. Aplicații în sfere 25
§ 4. Spații euclidiene 38
§ 5. Teorema de separare a lui Jordan 54
§ 6. Dimensiunea în sensul lui Lebesgue 58
Anexe 70

PARTEA A DOUA

TEORIA CATEGORIILOR

CAPITOLUL I. **Categorii și functori** 75

§ 1. Univers 75
§ 2. Categorii 77
§ 3. Functori 82
§ 4. Morfisme stricte 87
§ 5. Functori reprezentabili 91
§ 6. Functori adjuncți 96
§ 7. Limite proiective și inductive 102
§ 8. Proprietăți de comutativitate ale limitelor proiective și inductive 110
§ 9. Teoreme de existență pentru limite proiective și inductive 115
§ 10. Exactitate 123
§ 11. Categorii aditive 132
§ 12. Categorii abeliene 139
§ 13. Categorii cantoriene și functori de completare . . 145

Pag.

CAPITOLUL II. **Teoria fasciculelor** 153

§ 1. Prefascicule 153
§ 2. Fascicule 155
§ 3. Fibre 158
§ 4. Imagini directe 162
§ 5. Ψ — morfisme 165
§ 6. Imagini inverse 168
§ 7. Punctul R° 174
§ 8. Module pe un spaţiu inelat 179
§ 9. Fascicule induse 183

CAPITOLUL III. **Coomologie** 189

§ 1. Obiecte injective şi proiective 189
§ 2. Module libere şi module proiective 193
§ 3. Module injective 196
§ 4. δ-functori 202
§ 5. Criteriu de universalitate 204
§ 6. Teoremă de existenţă pentru sateliţi 206
§ 7. δ-functori exacţi 213
§ 8. Functorul R° 217
§ 9. Functori derivaţi 223
§ 10. Calculul functorilor derivaţi 225
§ 11. Coomologia unui spaţiu topologic 229
§ 12. Fascicule flasce 231
§ 13. Fascicule moi pe un spaţiu paracompact 235

PARTEA A TREIA

SUPRAFEŢE RIEMANNIENE

Introducere 243

CAPITOLUL I. **Elemente din teoria omotopiei** 247

§ 1. Grupul fundamental 247
§ 2. Acoperiri 252
§ 3. Grupul transformărilor de acoperire 261
§ 4. Acoperirea universală 263
§ 5. Aplicaţii omotope 265

CAPITOLUL II. **Suprafeţe riemanniene** 277

§ 1. Definiţii 277
§ 2. Acoperiri 280
§ 3. Grupuri Fuchs 284
§ 4. Reprezentarea unei suprafeţe riemanniene închise cu ajutorul unui poligon fundamental 300

Pag.

§ 5. Grupul fundamental şi grupurile de omologie ale suprafeţelor riemanniene compacte 304

CAPITOLUL III. **Clase de aplicaţii omotope ale suprafeţelor riemanniene** 313

§ 1. Caracterizarea claselor de aplicaţii continue omotope 313
§ 2. Gradul unei aplicaţii continue 316
§ 3. Teorema lui Brouwer 320
§ 4. Relaţia lui Kneser între gen şi gradul aplicaţiei . 326
§ 5. Caracterizarea claselor de omeomorfisme omotope . 331
§ 6. Suprafaţă riemanniană canonică 333

CAPITOLUL IV. **Reprezentări cvasiconforme** 338

§ 1. Propoziţii auxiliare 338
§ 2. Reprezentări cvasiconforme între suprafeţe riemanniene 342
§ 3. Teorema de existenţă a reprezentărilor cvasiconforme pentru suprafeţe riemanniene canonice 345
§ 4. Reprezentări Teichmüller 348

CAPITOLUL V. **Teoreme fundamentale** 356

§ 1. Mulţimi normate de translaţii neeuclidiene 356
§ 2. Metrica indusă de o diferenţială pătratică 362
§ 3. Teorema de unicitate 368
§ 4. Teorema de existenţă 374
§ 5. Spaţiul Teichmüler 381

Bibliografie 391

PARTEA ÎNTII

Teoria dimensiunii

de

Aristide Deleanu

Teoria dimensiunii

Vom expune o teorie a dimensiunii pentru categoria $\mathcal{C}$ ale cărui obiecte sînt spațiile topologice metrice separabile și ale cărei morfisme sînt aplicațiile continue între asemenea spații.

Astfel, notația: „$X \in \mathcal{C}$" va reprezenta afirmația „X este un spațiu topologic metric separabil".

§ 1. Proprietăți generale

DEFINIȚIA 1.1. Mulțimea vidă și numai mulțimea vidă are *dimensiunea* -1.

Un spațiu $X \in \mathcal{C}$ are dimensiunea $\leqslant n (n \geqslant 0)$ în punctul p, $\dim_p X \leqslant n$, dacă p posedă vecinătăți arbitrar de mici ale căror frontiere au dimensiunea $\leqslant n - 1$.

X are *dimensiunea* $\leqslant n$, $\dim X \leqslant n$, dacă X are dimensiunea $\leqslant n$ în fiecare din punctele sale.

X are *dimensiunea* n *în punctul* p dacă este adevărat că X are dimensiunea $\leqslant n$ în p și este fals că X are dimensiunea $\leqslant n - 1$ în p.

X are *dimensiunea* n dacă $\dim X \leqslant n$ este adevărată și $\dim X \leqslant n - 1$ este falsă.

X are *dimensiunea* ∞ dacă $\dim X \leqslant n$ este falsă oricare ar fi n.

Din definiție rezultă că dacă X și Y sînt omeomorfe, atunci $\dim X = \dim Y$.

Observația 1.1. Afirmația $\dim X \leqslant n$ este echivalentă cu existența unei baze a lui X formată din mulțimi deschise ale căror frontiere au dimensiunea $\leqslant n - 1$.

TEOREMA 1.1. *Orice subspațiu nevid X' al unui spațiu X de dimensiune 0 are dimensiunea 0.*

Demonstrație. Fie $p \in X'$ și U' o vecinătate arbitrară a lui p în X'. Atunci există o vecinătate U a lui p în X astfel încît $U' = U \cap X$.

Întrucît $\dim X = 0$, există o mulțime deschisă V a lui X astfel încît

$$p \in V \subset U \text{ și } \mathcal{F}r\, V = \varnothing.$$

Aceasta implică că V este de asemenea închisă.

Dacă punem $V' = V \cap X'$, V' este simultan închisă şi deschisă în X' deci are frontiera vidă în raport cu X' şi, în acelaşi timp,

$$p \in V' \subset U'.$$

Rezultă că dim $X' = 0$.

DEFINIŢIA 1.2. Dacă A_1, A_2 şi B sînt submulţimi ale unui spaţiu X, disjuncte două cîte două, se spune că A_1 şi A_2 sînt *separate de B în X* dacă există două submulţimi A_1' şi A_2' astfel încît

$$X - B = A_1' \cup A_2', \; A_1' \cap A_2' = \varnothing,$$

$$A_1 \subset A_1', \; A_2 \subset A_2'$$

şi A_1' şi A_2' sînt deschise în $X - B$.

Dacă A_1 şi A_2 sînt separate de mulţimea vidă, se spune că A_1 şi A_2 sînt *separate în X*.

PROPOZIŢIA 1.1. *Un spaţiu nevid $X \in \mathcal{C}$ are dimensiunea 0 dacă şi numai dacă orice punct p şi orice submulţime închisă C care nu conţine pe p pot fi separate.*

Demonstraţie. Să presupunem că dim $X = 0$. Atunci există o mulţime simultan închisă şi deschisă V astfel încît

$$p \in V \subset X - C.$$

Este suficient să punem $A_1 = V$ şi $A_2 = X - V$ pentru a ne convinge că p şi C sînt separate. Reciproca se demonstrează în mod similar.

COROLARUL 1.1. *Un spaţiu conex X de dimensiune 0 este format dintr-un singur punct.*

Demonstraţie. Să presupunem că X conţine două puncte distincte p şi q. Conform propoziţiei 1.1, p şi q pot fi separate, deci X ar fi neconex.

LEMA 1.1. *Fie X un spaţiu compact, C o submulţime închisă a lui X şi p un punct al lui X. Dacă p şi fiecare punct al lui C pot fi separate, atunci p şi C pot fi separate.*

Demonstraţie. Pentru orice $q \in C$, există două mulţimi disjuncte simultan închise şi deschise U_q şi V_q astfel încît $p \in U_q$ şi $q \in V_q$. Există însă un număr finit de puncte $q_1, \ldots, q_k \in C$ astfel încît $C \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_{q_i}$. Fie

$$U = \bigcap_{i=1}^{k} U_{q_i} \text{ şi } V = \bigcup_{i=1}^{k} V_{q_i}.$$

Atunci $p \in U$, $C \subset V$ şi U şi V sînt simultan închise şi deschise, deci p şi C sînt separate.

LEMA 1.2. *Fie X un spațiu compact, p un punct al lui X și $M(p)$ mulțimea tuturor punctelor care nu pot fi separate de p. Atunci $M(p)$ este conexă.*

Demonstrație. Arătăm mai întîi că $M(p)$ este închisă. Un punct x aparține lui $X - M(p)$ dacă și numai dacă există două mulțimi deschise U și V astfel încît

$$X = U \cup V,\ U \cap V = \varnothing,\ x \in U,\ p \in V.$$

De aici rezultă că $U \subset X - M(p)$, deci $X - M(p)$ este deschisă.

Avem $p \in M(p)$. Să presupunem că $M(p)$ ar fi neconex. Atunci ar exista două mulțimi C și K închise în $M(p)$, deci și în X, astfel încît

$$M(p) = C \cup K,\ C \cap K = \varnothing,\ C \neq \varnothing,\ K \neq \varnothing.$$

Să presupunem că $p \in C$. Întrucît X este normal, exist o submulțime deschisă U a lui X astfel încît

$$C \subset U \text{ și } \overline{U} \cap K = \varnothing.$$

Întrucît $\mathcal{F}r\ U = \overline{U} - U$, avem

$$\mathcal{F}r\ U \cap M(p) = \mathcal{F}r\ U \cap (C \cup K) = \varnothing.$$

Aceasta înseamnă că orice punct al lui $\mathcal{F}r\ U$ este separat de p. $\mathcal{F}r\ U$ fiind închisă, putem aplica lema 1.1 pentru a obține o submulțime simultan închisă și deschisă V, astfel încît $\mathcal{F}r\ U \subset V$, $p \notin V$. Se vede ușor că avem

$$p \in U - V = U - \overline{V} = \overline{U} - V,$$

de unde rezultă că $U - V$ este simultan închisă și deschisă. Întrucît $(U - V) \cap K = \varnothing$, urmează că p este separat de fiecare punct al lui K, care este conținut în $M(p)$, ceea ce contrazice definiția lui $M(p)$.

TEOREMA 1.2. *Un spațiu $X \in \mathcal{C}$ local-compact are dimensiunea 0 dacă și numai dacă este total neconex.*

Demonstrație. Să presupunem că dim $X = 0$. Fie C o submulțime conexă a lui X. În baza teoremei 1.1, dim $C = 0$, deci, conform corolarului 1.1, C este formată dintr-un singur punct. Rezultă că X e total neconex.

Reciproc, să presupunem că X este total neconex. Fie $p \in X$ și fie U o vecinătate deschisă a lui p cu proprietatea că $\overline{U}$ este compactă. Conform lemei 1.2, mulțimea $M(p)$ a punctelor lui $\overline{U}$ care nu pot fi separate de p în $\overline{U}$ este conexă, deci este formată numai din punctul p, căci $\overline{U}$ este total neconexă. Rezultă că orice două puncte distincte ale lui $\overline{U}$ pot fi separate în $\overline{U}$, deci, în baza lemei 1.1, orice punct al lui $\overline{U}$ poate fi separat în $\overline{U}$ de orice submulțime închisă care nu-l conține. În virtutea propoziției 1.1 rezultă dim $\overline{U} = 0$, deci dim $\overline{U} = 0$, deci dim $X = 0$, adică, în definitiv, dim $X = 0$.

TEOREMA 1.3. *Un subspațiu $X' \in \mathcal{C}$ al unui spațiu $X \in \mathcal{C}$ de dimensiune $\leqslant n$ are dimensiune $\leqslant n$.*

Demonstrație. Teorema este evident adevărată pentru $n = -1$. Să presupunem că ea este adevărată pentru $n - 1$. Fie $p \in X'$ și U' o vecinătate a lui p în X'. Există atunci o vecinătate U a lui p în X astfel încît $U' = U \cap X'$. Întrucît $\dim X \leqslant n$, există o mulțime V deschisă în X astfel încît

$$p \in V \subset U, \quad \dim \mathcal{F}r\ V \leqslant n - 1.$$

Fie $V' = V \cap X'$. V' e deschisă în X' și $p \in V' \subset U'$. Avem

$$\mathcal{F}r_{X'}\ V' = (\bar{V}' - V') \cap X' \subset (\bar{V} - V) \cap X' = \mathcal{F}r\ V \cap X' \subset \mathcal{F}r\ V,$$

prin urmare, în baza ipotezei inducției, avem $\dim \mathcal{F}r_{X'}\ V' \leqslant n - 1$.

PROPOZIȚIA 1.2. *Fie $X' \in \mathcal{C}$ un subspațiu al unui spațiu $X \in \mathcal{C}$ și p un punct al lui X'. Atunci $\dim_p X' \leqslant n$ dacă și numai dacă p posedă un sistem fundamental de vecinătăți deschise $\mathcal{V}$ cu proprietatea că pentru orice $V \in \mathcal{V}$.*

$$\dim ((\bar{V} - V) \cap X') \leqslant n - 1.$$

Demonstrație. Să presupunem că există sistemul de mulțimi $\mathcal{V}$ din enunț. Fie U' o vecinătate arbitrară a lui p în X'. Există atunci o vecinătate U a lui p în X astfel încît $U' = U \cap X'$ și există $V \in \mathcal{V}$ astfel încît

$$p \in V \subset U \text{ și } \dim (X' \cap \mathcal{F}r\ V) \leqslant n - 1.$$

Fie $V' = V \cap X'$. Atunci V' e deschisă în X' și $p \in V' \subset U'$. Avem

$$\mathcal{F}r_{X'}\ V' \subset X' \cap \mathcal{F}r\ V,$$

deci $\dim \mathcal{F}r_{X'}\ V' \leqslant n - 1$, în virtutea teoremei 1.3. Rezultă că $\dim_p X' \leqslant n$.

Reciproc, să presupunem că $\dim_p X' \leqslant n$. Fie U o vecinătate arbitrară a lui p. Atunci $U' = U \cap X'$ este o vecinătate a lui p în X', deci există o vecinătate V' a lui p în X' astfel încît

$$p \in V' \subset U' \text{ și } \dim \mathcal{F}r_{X'}\ V' \leqslant n - 1.$$

Nici una din mulțimile disjuncte V' și $X' - \bar{V}'$ nu conține nici un punct aderent al celeilalte, prin urmare, în baza faptului că X este metrizabil, deci complet normal, există [1]) o mulțime W_1 deschisă în X astfel încît

$$V' \subset W_1 \text{ și } \bar{W}_1 \cap (X' - \bar{V}') = \varnothing.$$

[1]) A se vedea Anexa I.

Să punem $W = W_1 \cap U$. Avem

$$\mathcal{F}r\ W \cap (X' - \overline{V}') = \varnothing,\ \mathcal{F}r\ W \cap V' = \varnothing,$$

de unde deducem că

$$X' \cap \mathcal{F}r\ W \subset \mathcal{F}r_{X'}\ V'.$$

Aplicînd teorema 1.3, obţinem

$$\dim\ (X' \cap \mathcal{F}r\ W) \leqslant n - 1,$$

adică tocmai afirmaţia din enunţ.

§ 2. Teorema sumei

LEMA 2.1. *Fie X un spaţiu din $\mathcal{C}$ avînd dimensiunea 0. Dacă C şi K sînt două submulţimi închise disjuncte ale lui X, ele pot fi separate.*

Demonstraţie. Pentru fiecare punct $p \in X$ avem cel puţin una din relaţiile $p \notin C$, $p \notin K$. Conform propoziţiei 1.1, pentru fiecare $p \in X$ există o mulţime $U(p)$ simultan închisă şi deschisă şi astfel încît $p \in U(p)$ şi cel puţin una din relaţiile următoare să fie satisfăcută :

$$U(p) \cap C = \varnothing,\ U(p) \cap K = \varnothing.$$

Întrucît X are bază numărabilă, există o subfamilie numărabilă $(U_i)_{i=1, 2, \ldots}$ a familiei $(U(p))_{p \in X}$ astfel încît $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$.

Punem

$$V_1 = U_1$$

$$V_i = U_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k = U_i \cap (X - \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k), \qquad (i = 2,3, \ldots)$$

Se vede atunci că V_i sînt deschise,

$$V_i \cap V_j = \varnothing \text{ dacă } i \neq j \text{ şi } X = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i.$$

De asemenea, pentru orice i cel puţin una din următoarele relaţii are loc :

$$V_i \cap C = \varnothing,\ V_i \cap K = \varnothing.$$

Să punem :

$$C' = \bigcup_{V_i \cap K = \varnothing} V_i, \quad K' = \bigcup_{V_i \cap K \neq \varnothing} V_i$$

Atunci, C' şi K' sînt deschise şi în baza celor de mai sus putem scrie:

$$X = C' \cup K', \qquad C' \cap K' = \varnothing.$$

$$(C' \cap K) \cup (K' \cap C) = \varnothing.$$

Rezultă că

$$C \subset C' \text{ şi } K \subset K',$$

deci mulţimile C' şi K' realizează separarea căutată.

TEOREMA 2.1. (Teorema sumei pentru dimensiunea zero). *Fie* $X \in \mathcal{C}$ şi $(A_i)_{i=1, 2, \ldots}$ *o familie numărabilă de submulţimi închise ale lui* X *astfel încît* $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *şi* $\dim A_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. *Atunci* $\dim X = 0$.

Demonstraţie. Fie K şi L două submulţimi închise disjuncte ale lui X. Este suficient, avînd în vedere propoziţia 1.1, să arătăm că K şi L pot fi separate.

Întrucît $K \cap A_1$ şi $L \cap A_1$ sînt mulţimi închise disjuncte ale spaţiului A_1 de dimensiune 0, există, în baza lemei 2.1, două submulţimi B_1 şi C_1 ale lui A_1, închise în A_1, deci în X, astfel încît

$$K \cap A_1 \subset B_1, \qquad L \cap A_1 \subset C_1,$$

$$B_1 \cup C_1 = A_1, \; B_1 \cap C_1 = \varnothing.$$

Avem

$$(B \cup B_1) \cap (L \cup C_1) = \varnothing.$$

X fiind metrizabil, este şi normal, prin urmare există două submulţimi deschise ale lui X, G_1 şi H_1, astfel încît

$$K \cup B_1 \subset G_1, \; L \cup C_1 \subset H_1, \; \overline{G}_1 \cap \overline{H}_1 = \varnothing.$$

În consecinţă, avem

$$A_1 \subset G_1 \cup H_1,$$

$$K \subset G_1, \; L \subset H_1,$$

$$\overline{G}_1 \cap \overline{H}_1 = \varnothing.$$

Repetăm această construcţie, luînd în locul lui K şi L pe $\overline{G}_1$ şi $\overline{H}_1$ iar în locul lui A_1 pe A_2.

Obţinem mulţimi deschise G_2 şi H_2 astfel încît

$$A_2 \subset G_2 \cup H_2,$$

$$\overline{G}_1 \subset G_2, \; \overline{H}_1 \subset H_2,$$

$$\overline{G}_2 \cap \overline{H}_2 = \varnothing.$$

Prin inducție construim două șiruri (G_i) și (H_i) de mulțimi deschise ale lui X, astfel încît

$$A_i \subset G_i \cup H_i,$$

$$\overline{G}_{i-1} \subset G_i, \quad \overline{H}_{i-1} \subset H_i,$$

$$\overline{G}_i \cap \overline{H}_i = \varnothing.$$

Să notăm

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i, \quad H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i.$$

G și H sînt mulțimi deschise disjuncte. În plus,

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset G \cup H,$$

$$K \subset G, \quad L \subset H.$$

Rezultă că G și H realizează separarea căutată a lui K și L.

LEMA 2.2. *Dacă* $A \in \mathscr{C}$ și $B \in \mathscr{C}$ *sînt subspații ale unui spațiu* $X \in \mathscr{C}$, *avem*

$$\dim (A \cup B) \leqslant 1 + \dim A + \dim B.$$

Demonstrația se face prin inducție dublă asupra dimensiunilor lui A și B. Propoziția este evidentă pentru

$$\dim A = \dim B = -1.$$

Să presupunem că ea este adevărată pentru cazurile :

(1) $$\dim A \leqslant m, \ \dim B \leqslant n - 1$$

(2) $$\dim A \leqslant m - 1, \ \dim B \leqslant n,$$

și fie acum $\dim A = m$, $\dim B = n$. Fie $p \in A \cup B$, de exemplu $p \in A$, și fie U o vecinătate a lui p în X. În virtutea propoziției 1.2, există o mulțime deschisă V astfel încît

$$p \in V \subset U \text{ și } \dim ((\overline{V} - V) \cap A) \leqslant m - 1).$$

Avem de asemenea

$$\dim ((\overline{V} - V) \cap B) \leqslant n.$$

Din ipotezele (1) și (2) ale inducției rezultă

$$\dim ((\overline{V} - V) \cap (A \cup B)) \leqslant m + n.$$

Cum punctul p este arbitrar în $A \cup B$, urmează, în baza propoziției 1.2,

$$\dim (A \cup B) \leqslant m + n + 1,$$

ceea ce completează inducția.

TEOREMA 2.2. (Teorema sumei). *Fie $X \in \mathcal{C}$ și $(A_i)_{i=1,2,\ldots}$ o familie numărabilă de submulțimi închise ale lui X astfel încît*

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Atunci

$$\dim X = \sup_{i=1}^{\infty} \dim A_i.$$

Demonstrație. Ținînd seamă de teorema 1.3, este clar că teorema sumei este echivalentă cu afirmația

(Σ_n) Fie $X \in \mathcal{C}$ și $(A_i)_{i=1,2,\ldots}$ o familie numărabilă de submulțimi închise ale lui X astfel încît $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Dacă $\dim A_i \leqslant n$ $(i = 1, 2, \ldots)$, atunci $\dim X \leqslant n$.

Este de asemenea clar că (Σ_n) este echivalentă la rîndul ei cu afirmația că orice spațiu din $\mathcal{C}$ care este o reuniune numărabilă de mulțimi F_σ [1]), fiecare de dimensiune $\leqslant n$, are dimensiunea $\leqslant n$.

Vom demonstra afirmația (Σ_n).

Demonstrația se face prin inducție. (Σ_{-1}) este banală. (Σ_0) este echivalentă cu teorema 2.1. Să presupunem că (Σ_i) este adevărată pentru toți indicii $i \leqslant n - 1$.

Arătăm mai întîi că (Σ_{n-1}) implică afirmația:

(Δ_n) Orice spațiu $X \in \mathcal{C}$ avînd dimensiune $\leqslant n$ este reuniunea unui subspațiu de dimensiune $\leqslant n - 1$ și a unui subspațiu de dimensiune $\leqslant 0$.

Într-adevăr, să presupunem că $\dim X \leqslant n$. În virtutea observației 1.1, există o bază a lui X formată din mulțimi deschise ale căror frontiere au dimensiune $\leqslant n - 1$. Cum X are bază numărabilă, se vede ușor că există o bază numărabilă a lui X, $(U_i)_{i=1,2,\ldots}$ formată din mulțimi deschise astfel încît $\dim \mathcal{F}r\ U_i \leqslant n - 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Din (Σ_{n-1}) rezultă că

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}r\ U_i$$

[1]) Reamintim că se numește mulțime F_σ o reuniune numărabilă de mulțimi închise.

are dimensiune $\leqslant n-1$. Întrucît pentru orice i avem $\mathcal{F}r\, U_i \cap (X - B) = \varnothing$, putem aplica propoziția 1.2 pentru a deduce că

$$\dim (X - B) \leqslant 0.$$

Aserțiunea (Δ_n) este demonstrată.

Trecem acum la demonstrarea lui (Σ_n) presupunînd adevărate propozițiile (Σ_i) $(i \leqslant n-1)$. Să punem

$$K_1 = A_1$$

$$K_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j = A_i \cap \left(X - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right), \quad i = 2, 3, \ldots$$

Avem

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \tag{3}$$

$$K_i \cap K_j = \varnothing \text{ dacă } i \neq j. \tag{4}$$

Întrucît X are bază numărabilă, se vede imediat că mulțimea $X - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ este o mulțime F_σ, deci și K_i este o mulțime F_σ în X.

Cum $K_i \subset A_i$, avem dim $K_i \leqslant n$, ceea ce ne permite ca, ținînd cont de (Δ_n), să scriem pe K_i sub forma

$$K_i = M_i \cup N_i,$$

$$\dim M_i \leqslant n-1, \quad \dim N_i \leqslant 0.$$

Să notăm $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = M$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i = N$. Din (1) deducem

$$X = M \cup N.$$

Din $M_i \subset K_i$ și din relația (4) deducem

$$M_i = M_i \cap K_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) \cap K_i = M \cap K_i,$$

deci M_i, ca intersecție a lui M cu K_i, care e o mulțime F_σ, este o mulțime F_σ în M. Putem atunci aplica pe (Σ_{n-1}) pentru a conchide că dim $M \leqslant n-1$.

Exact la fel se arată că fiecare N_i este o mulțime F_σ în N și deci se poate aplica (Σ_0) pentru a conchide dim $N \leqslant 0$.

Avem așadar $X = M \cup N$ cu dim $M \leqslant n-1$ și dim $N \leqslant 0$. În baza lemei 2.2, avem dim $X \leqslant n$, ceea ce completează demonstrația propoziției (Σ_n).

Cu aceasta, teorema sumei este complet demonstrată.

COROLARUL 2.1. *Fie* $X \in \mathcal{C}$, A *și* B *două submulțimi ale lui* X, B *fiind închisă și astfel încît* $\dim A \leqslant n$, $\dim B \leqslant n$. *Atunci* $\dim (A \cup B) \leqslant n$.

Demonstrație. Mulțimea $A \cup B - B$ este deschisă în $A \cup B$. Întrucît X are bază numărabilă, $A \cup B$ are și el bază numărabilă și atunci se vede ușor că $A \cup B - B$ este de forma

$$A \cup B - B = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

F_i fiind închise în $A \cup B$. Cum $F_i \subset A$, avem $\dim F_i \leqslant n$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Din relația

$$A \cup B = B \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

și din teorema 2.2 deducem

$$\dim (A \cup B) \leqslant n.$$

COROLARUL 2.2. *Dimensiunea unui spațiu nevid nu poate fi mărită prin adăugirea unui singur punct.*

Demonstrația rezultă imediat din corolarul 2.1.

TEOREMA 2.3. (Teorema de descompunere pentru dimensiunea n). *Un spațiu metrizabil separabil are dimensiunea* $\leqslant n$ *(*n *finit) dacă și numai dacă el este reuniunea a* $n + 1$ *subspații de dimensiune* $\leqslant 0$.

Demonstrația rezultă prin aplicarea repetată a propoziției (Δ_n) demonstrată în cursul demonstrației teoremei 2.2, și a lemei 2.2.

TEOREMA 2.4. (Teorema produsului). *Fie* X și Y *două spații din* $\mathcal{C}$ *din care cel puțin unul nu este vid. Atunci*

$$\dim (X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y.$$

Demonstrația se face prin inducție dublă. Teorema este evidentă dacă $\dim X = -1$ sau $\dim Y = -1$. Să presupunem că ea este adevărată pentru cazurile:

$$\dim X \leqslant m, \quad \dim Y \leqslant n - 1, \tag{5}$$

$$\dim X \leqslant m - 1, \quad \dim Y \leqslant n \tag{6}$$

și fie acum $\dim X = m$, $\dim Y = n$.

Orice punct $p = (x, y) \in X \times Y$ are vecinătăți arbitrar de mici de forma $U \times V$, unde U și V sînt vecinătăți ale lui x, resp. y, satisfăcînd condițiile:

$$\text{din } \mathcal{F}t\ U \leqslant m - 1, \text{ din } \mathcal{F}t\ V \leqslant n - 1.$$

Avem

$$\mathcal{F}t\,(U \times V) = (\overline{U} \times \mathcal{F}t\ V) \cup (\mathcal{F}t\ U \times \overline{V}).$$

Fiecare din termenii reuniunii din dreapta este închis şi are — în baza ipotezei inducţiei — dimensiunea $\leqslant m + n - 1$. Aplicînd teorema 2.2 obţinem

$$\dim \mathcal{F}r(U \times V) \leqslant m + n - 1,$$

ceea ce implică

$$\dim (X \times Y) \leqslant m + n.$$

PROPOZIŢIA **2.1.** *Fie X un spaţiu din $\mathcal{C}$. Dacă C_1 şi C_2 sînt două submulţimi închise disjuncte ale lui X şi A este o submulţime a lui X de dimensiune $\leqslant n$, atunci există o mulţime închisă B care separă pe C_1 şi C_2 şi astfel încît* dim $(A \cap B) \leqslant n - 1$.

Demonstraţie. Să presupunem mai întîi că $n = 0$. Dacă dim $A = -1$, propoziţia este evident adevărată. Să presupunem că dim $A = 0$. X fiind normal, există mulţimi deschise U_1 şi U_2 astfel încît

$$C_1 \subset U_1,\ C_2 \subset U_2,\ \overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \varnothing. \tag{7}$$

Mulţimile $\overline{U}_1 \cap A$ şi $\overline{U}_2 \cap A$ sînt închise în A şi deci pot fi separate în A, conform lemei 2.1. Există deci două mulţimi C_1' şi C_2', simultan închise şi deschise în A, astfel încît

$$A = C_1' \cup C_2',\ C_1' \cap C_2' = \varnothing,$$
$$\overline{U}_1 \cap A \subset C_1',\ \overline{U}_2 \cap A \subset C_2'.$$

În consecinţă

$$(C_1' \cap \overline{U}_2) \cup (C_2' \cap \overline{U}_1) = \varnothing \tag{8}$$

$$(C_1' \cap \overline{C}_2') \cup (\overline{C}_1' \cap C_2') = \varnothing. \tag{9}$$

Ţinînd cont şi de relaţiile (7), avem

$$(C_1' \cap \overline{C}_2) \cup (C_2' \cap \overline{C}_1) = \varnothing. \tag{10}$$

Întrucît U_1 şi U_2 sînt deschise, (8) implică că

$$(\overline{C}_1' \cap U_2) \cap (\overline{C}_2' \cap U_1) = \varnothing,$$

deci, datorită lui (7):

$$(C_1' \cap C_2) \cup (\overline{C}_2' \cap C_1) = \varnothing. \tag{11}$$

Din faptul că $\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 = C_1 \cap C_2 = \varnothing$, precum şi din (9), (10) şi (11) rezultă că, nici una din mulţimile disjuncte $C_1 \cup C_1'$ şi $C_2 \cup C_2'$ nu conţine nici un punct aderent al celeilalte. Datorită faptului că X e metric, deci complet normal, există [1]) o mulţime deschisă W astfel încît

$$C_1 \cup C_1' \subset W \text{ şi } \overline{W} \cap (C_2 \cup C_2') = \varnothing.$$

[1] A se vedea anexa I.

Mulțimea $\mathcal{F}r\ W = \overline{W} - W$ separă pe C_1 și C_2 și avem

$$A \cap \mathcal{F}r\ W = (C_1' \cup C_2') \cap \mathcal{F}r\ W = \varnothing.$$

Putem deci lua $B = \mathcal{F}r\ W$.

Să presupunem acum că $n > 0$. Cum X are bază numărabilă, putem aplica afirmația (Δ_n) stabilită în cursul demonstrației teoremei 2.2 și atunci $A = D \cup E$ cu dim $D \leqslant n - 1$, dim $E \leqslant 0$. Aplicînd cazul $n = 0$ demonstrat mai sus, obținem o mulțime B care separă pe C_1 și C_2 și astfel încît $B \cap E = \varnothing$. Rezultă că

$$A \cap B \subset D,$$

de unde dim $(A \cap B) \leqslant n - 1$, în baza teoremei 1.3.

Teorema 2.5. *Fie $X \in \mathcal{C}$. Condiția necesară și suficientă pentru ca* dim $X \leqslant n$, *este ca orice două submulțimi închise disjuncte ale lui X să poată fi separate în X de o mulțime închisă de dimensiune $\leqslant n - 1$.*

Demonstrație. Necesitatea condiției rezultă din propoziția 2.1 aplicată pentru $A = X$.

Pentru a demonstra suficiența, fie $p \in X$ și U o vecinătate a lui p. Atunci mulțimea închisă $X - U$ și mulțimea $\{p\}$ pot fi separate de o mulțime închisă B de dimensiune $\leqslant n - 1$. Aceasta înseamnă că

$$X - B = U' \cup V', \quad U' \cap V' = \varnothing,$$

$$p \in U', \quad X - U \subset V',$$

cu U' și V' deschise în $X - B$ și prin urmare în X. U' e o vecinătate a lui p și avem

$$U' \subset U, \ \mathcal{F}r\ U' \subset B.$$

În virtutea teoremei 1.3, conchidem că dim $\mathcal{F}r\ U' \leqslant n - 1$. Rezultă că dim $X \leqslant n$.

Propoziția 2.2. *Fie $X \in \mathcal{C}$ un spațiu astfel încît* dim $X \leqslant n - 1$, *și fie C_i, C_i' $(i = 1, \ldots, n)$ n perechi de submulțimi închise ale lui X, astfel încît $C_i \cap C_i' = \varnothing$. Atunci există n mulțimi închise B_i astfel încît B_i separă pe C_i și C_i' și*

$$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n = \varnothing.$$

Demonstrație. Aplicînd teorema 2.5, obținem o mulțime închisă B_1 care separă pe C_1 și C_1' și astfel încît

$$\dim B_1 \leqslant n - 2.$$

Aplicînd propoziția 2.1, obținem o mulțime închisă B_2 care separă pe C_2 și C_2' și astfel încît

$$\dim (B_1 \cap B_2) \leqslant n - 3.$$

Aplicînd în mod repetat propoziția 2.1, obținem n mulțimi B_i, astfel încît B_i separă pe C_i și C_i' și

$$\dim (B_1 \cap \ldots \cap B_k) \leqslant n - k - 1, \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Pentru $k = n$, conchidem că

$$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n = \varnothing.$$

§ 3. Aplicații în sfere

DEFINIȚIA 3.1. Fie f o aplicație continuă a unui spațiu $X \in \mathscr{C}$ într-un spațiu $Y \in \mathscr{C}$. Un punct $y \in f(X)$ se numește *valoare instabilă* a lui f dacă pentru orice $\delta > 0$ există o aplicație continuă g a lui X în Y astfel încît

$$\mathrm{d}(f(x), g(x)) < \delta \text{ pentru orice } x \in X,$$

$$y \notin g(X).$$

Orice punct al lui $f(X)$ care nu este o valoare instabilă se numește *valoare stabilă* a lui f.

LEMA 3.1. *Fie $X \in \mathscr{C}$ și I^n mulțimea punctelor din spațiul euclidian cu n dimensiuni ale căror coordonate satisfac inegalitățile*

$$|x_i| \leqslant 1, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Dacă f este o aplicație continuă a lui X în I^n, orice punct al frontierei lui I^n este valoare instabilă a lui f.

Demonstrație. Dacă $0 < \delta < 1$ și dacă $f_i(x)$ este coordonata a i-a a lui $f(x)$, atunci funcțiile

$$g_i(x) = (1 - \delta) f_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

definesc o aplicație continuă $g : X \to I^n$ astfel încît

$$\mathrm{d}(f(x), g(x)) < \delta\sqrt{n}$$

și nici un punct al frontierei lui I^n nu se află în $g(X)$.

TEOREMA 3.1. *Fie $X \in \mathscr{C}$ un spațiu, avînd dimensiunea $< n$ și fie f o aplicație continuă a lui X în I^n. Atunci taote punctele lui $f(X)$ sînt instabile.*

Demonstrație. Avînd în vedere lema 3.1, este suficient să demonstrăm afirmația din enunț pentru punctele interioare ale lui I^n, ceea ce, în baza omogeneității lui I^n, revine la a arăta că originea nu este o valoare stabilă a lui f. Fie $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ coordonatele lui $f(x)$. Fie $\delta > 0$ arbitrar și

$$C_i^+ = \{x \mid x \in X, f_i(x) \geqslant \delta\}, \quad C_i^- = \{x \mid x \in X, f_i(x) \leqslant -\delta\}.$$

Pentru fiecare i, mulțimile C_i^+ și C_i^- sînt închise și disjuncte, prin urmare, în virtutea propoziției 2.2, există mulțimi închise B_i ($i = 1, \ldots, n$) astfel încît B_i separă pe C_i^+ și C_i^-, adică

$$X - B_i = U_i^+ \cup U_i^- ,$$

U_i^+ și U_i^- fiind mulțimi deschise disjuncte care conțin respectiv pe C_i^+ și C_i^-, și

$$B_1 \cap \ldots \cap B_n = \varnothing. \tag{12}$$

Definim funcții g_i pentru $i = 1, \ldots, n$ prin:

$$g_i(x) = f_i(x) \qquad \text{dacă } x \in C_i^+ \cup C_i^-,$$

$$g_i(x) = \delta \frac{\mathrm{d}(x, B_i)}{\mathrm{d}(x, C_i^+) + \mathrm{d}(x, B_i)} \qquad \text{dacă } x \in U_i^+ - C_i^+,$$

$$g_i(x) = -\delta \frac{\mathrm{d}(x, B_i)}{\mathrm{d}(x, C_i^-) + \mathrm{d}(x, B_i)} \qquad \text{dacă } x \in U_i^- - C_i^-,$$

$$g_i(x) = 0 \qquad \text{dacă } x \in B_i.$$

Se vede ușor că funcțiile g_i sînt continue și că

$$|g_i(x) - f_i(x)| \leqslant 2\delta.$$

În afară de aceasta, $g_i(x) = 0$ numai dacă $x \in B_i$. Datorită relației (12), aceasta înseamnă că pentru nici un punct din X funcțiile g_i nu se anulează simultan, adică originea nu aparține imaginii lui X prin aplicația continuă definită de funcțiile $g_1, \ldots, g_n$. Conchidem că originea nu este valoare stabilă a lui f.

LEMA 3.2. *Fie $X \in \mathcal{C}$, f o aplicație continuă a lui X în I^n și $y \in I^n$ astfel încît $y \notin f(X)$. Atunci există pentru orice $\delta > 0$ o aplicație continuă g a lui X în I^n astfel încît*

$$\mathrm{d}(f(x), g(x)) < \delta, \qquad x \in X$$

$$y \notin \overline{g(X)}.$$

Demonstrație. Dacă y este în frontiera lui I^n, este suficient să considerăm aplicația definită de

$$g_i(x) = (1 - \delta) f_i(x), \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Dacă y este în interiorul lui I^n, fie $f'(x)$ proiecția punctului $f(x)$ din y pe frontiera lui I^n. Dacă $\mathrm{d}(f(x), f'(x)) \geqslant \frac{\delta}{2}$, atunci definim pe $g(x)$ ca fiind punctul situat pe segmentul ce unește pe $f(x)$ cu $f'(x)$ la distanța

$\frac{\delta}{2}$ de $f(x)$; dacă $d(f(x), f'(x)) < \frac{\delta}{2}$ punem $g(x) = f'(x)$. Aplicația g astfel obținută satisface condițiile din enunț.

DEFINIȚIA 3.2. Fie R^ω spațiul Hilbert al șirurilor de numere reale $x = (x_1, x_2, \ldots)$ astfel încît seria

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots$$

este convergentă. Pe R^ω se consideră metrica definită de norma

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \qquad (x \in R^\omega).$$

Notăm prin I^ω, *cubul lui Hilbert*, submulțimea lui R^ω formată din punctele $x = (x_1, x_2, \ldots)$ care satisfac condițiile

$$|x_i| \leqslant \frac{1}{i} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Să notăm prin $\mathcal{H}_\omega$ submulțimea lui I^ω formată din punctele care au toate coordonatele iraționale, prin $\mathcal{M}_\omega^m$ submulțimea lui I^ω formată din punctele care au *cel mult* m coordonate raționale și prin $\mathcal{R}_\omega^m$ submulțimea lui I^ω formată din punctele care au *exact* m coordonate raționale.

PROPOZIȚIA 3.1. dim $\mathcal{H}_\omega = 0$.

Demonstrație. Fie $a = (a_1, a_2, \ldots)$ un punct arbitrar în I^ω și $S_\varepsilon(a)$ bila din I^ω de centru a și de rază $\varepsilon > 0$. Arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural n și numere reale p_i, q_i $(i = 1, \ldots, n)$ astfel încît $p_i < a_i < q_i$ și astfel încît mulțimea deschisă V a punctelor $x = (x_1, x_2, \ldots)$ din I^ω definite prin

$$p_i < x_i < q_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

să fie conținută în $S_\varepsilon(a)$.

Pentru aceasta, alegem pe n astfel încît

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{1}{8}\varepsilon^2$$

și un $\delta > 0$ astfel încît

$$n\delta^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Dacă $q_i - p_i < \delta$ pentru $i \leqslant n$, avem pentru orice $x \in I^\omega$ care satisface la (13):

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a_i)^2} < \sqrt{n\,\delta^2 + \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{2}{i}\right)^2} < \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Să presupunem acum că $a \in \mathcal{N}_\omega$. Luînd pe p_i şi q_i raţionali, vecinătatea V a lui a are proprietatea că orice punct al frontierei sale în I^ω are cel puţin o coordonată raţională. Rezultă că

$$\mathcal{N}_\omega \cap \mathcal{F}r\, V = \varnothing,$$

prin urmare, în baza propoziţiei 1.2, dim $\mathcal{N}_\omega = 0$.

PROPOZIŢIA **3.2.** dim $\mathcal{M}_\omega^m \leqslant m$.

Demonstraţie. Vom arăta mai întîi că dim $\mathcal{R}_\omega^m = 0$. Pentru fiecare familie de m numere naturale $i_1, \ldots, i_m$ şi fiecare familie de m numere raţionale $r_1, \ldots, r_m$, fie C_i submulţimea lui I^ω formată din punctele $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ astfel încît

$$x_{i_1} = r_1,\ x_{i_2} = r_2, \ldots, x_{i_m} = r_m,$$

$$x_j \text{ irraţional pentru } j \neq i_1, i_2, \ldots, i_m.$$

Fiecare C_i este omeomorf cu $\mathcal{N}_\omega$ deci, în baza propoziţiei 3.1, are dimensiunea 0. Pe de altă parte, fiecare C_i este închis în $\mathcal{R}_\omega^m$ şi $\mathcal{R}_\omega^m$ este reuniunea mulţimilor C_i. Cum familia mulţimilor C_i e numărabilă, teorema 2.2 implică că dim $\mathcal{R}_\omega^m = 0$.

Avem

$$\mathcal{M}_\omega^m = \mathcal{R}_\omega^0 \cup \mathcal{R}_\omega^1 \cup \ldots \cup \mathcal{R}_\omega^m.$$

Printr-o aplicare repetată a lemei 2.2, ne convingem că dim $\mathcal{M}_\omega^m \leqslant m$.

TEOREMA **3.2.** *Dacă $X \in \mathcal{C}$ este un spaţiu avînd dimensiunea $\geqslant n$, atunci există o aplicaţie continuă a lui X în I^n care are cel puţin o valoare stabilă.*

Demonstraţie. Să presupunem că nici o aplicaţie continuă a lui X în I^n nu are valori stabile. Din lema 3.2 urmează că pentru orice $y \in I^n$ şi orice aplicaţie continuă f a lui X în I^n, există aplicaţii continue g oricît de apropiate de f, astfel încît

$$y \notin \overline{g(X)}.$$

Fie $\mathcal{C}(X, I^\omega)$ spaţiul metric al tuturor aplicaţiilor continue ale lui X în cubul lui Hilbert I^ω, metrica fiind definită prin

$$\mathrm{d}(f, g) = \sup_{x \in X} \mathrm{d}(f(x), g(x)) \quad (f, g \in \mathcal{C}(X, I^\omega)).$$

Fie $P = P(i_1, \ldots, i_n;\ c_1, \ldots, c_n)$ mulţimea punctelor $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ ale spaţiului lui Hilbert R^ω care satisfac condiţiile

$$x_{i_1} = c_1, \ldots, x_{i_n} = c_n. \tag{14}$$

Notăm

$$G(P) = \{g \mid g \in \mathcal{C}(X, I^\omega),\ \overline{g(X)} \cap P = \varnothing\}.$$

Mulțimea $G(P)$ este densă în $\mathcal{C}(X, I^\omega)$, căci, fiind dat $f \in \mathcal{C}(X, I^\omega)$, dacă

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots),$$

funcțiile $f_{i_1}, \ldots, f_{i_n}$ definesc o aplicație continuă a lui X în I^n și — după cum s-a observat mai sus — se poate face, prin modificări arbitrar de mici ale acestei aplicații, ca punctul $(c_1, \ldots, c_n)$ să nu aparțină aderenței imaginei lui X.

În plus, mulțimea $G(P)$ este deschisă în $\mathcal{C}(X, I^\omega)$, căci, dacă $g \in G(P)$, distanța

$$\rho = \mathrm{d}\ (g(X), P)$$

este pozitivă și orice $f \in \mathcal{C}(X, I^\omega)$ astfel încît $\mathrm{d}(f, g) < \rho$ aparține lui $G(P)$.

Să considerăm acum submulțimea lui $\mathcal{C}(X, I^\omega)$ definită prin:

$$F = \{g \mid \overline{g(X)} \subset \mathcal{M}_\omega^{n-1}\}.$$

Mulțimea $I^\omega - \mathcal{M}_\omega^{n-1}$ este intersecția lui I^ω cu o reuniune numărabilă de hiperplane P_i ($i = 1, 2, \ldots$) de tipul (14), anume cele care corespund la toate familiile de n numere naturale $(i_1, \ldots, i_n)$ și la toate familiile de n numere raționale $(c_1, \ldots, c_n)$. Rezultă că

$$F = \bigcap_{i=1}^{\infty} G(P_i).$$

În baza teoremei de scufundare a lui Urysohn (teorema 6.4), $\mathcal{C}(X, I^\omega)$ conține o mulțime G_δ densă ale cărei elemente sînt injecții topologice. Fie H această mulțime.

Se poate arăta ușor că spațiul metric $\mathcal{C}(X, I^\omega)$ este complet. Se poate deci aplica teorema lui Baire în $\mathcal{C}(X, I^\omega)$. În virtutea acestei teoreme, mulțimea

$$H' = H \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} G(P_i)$$

este densă în $\mathcal{C}(X, I^\omega)$, ca intersecție numărabilă de mulțimi G_δ dense; în particular $H' \neq \varnothing$. Există deci o injecție topologică h a lui X în $\mathcal{M}_\omega^{n-1}$. Dar, în baza propoziției 3.2, $\dim \mathcal{M}_\omega^{n-1} \leqslant n - 1$, deci $\dim h(X) \leqslant n - 1$, ceea ce contrazice ipoteza că $\dim X \geqslant n$.

PROPOZIȚIA 3.3. *Fie f o aplicație continuă a lui $X \in \mathcal{C}$ în I^n și fie $y \in f(X)$ un punct interior al lui I^n. Punctul y este valoarea instabilă a lui f dacă și numai dacă pentru orice vecinătate U a lui y există o aplicație continuă g a lui X în I^n satisfăcînd condițiile*:

(15) $g(x) = f(x)$ dacă $f(x) \notin U$,

(16) $g(x) \in U$ dacă $f(x) \in U$,

(17) $y \notin g(X)$.

Demonstrație. Condiția e suficientă, căci din (15) și (16) avem

$$\mathrm{d}\,(f(x),\ g(x)) \leqslant \operatorname{diam} U, \qquad (x \in X),$$

deci y este valoare instabilă.

Pentru a demonstra necesitatea, fie $\delta > 0$. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că y e originea și U este bila cu centrul în origine și raza δ. Există atunci o aplicație continuă g' a lui X în I^m astfel încît, în notație vectorială,

$$|f(x) - g'(x)| = \mathrm{d}\,(f(x), g'(x)) < \frac{1}{2}\,\delta, \tag{18}$$

$$g'(x) \neq 0. \tag{19}$$

Definim o aplicație continuă g prin relațiile

$$g(x) = g'(x) \qquad \text{dacă } |f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\,\delta; \tag{20}$$

$$g(x) = 2\left(1 - \frac{|f(x)|}{\delta}\right) g'(x) - \left(1 - \frac{2\,|f(x)|}{\delta}\right) f(x) \text{ dacă } \frac{1}{2}\,\delta < |f(x)| < \delta, \tag{21}$$

$$g(x) = f(x) \qquad \text{dacă } |f(x)| \geqslant \delta. \tag{22}$$

Condiția (15) este echivalentă cu (22).

Dacă $\frac{1}{2}\,\delta < |f(x)| < \delta$, obținem din relațiile (18) și (21):

$$|f(x) - g(x)| = 2\left(1 - \frac{|f(x)|}{\delta}\right) |f(x) - g'(x)| <$$

$$< 2\left(1 - \frac{|f(x)|}{\delta}\right) \cdot \frac{1}{2}\,\delta < \delta - |f(x)|.$$

De aici urmează

$$0 < |g(x)| < \delta. \tag{23}$$

Datorită lui (18), (19), (20), inegalitatea (23) este valabilă și pentru $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\,\delta$, ceea ce demonstrează relațiile (16) și (17).

PROPOZIȚIA **3.4.** *Fie X un spațiu din $\mathcal{C}$. Fie C o submulțime închisă a lui X și f o aplicație continuă a lui C în I^n (în I^ω). Atunci f poate fi extinsă la o aplicație continuă a lui X în I^n (în I^ω).*

Demonstrație. Este suficient să se aplice teorema lui Tietze la fiecare coordonată a lui $f(x)$.

PROPOZIȚIA 3.5. *Fie X un spațiu din $\mathcal{C}$. Fie C o submulțime închisă a lui X și f o aplicație continuă a lui C în sfera unitate din spațiul euclidian cu $(n+1)$ dimensiuni, S^n* [1]). *Atunci există o mulțime deschisă U în X, care conține pe C, și pe care există o extindere F a lui f, F fiind o aplicație continuă a lui U în S^n.*

Demonstrație. Fie

$$f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)$$

coordonatele lui $f_i(x)$ în R^{n+1}.

Avem

$$|f(x)| \leqslant 1 \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

Aplicînd teorema lui Tietze, obținem o extindere F_i a lui f_i la întreg X.

Fie

$$U = \left\{ x \mid x \in X, \sum_{i=1}^{n+1} (F_i(x))^2 > 0 \right\}.$$

Este clar că U este deschisă în X și că $C \subset U$. Pentru orice $x \in U$, definim pe $F(x)$ ca fiind punctul lui S^n a cărei a i-a coordonată este

$$\frac{F_i(x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (F_i(x))^2}}.$$

TEOREMA 3.3. *Un spațiu $X \in \mathcal{C}$ are dimensiunea $\leqslant n$ dacă și numai dacă pentru orice submulțime închisă C a lui X și orice aplicație continuă f a lui C în S^n există o extensie F a lui f pe întreg X.*

Demonstrație. În loc de S^n luăm, în raționamente, frontiera lui I^{n+1}, cu care S^n este omeomorfă. f devine atunci o aplicație continuă a lui C în I^{n+1}. Pentru a demonstra necesitatea condiției, considerăm o aplicație continuă F' a lui X în I^{n+1} care este o extensie a lui f și care există datorită propoziției 3.4.

Întrucît $\dim X \leqslant n$, conform teoremei 3.1 originea nu este valoarea stabilă pentru F'. Propoziția 3.3 asigură existența unei aplicații continue F'' a lui X în I^{n+1} astfel încît originea nu este conținută în $F''(X)$ și $F''(x) = F'(x)$ pentru toate punctele x pentru care $F'(x)$ nu este în interiorul lui I^{n+1}. În particular

$$F''(x) = F'(x) = f(x) \text{ pentru } x \in C.$$

Dacă notăm prin $F(x)$ proiecția punctului $F''(x)$ din origine pe frontiera lui I^{n+1}, F este aplicația căutată.

---

[1]) S^n este mulțimea punctelor $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ din spațiul euclidian cu $(n+1)$ dimensiuni R^{n+1} care satisfac condiția: $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$.

Pentru a demonstra suficiența condiției, este destul — în baza teoremei 3.2 — să arătăm că nici o aplicație continuă f a lui X în I^{n+1} nu poate avea valori stabile. În conformitate cu lema 3.1, este suficient să considerăm cazul unui punct y din interiorul lui I^{n+1}. Fie U bila cu centrul în y și raza $\frac{\delta}{2}$. Identificăm frontiera lui U cu S^n. Mulțimea $f^{-1}(S^n)$ este închisă, deci există o aplicație continuă F a lui X în S^n astfel încît $F(x) = f(x)$ pentru $x \in f^{-1}(S^n)$. Definim o aplicație continuă g a lui X în I^{n+1} prin

$$g(x) = f(x) \qquad \text{dacă } f(x) \notin U,$$
$$f(x) = F(x) \qquad \text{dacă } f(x) \in U.$$

Avem $g(X) \cap U = \varnothing$ și $\mathrm{d}(f, g) < \delta$, ceea ce completează demonstrația teoremei.

COROLARUL 3.1. *Fie $X \in \mathcal{C}$ și C o submulțime închisă a lui X. Dacă* $\dim (X - C) \leqslant n$, *atunci orice aplicație continuă f a lui C în S^n poate fi extinsă la întregul spațiu X.*

Demonstrație. Conform propoziției 3.5 există o submulțime deschisă U a lui X conținînd pe C și o aplicație continuă f' a lui U în S^n care extinde pe f. Fie V o mulțime deschisă a lui X satisfăcînd condițiile

$$C \subset V \subset \overline{V} \subset U;$$

V există deoarece X este metrizabil, deci normal. Să considerăm restricția

$$\overline{f} = f' \mid \overline{V} \cap (X - C).$$

Cum $\dim (X - C) \leqslant n$, în baza teoremei 3.3 există o aplicație continuă f'' a lui $X - C$ în S^n care extinde pe $\overline{f}$. Dacă punem

$$F(x) = f(x) \qquad \text{pentru } x \in C$$
$$F(x) = f''(x) \qquad \text{pentru } x \in X - C,$$

obținem extinderea căutată a lui f.

DEFINIȚIA 3.3. Fie X și Y două spații topologice arbitrare. Se zice că două aplicații continue f și g ale lui X în Y sînt *omotope*, dacă există o aplicație continuă h a produsului topologic [1]) $X \times I$ în Y astfel încît

$$h(x, 0) = f(x) \qquad (x \in X),$$
$$h(x, 1) = g(x) \qquad (x \in X).$$

LEMA 3.3. *Fie C o submulțime închisă a unui spațiu X și U o mulțime deschisă în $X \times I$ astfel încît $C \times I \subset U$. Atunci există o mulțime deschisă W în X astfel încît*

$$C \subset W \quad \text{și} \quad W \times I \subset U.$$

[1]) Notam prin I segmentul închis $[0, 1]$.

Demonstrație. Fie $c \in C$. Întrucît $\{c\} \times I \subset U$, pentru fiecare t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, există o vecinătate V_t^c a lui c în X și un interval deschis J_t conținînd pe t astfel încît $V_t^c \times J_t \subset U$. Întrucît $\{c\} \times I$ este compact, există un număr finit de asemenea vecinătăți (V_i) și (J_i) astfel încît

$$\bigcup_i (V_i \times J_i) \supset \{c\} \times I.$$

Dacă punem $W_c = \bigcap V_i$, este suficient să luăm $W = \bigcup_{c \in C} W_c$.

TEOREMA 3.4. (Teorema lui Borsuk). *Fie X un spațiu normal, C o submulțime închisă a lui X și f și g două aplicații continue omotope ale lui C în S^n. Dacă există o extindere F a lui f la întreg X, atunci există de asemenea o extindere G a lui g la întreg X, cu F și G omotope.*

Demonstrație. Conform ipotezei, există o aplicație continuă h a lui $C \times I$ în S^n astfel încît

$$h(x, 0) = f(x) \qquad (x \in C),$$
$$h(x, 1) = g(x) \qquad (x \in C).$$

Să introducem submulțimea închisă C' a lui $X \times I$ definită prin:

$$C' = \{(x, 0) \mid x \in X\} \cup \{(x, t) \mid x \in C,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\},$$

și aplicația continuă H a lui C' în S^n definită prin:

$$H(x, 0) = F(x), \qquad (x \in X),$$
$$H(x, t) = h(x, t) \qquad (x \in C,\ 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

În conformitate cu propoziția 3.5, există o mulțime deschisă U în $X \times I$, astfel încît $C' \subset U$, și o aplicație continuă $\overline{H} : U \to S^n$ care extinde pe H.

În baza lemei 3.3, există o submulțime deschisă V a lui X astfel încît

$$C \subset V \text{ și } V \times I \subset U.$$

C și $X - V$ sînt două mulțimi închise disjuncte ale lui X, care este normal. Există deci, conform lemei lui Urysohn, o funcție reală continuă p definită pe X, astfel încît

$$0 \leqslant p(x) \leqslant 1 \qquad (x \in X),$$
$$p(x) = 1 \qquad (x \in C),$$
$$p(x) = 1 \qquad (x \in X - V).$$

Să considerăm aplicația continuă $H^* : X \times I \to S^n$ definită prin

$$H^*(x, t) = \overline{H}(x, tp(x)) \qquad (x \in X, t \in I).$$

Definim

$$G(x) = H^*(x, 1) \qquad (x \in X).$$

Este clar că G extinde pe g şi că F şi G sînt omotope, căci

$$H^*(x, 0) = F(x) \qquad (x \in X),$$
$$H^*(x, 1) = G(x) \qquad (x \in X).$$

PROPOZIŢIA 3.5. *Fie $X \in \mathcal{C}$ şi f şi g două aplicaţii continue ale lui X în S^n, astfel încît punctele $x \in X$ pentru care $f(x) \neq g(x)$ formează o submulţime D de dimensiune $\leqslant n - 1$. Atunci f şi g sînt omotope.*

Demonstraţie. Este clar că D e deschisă. Considerăm submulţimea închisă D^* a lui $X \times I$ definită prin

$$D^* = \{(x, 0) \mid x \in X\} \cup \{(x, 1) \mid x \in X\} \cup \{(x, t) \mid x \in X - D, t \in I\}.$$

Definim o aplicaţie continuă $F : D^* \to S^n$ precum urmează

$$F(x, t) = f(x) = g(x) \qquad (x \in X - D),$$
$$F(x, 0) = f(x),\ F(x, 1) = g(x) \quad (x \in X).$$

Avem :

$$X \times I - D^* \subset D \times I$$

şi, prin aplicarea teoremei 2.4 şi a faptului, evident, că $\dim I = 1$:

$$\dim (D \times I) \leqslant n.$$

În virtutea corolarului 3.1, putem extinde aplicaţia F la o aplicaţie continuă a lui $X \times I$ în S^n, care realizează omotopia lui f şi g.

PROPOZIŢIA 3.7. *Fie $X \in \mathcal{C}$ şi C_1 şi C_2 două mulţimi închise ale lui X astfel încît $X = C_1 \cup C_2$. Fie f_1, f_2 aplicaţii continue ale lui C_1, respectiv C_2, în S^n.*

Dacă punctele $x \in C_1 \cap C_2$ pentru care $f_1(x) \neq f_2(x)$ formează o mulţime de dimensiune $\leqslant n - 1$, atunci f_1 poate fi extinsă la întreg X.

Demonstraţie. Restricţiile $f_1 | C_1 \cap C_2$ şi $f_2 | C_1 \cap C_2$ diferă numai pe o mulţime de dimensiune $\leqslant n - 1$, deci sînt omotope, în virtutea propoziţiei 3.6. Întrucît $f_2 | C_1 \cap C_2$ are o extindere la mulţimea C_2, anume f_2, rezultă din teorema 3.4 că există o extindere $\bar{f}_1$ a lui $f_1 | C_1 \cap C_2$ la mulţimea C_2. Este suficient să punem

$$f(x) = f_1(x) \qquad (x \in C_1),$$
$$f(x) = \bar{f}_1(x) \qquad (x \in C_2)$$

pentru a obţine extinderea căutată.

PROPOZIȚIA 3.8. *Fie $X \in \mathcal{C}$ și C o submulțime închisă a lui X. Fie $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ o familie de mulțimi deschise ale lui X, astfel încît*

$$X = \bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda, \text{ dim } \mathcal{F}r\ V_\lambda \leqslant n - 1 \ (\lambda \in L).$$

Dacă f este o aplicație continuă a lui C în S^n care poate fi extinsă pe fiecare din mulțimile $C \cup V_\lambda$ $(\lambda \in L)$, atunci f poate fi extinsă la întreg spațiul X.

Demonstrație. Spațiul X fiind metrizabil și separabil, el are bază numărabilă și atunci se vede ușor că se poate extrage din familia $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ o subfamilie numărabilă $(V_i)_{i=1,2,\ldots}$ cu proprietățile

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i, \text{ dim } \mathcal{F}r\ V_i \leqslant n - 1.$$

Fie F_1 o extindere arbitrară a lui f pe mulțimea $C \cup V_1$. Să presupunem că am definit deja o extensie F_k a lui F_{k-1} la mulțimea $C \cup \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_k$. Putem scrie

$$C \cup \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_{k+1} = C_1 \cup C_2,$$

unde

$$C_1 = C \cup \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_k$$

și

$$C_2 = (C \cup \overline{V}_{k+1}) - (V_1 \cup \ldots \cup V_k).$$

Prin ipoteză, f admite o extensie g_k la mulțimea C_2. Avem

$$\{x \mid F_k(x) \neq g_k(x)\} \subset C_1 \cap C_2 - C \subset \mathcal{F}r\ (V_1 \cup \ldots \cup V_k) \subset$$
$$\subset \mathcal{F}r\ V_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}r\ V_k,$$

și ultima mulțime din această relație are dimensiunea $\leqslant n - 1$, în baza teoremei 2.2. Putem, prin urmare, aplica propoziția 3.7 pentru a obține o extindere F_{k+1} a lui F_k la mulțimea $C \cup \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_{k+1}$.

Fie $x \in X$ și m cel mai mic număr natural astfel încît $x \in V_m$. Punînd

$$F(x) = F_m(x) = F_{m+1}(x) = F_{m+2}(x) = \ldots,$$

obținem o aplicație continuă F a lui X în S^n care este vizibil o extindere a lui f.

PROPOZIȚIA 3.9. *Fie $X \in \mathcal{C}$ și $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ o familie de submulțimi închise ale lui X avînd următoarele proprietăți:*

1°. $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$.

2°. dim $K_\lambda \leqslant n$ $(\lambda \in \Lambda)$.

3°. *Pentru orice* $\lambda \in \Lambda$ *și orice mulțime deschisă* U *care conține pe* K_λ, *există o mulțime deschisă* V *astfel încît*

$$K_\lambda \subset V \subset U \text{ și } \dim \mathcal{F}r\ V \leqslant n-1.$$

În aceste condiții, X *are dimensiune* $\leqslant n$.

Demonstrație. Pentru a demonstra că $\dim X \leqslant n$, în baza teoremei 3.3, este suficient să arătăm că pentru orice mulțime închisă C a lui X și orice aplicație continuă $f: C \to S^n$, există o extindere a lui f la întreg X. Aplicînd corolarul 3.1 spațiului $C \cup K_\lambda$ și submulțimii sale închise C, obținem o extindere a lui f la mulțimea $C \cup K_\lambda$. Mai mult decît atît, conform propoziției 3.5, f poate fi chiar extinsă la o mulțime deschisă U_λ astfel încît

$$U_\lambda \supset C \cup K_\lambda.$$

Din ipoteză rezultă însă că există o mulțime deschisă V_λ astfel încît

$$K_\lambda \subset V_\lambda \subset \bar{V}_\lambda \subset U_\lambda,$$
$$\dim \mathcal{F}r\ V_\lambda \leqslant n-1.$$

Întrucît $C \cup \bar{V}_\lambda \subset U_\lambda$, este clar că f poate fi extins la mulțimea $C \cup V_\lambda$. În plus,

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda.$$

Putem deci aplica propoziția 3.8 pentru a căpăta o extindere a lui f la întreg X.

Propoziția 3.10. *Fie* X *și* Y *două spații din* $\mathcal{C}$ *și* f *o aplicație continuă și închisă* [1]) *a lui* X *în* Y. *Dacă pentru orice* $y \in Y$ *avem* $\dim f^{-1}(y) \leqslant m$, *atunci* $\dim X \leqslant m + \dim Y$.

Demonstrație. Este evident că putem să ne restrîngem la cazul cînd Y este de dimensiune finită. Vom demonstra teorema prin inducție asupra lui $\dim Y$, m fiind păstrat fix.

Pentru $\dim Y = -1$, teorema este trivială, căci în acest caz avem și $X = \emptyset$. Să presupunem teorema adevărată pentru $\dim Y \leqslant n-1$ și să presupunem că $\dim Y = n$.

Avem, pentru orice $y \in Y$:

$$\dim f^{-1}(y) \leqslant m \leqslant m + n.$$

Dacă U este o submulțime deschisă a lui X, astfel încît $f^{-1}(y) \subset U$, mulțimea

$$C = f(X - U)$$

este o submulțime închisă a lui Y (căci f este închisă) care nu conține

[1]) O aplicație f se numește *închisă* dacă pentru orice submulțime închisă F a lui X, mulțimea $f(F)$ e închisă în Y.

punctul y. Întrucît $\dim Y = n$, există o vecinătate V a lui y în Y astfel încît

$$C \cap V = \varnothing, \ \dim \mathcal{F}r\ V \leqslant n - 1.$$

Urmează că

$$f^{-1}(C) \cap f^{-1}(V) = \varnothing,$$

și, în consecință,

$$f^{-1}(V) \subset U.$$

$f^{-1}(V)$ este o mulțime deschisă, care conține pe $f^{-1}(y)$ și pentru care avem

$$f(\mathcal{F}r\ (f^{-1}(V))) \subset \mathcal{F}r\ V,$$

de unde rezultă că

$$\dim f(\mathcal{F}r\ (f^{-1}(V)) \leqslant n - 1,$$

deci, în baza ipotezei inducției,

$$\dim \mathcal{F}r\ (f^{-1}(V)) \leqslant m + n - 1.$$

Se vede deci că putem aplica propoziția 3.9 familiei de mulțimi închise $(f^{-1}(y))_{y \in Y}$, obținînd

$$\dim X \leqslant m + n = m + \dim Y.$$

Definiția 3.3. Fie X și Y două spații din categoria $\mathcal{C}$ și f o aplicație continuă a lui X în Y.

Definim *dimensiunea aplicației f în punctul $x \in X$*, $\dim_x f$, ca fiind

$$\dim_x f = \dim_x (f^{-1}(f(x))).$$

Definim *dimensiunea aplicației f*, $\dim f$, ca fiind

$$\dim f = \sup_{x \in X} \dim_x f.$$

Teorema 3.5. *Fie X și Y două spații metrice separabile și f o aplicație continuă și închisă a lui X în Y. Atunci*

$$\dim X \leqslant \dim f + \dim Y.$$

Demonstrație. Teorema rezultă imediat din propoziția 3.10 și din observația că definiția 3.3 implică relația

$$\dim f = \sup_{y \in f(X)} \dim (f^{-1}(y)).$$

§ 4. Spații euclidiene

DEFINIȚIA 4.1. Fie $p_0, \ldots, p_r$ un sistem de puncte independente*) ale spațiului euclidian n-dimensional $R^n (r \leqslant n)$. Mulțimea S a punctelor spațiului R^n care se scriu sub forma **)

$$x = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_r p_r ,$$

unde $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$ sînt numere reale care satisfac condițiile

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1,$$
$$\lambda_i \geqslant 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

se numește *simplex euclidian r-dimensional.*

Vom scrie $S = [p_0, \ldots, p_r]$. Punctele $p_0, \ldots, p_r$ se numesc *vîrfurile* simplexului S. Se vede ușor că punctul x determină unic numerele $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_r$ care se numesc coordonatele baricentrice ale lui x.

Submulțimea lui S formată din punctele pentru care $\lambda_i > 0$ $(i = 0, \ldots, r)$ se numește simplex r-dimensional deschis și se notează $(p_0, \ldots, p_r)$.

DEFINIȚIA 4.2. Se numește *complex simplicial abstract* (finit) o mulțime finită K, împreună cu o familie Φ de submulțimi ale lui K satisfăcînd următoarele condiții :

a) $s \in K$ implică $\{s\} \in \Phi$.

b) $S \in \Phi$ și $T \subset S$ implică $T \in \Phi$.

Elementele lui K se numesc *vîrfuri*, iar cele ale lui Φ *simplexe.* Se numește dimensiune a unui simplex numărul elementelor sale micșorate cu o unitate, iar dimensiunea complexului K, dimensiunea maximă a simplexelor sale.

O aplicație f a unui complex K într-un complex K' se numește *simplicială*, dacă imaginea oricărui simplex al lui K este un simplex al lui K'. În cazul particular cînd f este biunivocă, se obține noțiunea de subcomplex.

DEFINIȚIA 4.3. Fie K un complex simplicial abstract și $[0,1]^K$ produsul topologic a K spații identice cu segmentul $[0, 1]$. Se numește *complex simplicial topologic de schemă* K submulțimea $\widetilde{K}$ a lui $[0,1]^K$ formată din punctele $(\lambda_k)_{k \in K}$ satisfăcînd următoarele condiții :

1°. Mulțimea acelor indici $k \in K$ astfel încît $\lambda_k \neq 0$ este un simplex al lui K ;

2°. $\sum_{k \in K} \lambda_k = 1.$

*) Adică astfel încît nici un plan de dimensiune $\leqslant r - 1$ nu conține punctele $p_0, \ldots, p_r$.

**) Pentru orice $x \in R^n$ și α număr real, notăm prin $\alpha\, x$ punctul care are drept coordonate coordonatele lui x multiplicate prin α.

Pentru orice simplex S al lui K, mulțimea $\widetilde{S}$ a punctelor $(\lambda_k)_{k\in K}$ astfel, încît $\lambda_k = 0$ pentru $k \notin S$ este un simplex euclidian și este clar că dacă $S = S' \cap S''$, atunci $\widetilde{S} = \widetilde{S}' \cap \widetilde{S}''$ și că $\widetilde{K} = \bigcup_{S\in\Phi} \widetilde{S}$. Fiecare $\widetilde{S}$ se numește simplex al lui $\widetilde{K}$, iar dacă este zero-dimensional, vîrf al lui $\widetilde{K}$.

Pentru orice aplicație simplicială $f: K \to K'$, definim o aplicație continuă $\tilde{f}: \widetilde{K} \to \widetilde{K}'$ în modul următor: fie $x \in \widetilde{K}$, $x = (\lambda_k)_{k\in K}$. Atunci $\tilde{f}(x) \in \widetilde{K}'$ va fi punctul $x = (\mu_{k'})_{k'\in K'}$ astfel încît:

$$\mu_{k'} = \sum_{k\in f^{-1}(k')} \lambda_k.$$

DEFINIȚIA 4.4. Se numește *subdiviziune simplicială* a unui complex topologic $\widetilde{K}$, un cuplu $(\widetilde{K}', \psi)$, unde $\widetilde{K}'$ este un complex topologic și ψ este un omeomorfism al lui $\widetilde{K}'$ pe $\widetilde{K}$ astfel încît:

1°. Imaginea prin ψ a oricărui simplex al lui $\widetilde{K}'$ este conținută într-un simplex al lui $\widetilde{K}$ și, dacă $x \in \widetilde{S}$, unde $\widetilde{S} = (p_0, \ldots, p_r)$ e un simplex al lui $\widetilde{K}$ și

$$x = \lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_r p_r,$$

atunci

$$\psi(x) = \lambda_0 \psi(p_0) + \ldots + \lambda \psi_k(p_k).$$

2°. Intersecția unui simplex al lui $\widetilde{K}$ și a imaginii unui simplex al lui $\widetilde{K}'$ este imaginea unui simplex al lui $\widetilde{K}'$.

Observația 4.1. Pentru orice subcomplex $\widetilde{H}$ al lui $\widetilde{K}$, dacă notăm $\widetilde{H}' = \psi^{-1}(\widetilde{H})$, atunci $\widetilde{H}'$ este un subcomplex al lui $\widetilde{K}'$ și $(\widetilde{H}', \psi|\widetilde{H}')$ definește o subdiviziune a lui $\widetilde{H}$. În particular, se obține o subdiviziune a fiecărui simplex $\widetilde{S}$ al lui $\widetilde{H}$ și $\widetilde{S}$ este reuniunea imaginilor simplexelor din $\widetilde{K}'$ care sînt conținute în $\widetilde{S}$.

DEFINIȚIA 4.5. Fiind dat un complex simplicial topologic $\widetilde{K}$, vom defini o subdiviziune $(\widetilde{K}', \psi)$ a lui $\widetilde{K}$, numită *subdiviziunea baricentrică a lui* $\widetilde{K}$.

Vîrfurile lui K' sînt simplexele nevide ale lui K. Simplexele lui K' sînt mulțimile de simplexe nevide distincte ale lui K care sînt total ordonate prin relația de incluziune.

Dacă k' este un vîrf al lui $\widetilde{K}'$, adică un simplex S al lui K, atunci $\psi(k')$ este, prin definiție, centrul de greutate al simplexului $\widetilde{S}$ al lui $\widetilde{K}$. Dacă S' este un simplex al lui K', adică un șir

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_q \tag{24}$$

de simplexe distincte ale lui K, este evident că centrele de greutate ale simplexelor $\widetilde{S}_0, \ldots, \widetilde{S}_q$ sînt toate conținute în $\widetilde{S}_q$ și sînt independente.

Omeomorfismul ψ se obține prelungind prin linearitate valorile lui ψ deja definite pe vîrfurile lui $\widetilde{K}'$. Aceasta asigură că condiția 1° din definiția 4.4 este îndeplinită. Faptul că condiția 2° este îndeplinită, rezultă din următoarea observație: fie S' simplexul lui K' definit de șirul (24). Atunci $\psi(\widetilde{S}')$ coincide cu mulțimea punctelor (λ_{p_k}) care se bucură de următoarele proprietăți:

$\lambda_{p_k} \geqslant \lambda_{p_h}$ ori de cîte ori primul simplex din șirul (24) care îl conține pe p_k este conținut în primul simplex al șirului care îl conține pe p_h.

$\lambda_{p_k} = \lambda_{p_h}$ ori de cîte ori primul simplex care îl conține pe p_k este același cu primul simplex care îl conține pe p_h.

Pentru a demonstra această observație, să presupunem că $S_q = (p_0, \ldots, p_l)$ și că n_i sînt numere naturale astfel încît $0 \leqslant n_0 < n_1 < \ldots < n_q = l$ și

$$S_i = (p_0, \ldots, p_{n_i}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, q).$$

Dacă $x \in \widetilde{S}'$ are reprezentarea

$$x = \mu_0 S_0 + \mu_1 S_1 + \ldots + \mu_q S_q,$$

unde $\mu_0 + \ldots + \mu_q = 1$ și $\mu_i \geqslant 0$ $(i = 0, \ldots, q)$, și $\psi(x) \in \widetilde{S}_q$ are reprezentarea

$$\psi(x) = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_l p_l,$$

în care $\lambda_0 + \ldots + \lambda_l = 1$ și $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 0, \ldots, l)$, atunci avem

$$\lambda_i = \frac{\mu_{j+1}}{n_{j+1}} + \frac{\mu_{i+2}}{n_{j+2}} + \ldots + \frac{\mu_q}{n_q}$$

pentru $n_j + 1 \leqslant i \leqslant n_{j+1}$ $(j = -1, 0, 1, \ldots, q-1$, cu convenția că $n_{-1} = -1)$, și, invers,

$$\mu_i = n_i (\lambda_{n_i} - \lambda_{n_i+1})$$

pentru $i = 0, 1, \ldots, q$ (cu convenția că $\lambda_{n_q+1} = 0$).

Din aceste relații rezultă imediat observația de mai sus asupra lui $\psi(\widetilde{S}')$.

LEMA 4.1. *Fie* $S = [p_0, \ldots, p_r]$ *un simplex euclidian în* R^n. *Atunci*

$$\operatorname{diam} S = \operatorname{diam} \{p_0, \ldots, p_r\}.$$

Demonstrație. Fie $x, y \in S$. Atunci există un indice i_0, $0 \leqslant i_0 \leqslant r$, astfel încît

$$|y - x| \leqslant |y - p_{i_0}|. \tag{25}$$

Într-adevăr, fie $x = \lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_r p_r$. Atunci

$$|y - x| = |\sum_{i=0}^{r} (\lambda_i y - \lambda_i p_i)| \leqslant \sum_{i=0}^{r} \lambda_i |y - p_i| \leqslant$$

$$\leqslant (\max_{i=0}^{r} |y - p_i|) \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = \max_{i=0}^{r} |y - p_i|.$$

Aplicînd aceeași inegalitate, deducem că există j_0, $0 \leqslant j_0 \leqslant r$, astfel încît

$$|y - p_{i_0}| \leqslant |p_{j_0} - p_{i_0}|,$$

deci

$$|y - x| \leqslant |p_{j_0} - p_{i_0}|.$$

LEMA 4.2. *Fie* $[p_0, \ldots, p_m]$ *un simplex m-dimensional și*

$$b = \frac{1}{k+1}(p_0 + \ldots + p_k),\ b' = \frac{1}{i+1}(p_0 + \ldots + p_i),\ (i \leqslant k \leqslant m).$$

Atunci

$$|b - b'| \leqslant \frac{m}{m+1} \operatorname{diam} \{p_0, \ldots, p_m\}.$$

Demonstrație. Conform inegalității (25), există un j, $0 \leqslant j \leqslant k$, astfel încît

$$|b - b'| \leqslant |b - p_j|.$$

De aici deducem

$$|b - b'| \leqslant |b - p_j| = \left| \frac{1}{k+1}(p_0 + \ldots + p_k) - p_j \right| =$$

$$= \frac{1}{k+1} \left| \sum_{i=0}^{k} (p_i - p_j) \right| \leqslant \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} |p_i - p_j| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k}{k+1} \operatorname{diam} \{p_0, \ldots, p_k\} \leqslant \frac{m}{m+1} \operatorname{diam} \{p_0, \ldots, p_m\}.$$

PROPOZIȚIA 4.1. *Fie* $\widetilde{K}$ *un complex simplicial topologic de dimensiune n, și* $(\widetilde{K}', \psi)$ *subdiviziunea baricentrică a lui* $\widetilde{K}$. *Atunci*

$$\max (\operatorname{diam} \psi(\widetilde{S}')) \leqslant \frac{n}{n+1} \max (\operatorname{diam} \widetilde{S}),$$

S' și S parcurgînd respectiv mulțimea tuturor simplexelor lui K și K'.

Demonstrație. Datorită lemei 4.1 și lemei 4.2, dacă S' și S sînt simplexe ale lui K', respectiv K, astfel încît $\psi(\widetilde{S}') \subset \widetilde{S}$ și dimensiunea lui S este m ($m \leqslant n$), atunci avem

$$\operatorname{diam} \psi(\widetilde{S}') \leqslant \frac{m}{m+1} \operatorname{diam} \widetilde{S} \leqslant \frac{n}{n+1} \max (\operatorname{diam} \widetilde{S}).$$

Propoziția 4.2. *Fie $\widetilde{K}$ un complex simplicial topologic de dimensiune n. Să definim un șir de complex $(\widetilde{K}^i)_{i=0,1,\ldots}$ și de omeomorfisme $(\psi_i)_{i=1,2,\ldots}$ astfel*

$$\widetilde{K}^0 = \widetilde{K},$$

$(\widetilde{K}^i, \psi_i)$ este subdiviziunea baricentrică a lui $\widetilde{K}^{i-1}$ pentru $i = 1, 2, \ldots$ Să punem $\varphi_i = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_{i-1} \circ \psi_i$.
Atunci avem:

$$\lim_{i \to \infty} \max \operatorname{diam} (\varphi_i(\widetilde{S}^i)) = 0,$$

unde S^i parcurge mulțimea tuturor simplexelor lui K^i.

Demonstrație. Utilizînd propoziția 4.1 și lemele 4.1 și 4.2 se demonstrează prin inducție că

$$\max (\operatorname{diam} \varphi_i(\widetilde{S}^i)) \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^i \max (\operatorname{diam} \widetilde{S}),$$

S și S^i parcurgînd respectiv mulțimea tuturor simplexelor lui K și K^i.

Teorema 4.1. (Teorema lui Sperner). *Fie $\widetilde{K}$ simplexul euclidian din spațiul R^n, ale cărui vîrfuri sînt punctele $p_0, \ldots, p_n$, unde p_i este punctul care are toate coordonatele nule, în afară de cea de rang i care este egală cu 1*). Fie pentru un anumit număr natural i complexul $\widetilde{K}^i$ și omeomorfismul φ_i din enunțul propoziției 4.2. Fie ν o aplicație a mulțimii vîrfurilor lui $\widetilde{K}^i$ în mulțimea întregilor nenegativi, avînd proprietatea următoare:*

(Δ) Dacă q este un vîrf al lui $\widetilde{K}^i$ și $\varphi_i(q)$ aparține simplexului deschis $(p_{i_0}, \ldots, p_{i_k})$, atunci $\nu(q)$ este unul din indicii $i_0, \ldots, i_k$.

Dacă $\widetilde{S}^i = [q_0, \ldots, q_l]$ este un simplex al lui $\widetilde{K}^i$, punem $\nu(\widetilde{S}^i) = \{\nu(q_0), \ldots, \nu(q_l)\}$.

În aceste condiții numărul ρ al simplexelor $\widetilde{S}^i$ astfel încît $\nu(\widetilde{S}^i) = \{0, 1, \ldots, n\}$ este impar.

Demonstrația se face prin inducție. Teorema este evidentă pentru $n = 0$, căci atunci $\widetilde{K} = \{p_0\}$, $\widetilde{K}^i = \{q_0\}$ și avem $\rho = 1$. Să presupunem că este adevărată pentru $n - 1$.

Fie $\mathcal{F}$ familia simplexelor $(n-1)$-dimensionale $\widetilde{S}^i$ ale lui $\widetilde{K}^i$ pentru care avem

$$\nu(\widetilde{S}^i) = \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

*) Este clar că complexul simplicial abstract corespunzător lui $\widetilde{K}$ este $K = \{p_0, \ldots, p_n\}$, împreună cu toate submulțimile sale.

și fie σ numărul simplexelor $\widetilde{S}^i$ astfel încît $\widetilde{S}^i \in \mathcal{F}$ și $\varphi_i(\widetilde{S}^i) \subset [p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}]$. Conform ipotezei inducției și a observației 4.1, numărul σ e impar.

Să numerotăm simplexele $\widetilde{S}^i$ ale lui $\widetilde{K}^i$ în așa fel încît $\widetilde{S}^i_1, \widetilde{S}^i_2, \ldots, \widetilde{S}^i_t$ să aibe dimensiunea n, iar $\widetilde{S}^i_{t+1}, \ldots, \widetilde{S}^i_m$ să aibe dimensiunea $< n$.

Pentru fiecare $j \leqslant t$, fie α_j numărul fețelor $\widetilde{S}^i_k$ ale lui $\widetilde{S}^i_j$ astfel încît $\widetilde{S}^i_k \in \mathcal{F}$. Există trei posibilități:

1°. Dacă $\nu(\widetilde{S}^i_j) = \{0, \ldots, n\}$, atunci $\alpha_j = 1$.
2°. Dacă $\{0, \ldots, n-1\} \subset \nu(\widetilde{S}^i_j) \neq \{0, \ldots, n\}$, atunci $\alpha_j = 2$.
3°. Dacă $\{0, \ldots, n-1\} \not\subset \nu(\widetilde{S}^i_j)$, atunci $\alpha_j = 0$.

În orice caz,

$$\rho \equiv (\alpha_1 + \ldots + \alpha_t) \pmod 2.$$

Este însă clar că fiecare $\widetilde{S}^i_k \in \mathcal{F}$ este conținut în unul sau în două dintre simplexele $\widetilde{S}^i_1, \ldots, \widetilde{S}^i_t$, după cum $\varphi_i(\widetilde{S}^i_k) \subset [p_0, \ldots, p_{n-1}]$ sau $\varphi_i(\widetilde{S}^i_k) \not\subset [p_0, \ldots, p_{n-1}]$.

Avem deci

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_t \equiv \sigma \pmod 2,$$

deci, în definitiv,

$$\rho \equiv \sigma \pmod 2,$$

adică ρ este impar.

COROLARUL 4.1. *Fie $\widetilde{K}$ simplexul euclidian din enunțul teoremei 4.1 și $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ o familie de submulțimi închise ale lui $\widetilde{K}$ astfel încît pentru orice submulțime $\{i_0, \ldots, i_k\}$ a lui $\{0, \ldots, n\}$ avem*

$$[p_{i_0}, \ldots, p_{i_k}] \subset A_{i_0} \cup \ldots \cup A_{i_k}.$$

În aceste condiții, avem

$$A_0 \cap \ldots \cap A_n = \varnothing.$$

Demonstrație. Fie r un întreg pozitiv. Conform propoziției 4.2, există un număr natural $i(r)$ astfel încît, în notațiile acelei propoziții, să avem

$$\max \operatorname{diam} (\varphi_{i(r)}(\widetilde{S}^{i(r)})) < \frac{1}{r} \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{26}$$

unde $\widetilde{S}^{i(r)}$ parcurge mulțimea tuturor simplexelor lui $\widetilde{K}^{i(r)}$. Vom defini o aplicație ν a mulțimii vîrfurilor lui $\widetilde{K}^{i(r)}$ în mulțimea întregilor nenegativi în modul următor: fie q un vîrf al lui $\widetilde{K}^{i(r)}$; există o mulțime unic

determinată de indici, $\{i_0, \ldots, i_k\}$, astfel încît $\varphi_{i(r)}(q)$ să aparţină simplexului *deschis* $(p_{i_0}, \ldots, p_{i_k})$. Conform ipotezei, există printre mulţimile $A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}$ cel puţin una, A_{i_h}, care conţine pe $\varphi_{i(r)}(q)$. Punem

$$\nu(q) = i_h .$$

Avem deci $\varphi_{i(r)}(q) \in A_{\nu(q)}$ şi, în plus, proprietatea (Δ) din enunţul teoremei 4.1 este satisfăcută. Există prin urmare un simplex $\widetilde{S}^{i(r)} = [q_0^r, \ldots, q_n^r]$ al lui $\widetilde{K}^{i(r)}$ astfel încît

$$\nu(q_j^r) = j \qquad (j = 0, \ldots, n).$$

Avem deci $\varphi_{i(r)}(q_j^r) \in A_j$.

Întrucît $\widetilde{K}$ este un spaţiu compact, putem presupune că şirul $(\varphi_{i(r)}(q_0^r))_{r=1,2,\ldots}$ este convergent. Fie

$$a = \lim_{r\to\infty} \varphi_{i(r)}(q_0^r).$$

Datorită relaţiei (26), avem şi

$$a = \lim_{r\to\infty} \varphi_{i(r)}(q_j^r) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Fiecare A_j fiind închis, deducem $a \in A_j$ $(j = 0, \ldots, n)$ deci, în definitiv,

$$a \in A_0 \cap \ldots \cap A_n .$$

TEOREMA 4.2. (Teorema de punct fix a lui Brouwer). Fie $S = [p_0, \ldots, p_n]$ *un simplex euclidian şi* f *o aplicaţie continuă a lui* S *în el însuşi. Există atunci cel puţin un punct fix al lui* f, *adică un punct* $x_0 \in S$ *astfel încît* $f(x_0) = x_0$.

Demonstraţie. Vom nota cu $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_n(x)$ coordonatele baricentrice ale lui x şi cu $\mu_0(x), \ldots, \mu_n(x)$ coordonatele baricentrice ale lui $f(x)$. Fie, pentru $0 \leqslant i \leqslant n$,

$$A_i = \{ x \mid x \in S,\ \lambda_i(x) \geqslant \mu_i(x) \}.$$

Din continuitatea lui f, rezultă imediat că fiecare A_i este închisă.

Fie $\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ o submulţime oarecare a lui $\{0, 1, \ldots, n\}$. Să presupunem că ar exista un punct $x \in [p_{i_0}, \ldots, p_{i_k}]$ astfel încît $x \notin A_{i_0} \cup \ldots \cup A_{i_k}$. Avem atunci

$$\lambda_{i_0}(x) < \mu_{i_0}(x), \ldots, \lambda_{i_k}(x) < \mu_{i_k}(x).$$

Adunînd aceste inegalităţi, obţinem

$$\lambda_{i_0}(x) + \ldots + \lambda_{i_k}(x) < \mu_{i_0}(x) + \ldots + \mu_{i_k}(x).$$

Dar primul membru al acestei inegalităţi este egal cu 1, căci $x \in S$, iar membrul al doilea nu poate fi > 1, deci inegalitatea este imposibilă.

Putem așadar aplica corolarul 4.1 : există un punct $x_0 \in S$, astfel încît

$$x_0 \in A_0 \cap \ldots \cap A_n$$

adică

$$\lambda_0(x_0) \geqslant \mu_0(x_0), \ldots, \lambda_n(x_0) \geqslant \mu_n(x_0).$$

Dacă printre aceste inegalități ar exista măcar una strictă, am deduce prin adunare

$$\lambda_0(x_0) + \ldots + \lambda_n(x_0) > \mu_0(x_0) + \ldots + \mu_n(x_0),$$

ceea ce este imposibil, deoarece ambii membri sînt egali cu 1. Avem deci

$$\lambda_0(x_0) = \mu_0(x_0), \ldots, \lambda_n(x_0) = \mu_n(x_0),$$

adică $f(x_0) = x_0$.

COROLARUL **4.2.** *Fie B^n bila cu centrul în origine și cu raza 1 în R^n. Nu există nici o aplicație continuă f a lui B^n în S^{n-1} astfel încît $f(x) = x$ pentru orice $x \in S^{n-1}$.*

Demonstrație. Să presupunem că ar exista $f: B^n \to S^{n-1}$ astfel încît $f(x) = x$, $(x \in S^{n-1})$. Întrucît B^n este omeomorfă cu un simplex euclidian n-dimensional, aplicația continuă $\varphi: B^n \to B^n$ definită prin

$$\varphi(x) = -f(x) \qquad (x \in B^n)$$

are cel puțin un punct fix $x_0 \in B^n$, datorită teoremei 4.2 :

$$x_0 = \varphi(x_0) = -f(x_0).$$

De aici deducem

$$|x_0| = |-f(x_0)| = 1,$$

deci $x_0 \in S^{n-1}$, ceea ce ar contrazice ipoteza că $f(x) = x$ pentru orice $x \in S^{n-1}$.

COROLARUL **4.3.** *Dacă S^n este sfera unitate în spațiul R^n, atunci nu există nici o aplicație continuă F a lui $S^n \times [0,1]$ în S^n astfel încît*

$$F(x, 0) = x, \; F(x, 1) = \text{constant} \quad (x \in S^n).$$

Demonstrație. Să presupunem că ar exista $F: S^n \times [0,1] \to S^n$ astfel încît

$$F(x, 0) = x, \quad F(x, 1) = x_0 \quad (x \in S^n).$$

Fiecare punct y al lui B^{n+1}, diferit de origine, se poate scrie unic sub forma

$$y = tx \text{ cu } x \in S^{n-1}, \; 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Definim o aplicație continuă f a lui B^{n+1} în S^n prin

$$f(tx) = F(x, 1-t),\ x \in S^{n-1},\ 0 < t \leqslant 1$$

$$f(0) = x_0.$$

Dar aplicația f contrazice corolarul 4.2, căci $f(x) = x$ pentru orice $x \in S^n$.

LEMA 4.3. *Fie I^n cubul din spațiul R^n definit prin*

$$I^n = \{(x_1, \ldots, x_n) |\ |x_i| \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Fie C_i fața lui I^n determinată de ecuația $x_i = 1$ și C_i' fața opusă. Dacă B_i este o mulțime închisă care separă pe C_i și C_i' $(i = 1, \ldots, n)$, atunci

$$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n \neq \varnothing.$$

Demonstrație. Conform ipotezei, există pentru orice i, $1 \leqslant i \leqslant n$, mulțimi U_i și U_i' deschise în $I^n - B_i$, deci și în I^n, astfel încît

$$I^n - B_i = U_i \cup U_i',\ U_i \cap U_i' = \varnothing$$

$$C_i \subset U_i,\ C_i' \subset U_i'.$$

Pentru orice $x \in I^n$, fie $v(x)$ vectorul cu originea în punctul x și avînd drept componentă de ordin i valoarea

$$\pm\, \mathrm{d}(x, B_i),$$

unde $\mathrm{d}(x, B_i)$ înseamnă ca de obicei distanța între punctul x și mulțimea B_i, iar semnul este $+$ sau $-$ după cum $x \in U_i'$ sau $x \in U_i$. Fie $f(x)$ extremitatea vectorului $v(x)$. Avem $f(x) \in I^n$ pentru $x \in I^n$ și f este o aplicație continuă a lui I^n în el însuși. În baza teoremei 4.1, aplicată lui I^n care e omeomorf cu B^n, există cel puțin un punct $x_0 \in I^n$ astfel încît

$$f(x_0) = x_0.$$

Aceasta implică că

$$\mathrm{d}(x_0, B_i) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Prin urmare

$$B_1 \cap \ldots \cap B_n \neq \varnothing.$$

TEOREMA 4.3. *Spațiul euclidian cu n dimensiuni R^n are dimensiunea n.*

Demonstrație. Să presupunem că $\dim I^n \leqslant n - 1$. Conform propoziției 2.2, există atunci n mulțimi închise B_i astfel încît fiecare dintre ele separă o pereche de fețe opuse ale cubului și

$$B_1 \cap \ldots \cap B_n = \varnothing.$$

Aceasta contrazice însă lema 4.3. Rezultă că dim $I^n \geqslant n$, deci, în baza teoremei 1.3, avem și

$$\dim R^n \geqslant n.$$

Pe de altă parte, este clar că dim $R^1 \leqslant 1$, căci fiecare punct al lui R^1 are vecinătăți arbitrar de mici a căror frontieră este compusă din două puncte izolate. Printr-o aplicare repetată a teoremei 2.2 obținem

$$\dim R^n = \dim \underbrace{(R^1 \times \ldots \times R^1)}_{\text{de } n \text{ ori}} \leqslant n.$$

COROLARUL 4.4. *Cubul cu n dimensiuni I^n are dimensiunea n.*

Demonstrație. În cursul demonstrației teoremei 4.3 s-a arătat că dim $I^n \geqslant n$; pe de altă parte, $I^n \subset R^n$, deci dim $I^n \leqslant n$.

DEFINIȚIE 4.6. Fie (x^1, x^2) și (y^1, y^2) două perechi ordonate de puncte în R^n. Dacă axele de coordonate sînt în poziție generală, adică nici o paralelă la un hiperplan de coordonate nu conține mai mult de un punct x^1 sau x^2 sau mai mult decît un punct y^1 sau y^2, atunci spunem că (x^1, x^2) și (y^1, y^2) sînt *așezate asemenea* dacă pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ numerele reale $x_i^1 - x_i^2$ și $y_i^1 - y_i^2$ au același semn, x_i și y_i fiind coordonatele lui x și y.

Dacă $X = \{x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots\}$ și $Y = \{y^1, \ldots, y^i, \ldots\}$ sînt două șiruri, este totdeauna posibil să alegem axele de coordonate în poziție generală, adică astfel încît nici o paralelă la un hiperplan de coordonate să nu conțină mai mult de un punct x sau un punct y, căci această condiție exclude o mulțime cel mult numărabilă de direcții. Dacă axele sînt în poziție generală, spunem că X și Y sînt *așezate asemenea* dacă pentru orice pereche de indici μ_1, μ_2, perechile ordonate (x^{μ_1}, x^{μ_2}) și (y^{μ_1}, y^{μ_2}) sînt așezate asemenea.

LEMA 4.4. *Dacă A și B sînt două mulțimi numărabile dense în R^n și axele de coordonate sînt în poziție generală față de A și B, atunci A și B pot fi rearanjate în șiruri așezate asemenea.*

Demonstrație. Să presupunem că A și B sînt ordonate în mod arbitrar:

$$A = \{a^1, \ldots, a^i, \ldots\},$$
$$B = \{b^1, \ldots, b^i, \ldots\}.$$

Vom defini inductiv două șiruri

$$C = \{c^1, \ldots, c^i, \ldots\}$$
$$D = \{d^1, \ldots, d^i, \ldots\}$$

care sînt așezate asemenea și sînt rearanjări ale lui A, respectiv B. Fiecare pas al inducției va comporta alegerea: 1) a unui element al lui C din A; 2) a unui element al lui D din B; 3) a altui element al lui D din B; 4) a unui element al lui C din A.

Punem $c^1 = a^1$ și $d^1 = b^1$, apoi luăm $d^2 = b^2$ și $c^2 = a^\sigma$, unde σ este cel mai mic întreg astfel încît (c^1, a^σ) și (d^1, d^2) sînt așezate asemenea (c^2 există fiindcă A e densă în R^n).

Să presupunem că $c^1, \ldots, c^{2^j}$ și $d^1, \ldots, d^{2^j}$ au fost astfel construiți încît sînt așezați asemenea. Să notăm prin c^{2^j+1} primul a care nu a apărut încă printre $c^1, \ldots, c^{2^j}$ și prin d^{2^j+1} primul b astfel încît $c^1, \ldots, c^{2^j}, c^{2^j+1}$ și $d^1, \ldots, d^{2^j+1}$ sînt așezați asemenea (d^{2^j+1} există fiindcă B e densă în R^n). În sfîrșit, să notăm prin d^{2^j+2} primul b care nu a apărut încă printre $d^1, \ldots, d^{2^j}, d^{2^j+1}$ și prin c^{2^j+2} primul a astfel încît $c^1, \ldots, c^{2^j}, c^{2^j+1}, c^{2^j+2}$ și $d^1, \ldots, d^{2^j}, d^{2^j+1}, d^{2^j+2}$ sînt așezate asemenea (c^{2^j+2} există fiindcă A e densă în R^n). Aceasta termină inducția.

PROPOZIȚIA **4.3.** *Fie A și B două submulțimi ale lui R^n, numărabile și dense în R^n. Atunci există un omeomorfism al lui R^n pe el însuși care aplică mulțimea A pe mulțimea B.*

Demonstrație. Datorită lemei 4.4, putem considera că mulțimile A și B sînt așezate asemenea. Vom dovedi că există un omeomorfism $\bar{f}$ al lui R^n pe el însuși care prelungește corespondența biunivocă

$$f : a^i \longleftrightarrow b^i,$$

unde $A = \{a^1, \ldots, a^i, \ldots\}$ și $B = \{b^1, \ldots, b^i, \ldots\}$.

Fie $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un punct arbitrar din R^n, care nu aparține lui A. Vom defini pe

$$y = \bar{f}(x),$$

definind coordonatele $y_1, \ldots, y_n$ ale lui y. Punctele lui A se împart în două clase disjuncte: o clasă este formată din acele puncte a căror coordonată de ordin k este $\leqslant x_k$, cealaltă din punctele a căror coordonată de ordin k este $> x_k$. Corespondența biunivocă f asociază acestei descompuneri a lui A o descompunere a lui B în două clase disjuncte. Această descompunere a lui B induce la rîndul ei o descompunere în două clase disjuncte a mulțimii K a tuturor coordonatelor de ordin k ale punctelor din B. Întrucît A și B sînt așezate asemenea, această descompunere a lui K are proprietatea că fiecare element al unei clase este mai mic decît fiecare element al celeilalte clase, așa încît, K fiind densă pe dreapta reală, avem de-a face cu o tăietură în sensul lui Dedekind, care definește un număr real bine determinat. Luăm acest număr real drept y_k. Se arată, fără dificultate, că aplicația $\bar{f}$ astfel construită este un omeomorfism al lui R^n pe el însuși.

LEMA **4.5.** *Dacă $\mathcal{M}_m^n$ este submulțimea lui R^n formată din punctele care au cel mult m coordonate raționale, atunci*

$$\dim \mathcal{M}_m^n \leqslant m.$$

Demonstrația se face exact la fel ca demonstrația propoziției 3.2.

TEOREMA 4.4. *Condiția necesară și suficientă ca o submulțime N a lui R^n să aibă dimensiunea egală cu n, este ca N să conțină o submulțime nevidă deschisă în R^n.*

Demonstrație. Condiția este suficientă. Într-adevăr, fie D o submulțime deschisă în R^n astfel încît

$$\varnothing \neq D \subset N.$$

Dacă $p \in D$, există o bilă deschisă B^n cu centrul în p și astfel încît

$$B^n \subset D \subset N.$$

Dar B^n este omeomorfă cu R^n, deci, în virtutea teoremei 4.3, dim $B^n = n$, deci și dim $N = n$.

Reciproc, să presupunem că dim $N = n$. Dacă $M = R^n - N$, trebuie să arătăm că mulțimea M *nu* este densă în R^n.

Să presupunem că M ar fi densă în R^n. Ca subspațiu al unui spațiu metric separabil, M este el însuși separabil, prin urmare există o submulțime numărabilă L a lui M, densă în M, deci și în R^n.

Conform propoziției 4.3, există un omeomorfism φ al lui R^n pe el însuși, astfel încît

$$\varphi(L) = \mathcal{P}^n,$$

unde $\mathcal{P}^n$ este submulțimea lui R^n formată din punctele care au toate coordonatele raționale. Dar $R^n - \mathcal{P}^n$ coincide cu mulțimea $\mathcal{M}^n_{n-1}$ a punctelor lui R^n care au cel mult $n-1$ coordonate raționale. În baza lemei 4.5 putem scrie

$$\dim (R^n - \mathcal{P}^n) \leqslant n - 1,$$

deci și

$$\dim (R^n - L) \leqslant n - 1.$$

De aici și din $R^n - M \subset R^n - L$ urmează că

$$\dim N = \dim (R^n - M) \leqslant n - 1,$$

ceea ce contrazice ipoteza că dim $N = n$. Rezultă că M nu este densă în R^n.

COROLARUL 4.5. *Condiția necesară și suficientă ca o submulțime N a unei varietăți topologice de dimensiune n *), să aibă dimensiunea n este ca N să conțină o submulțime nevidă deschisă în varietate.*

COROLARUL 4.6. *Fie U o submulțime deschisă a lui R^n care nu este nici vidă nici densă în R^n, și fie B frontiera lui U. Atunci* dim $B = n - 1$.

*) Prin varietate topologică de dimensiune n înțelegem un spațiu separat și conex, astfel încît fiecare punct al său are o vecinătate deschisă omeomorfă cu R^n.

Demonstrație. Avem dim $B \leqslant n - 1$ în virtutea teoremei 4.4, căci B nu conține nici o submulțime deschisă nevidă a lui R^n.

Vom arăta acum că nu putem avea dim $B \leqslant n - 2$.

Să presupunem mai întîi că U este mărginită. Fie $p \in U$. Dacă dim $B \leqslant n - 2$, am putea obține, printr-un proces de strîngere, vecinătăți oricît de mici ale lui p omeomorfe cu U, ale căror frontiere, omeomorfe cu B, ar avea dimensiunea $\leqslant n - 2$, ceea ce implică că $\dim_p R^n \leqslant \leqslant n - 1$. Întrucît R^n este omogen, aceasta ar însemna că dim $R^n \leqslant \leqslant n - 1$, contrar teoremei 4.3. Rezultă că dim $B = n - 1$.

Să presupunem acum că U nu e mărginit. Fie p un punct din interiorul lui $X - U$ și fie $\rho > 0$ astfel încît bila cu centrul în p și raza ρ, $S_\rho(p)$ este conținută în $X - U$.

Efectuăm o inversiune φ cu centrul în p și raza ρ. Aplicația φ este un omeomorfism al lui $R^n - \{p\}$ pe el însuși. Mulțimea

$$U' = \varphi(U)$$

este deschisă, nevidă și mărginită. În plus,

$$U' \subset S_\rho(p)$$

și $\mathcal{F}r\ U' - \{p\}$ este omeomorfă cu B. Din considerațiile de mai sus știm că dim $\mathcal{F}r\ U' = n - 1$.

Pe de altă parte, dimensiunea unui spațiu nevid nu poate fi mărită prin adăugarea unui singur punct, în baza corolarului 2.2. Urmează că și în acest caz dim $B = n - 1$.

Definiția 4.7. Fie X un spațiu topologic și A o submulțime a lui X. Se spune că A *disconectează* pe X dacă mulțimea $X - A$ este neconexă.

Propoziția 4.4. *Următoarele trei aserțiuni despre un spațiu topologic X sînt echivalente:*

(a) *X poate fi disconectat de o submulțime D de dimensiune $\leqslant m$.*

(b) *X conține o submulțime deschisă U care nu este nici vidă nici densă, și astfel încît* dim $\mathcal{F}r\ U \leqslant m$.

(c) $X = C_1 \cup C_2$, *unde C_1 și C_2 sînt submulțimi închise proprii ale lui X și* dim $(C_1 \cap C_2) \leqslant m$.

Demonstrație. (a) atrage pe (b). Într-adevăr, întrucît D disconectează pe X, avem

$$X - D = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \neq \varnothing, \quad U_2 \neq \varnothing$$

$$(U_1 \cap \overline{U}_2) \cap (\overline{U}_1 \cap U_2) = \varnothing \tag{27}$$

Vom distinge două cazuri:

1°. $X \neq \overline{X - D}$. Atunci interiorul lui D este nevid, deci se poate găsi o mulțime nevidă U, deschisă în X și astfel încît $\overline{U} \subset D$. Avem $\mathcal{F}r\ U \subset D$, deci dim $\mathcal{F}r\ U \leqslant m$, deci U satisface condițiile din (b).

2°. $X = \overline{X - D} = U_1 \cup \overline{U}_2$. Să punem $U = X - \overline{U}_1$. Este clar că

$$U_2 \subset U \subset \overline{U}_2.$$

Rezultă că U nu e vid, și nu e nici dens, căci din (27) urmează că $\overline{U}_2 \neq X$. În plus,

$$\mathcal{F}r\, U \subset U_2 - U_2 \subset D,$$

deci dim $\mathcal{F}r\, U \leqslant m$.

(b) atrage (c), căci dacă U e o mulțime care satisface condițiile din (b), atunci mulțimile $C_1 = \overline{U}$, $C_2 = X - U$ satisfac condițiile din (c).

(c) atrage pe (a), întrucît, dacă C_1 și C_2 sînt mulțimi care satisfac condițiile din (c), atunci mulțimea $D = C_1 \cap C_2$ satisface condițiile din (a).

TEOREMA 4.5. *R^n nu poate fi disconectat de o submulțime de dimensiune $\leqslant n - 2$.*

Demonstrație. Dacă R^n ar fi disconectat de o submulțime de dimensiune $\leqslant n - 2$, atunci — în virtutea propoziției 4.4. — R^n ar conține o submulțime deschisă U, care nu este nici vidă, nici densă, și astfel încît dim $\mathcal{F}r\, U \leqslant n - 2$. Dar aceasta contrazice corolarul 4.6.

COROLARUL 4.7. *Dacă X este o varietate topologică conexă, X nu poate fi disconectată de o submulțime de dimensiune $\leqslant n - 2$.*

Demonstrație. Să presupunem că există $D \subset X$ astfel încît

$$X - D = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \neq \varnothing, \quad U_2 \neq \varnothing,$$
$$(U_1 \cap \overline{U}_2) \cup (\overline{U}_1 \cap U_2) = \varnothing,$$
$$\dim D \leqslant n - 2.$$

În conformitate cu corolarul 4.5, D nu conține nici o mulțime deschisă nevidă. Rezultă că avem

$$X = \overline{X - D} = \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2,$$

cu $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \neq \varnothing$, căci X e conex. Fie $p \in \overline{U}_1 \cap \overline{U}_2$ și U o vecinătate a lui p în X omeomorfă cu R^n. Se vede cu ușurință că U este disconectată de $D \cap U$, ceea ce contrazice teorema 4.5.

COROLARUL 4.8. *I^n nu poate fi disconectat de o submulțime de dimensiune $\leqslant n - 2$.*

Demonstrație. Fie D o submulțime a lui I^n de dimensiune $\leqslant n - 2$. Dacă $\overset{\circ}{I}{}^n$ este interiorul lui I^n, $\overset{\circ}{I}{}^n$ e omeomorf cu R^n, deci $\overset{\circ}{I}{}^n - D$ este conexă. Dar din relația

$$I^n - D = \overline{\overset{\circ}{I}{}^n - D}$$

rezultă că și $I^n - D$ este conexă.

DEFINIȚIA 4.8. Fie X un spațiu topologic și A o submulțime închisă a lui X. Se zice că A este *nicăieri disconectantă* în X, dacă pentru orice submulțime deschisă și conexă U a lui X, mulțimea $U - A$ este conexă.

LEMA 4.6. *Fie X un spațiu topologic local conex și A o submulțime închisă a lui X astfel încît* Int $A = \varnothing$. *O condiție necesară și suficientă pentru ca A să fie nicăieri disconectantă în X este ca fiecare punct $p \in X$ să posede un sistem fundamental de vecinătăți deschise conexe $\mathcal{V}_p$ astfel încît pentru orice $V \in \mathcal{V}_p$, mulțimea $V - A$ să fie conexă.*

Demonstrație. Necesitatea condiției este evidentă. Pentru a demonstra suficiența, să presupunem că fiecare $p \in X$ posedă un sistem fundamental de vecinătăți $\mathcal{V}_p$ cu proprietățile din enunț și fie U o submulțime deschisă conexă arbitrară a lui X.

Să presupunem că $U - A$ nu este conexă. Există atunci două mulțimi G_1 și G_2, deschise în $U - A$, deci și în X, astfel încît

$$U - A = G_1 \cup G_2, \qquad G_1 \cap G_2 = \varnothing.$$

$$G_1 \neq \varnothing, \quad G_2 \neq \varnothing.$$

În plus, din Int $A = \varnothing$ rezultă

$$U = (G_1 \cap U) \cup (\overline{G}_2 \cap U).$$

Mulțimile $\overline{G}_1 \cap U$ și $\overline{G}_2 \cap U$ nu sînt disjuncte, căci altfel U nu ar fi conexă. Fie

$$p \in \overline{G}_1 \cap G_2 \cap U.$$

Fie $V \in \mathcal{V}_p$ astfel încît $V \subset U$. Atunci avem :

$$V - A = (G_1 \cap V) \cup (G_2 \cap V),$$

$$(G_1 \cap V) \cap (G_2 \cap V) = \varnothing$$

$$G_1 \cap V \neq \varnothing, \quad G_2 \cap V \neq \varnothing,$$

și $G_1 \cap V$ și $G_2 \cap V$ sînt deschise în $V - A$.

Rezultă că $V - A$ nu este conexă, ceea ce este absurd. Deducem că $U - A$ este conexă, deci A este nicăieri disconectantă în X.

TEOREMA 4.6. *Fie A o submulțime închisă a spațiului R^n. O condiție suficientă ca A să fie nicăieri disconectantă în R^n este ca* dim $A \leqslant n - 2$.

Demonstrație. Pentru orice $p \in R^n$, luăm ca sistem fundamental de vecinătăți $\mathcal{V}_p$ mulțimea bilelor deschise cu centrul în p. Fiecare $V \in \mathcal{V}_p$ este omeomorf cu R^n, deci, în conformitate cu teorema 4.5, mulțimea $V - A$ este conexă. Pe de altă parte, din teorema 4.4 rezultă că Int $A = \varnothing$. Putem deci aplica lema 4.6 pentru a conchide că mulțimea A este nicăieri disconectantă în R^n.

PROPOZIȚIA 4.5. *Fie A o submulțime compactă a lui R^n și x un punct al lui A. Condiția necesară și suficientă ca punctul x să aparțină frontierei lui A este ca x să aibă vecinătăți arbitrar de mici U în A astfel încît orice aplicație continuă a lui $A - U$ în S^{n-1} să poată fi extinsă la întreg A.*

Demonstrație. Condiția este necesară. Fie $x \in \mathcal{F}r\, A$, $S(x)$ o bilă cu centrul în x și $U = A \cap S(x)$.

Fie B frontiera lui $S(x)$, care este omeomorfă cu S^{n-1}. În conformitate cu corolarul 3.1, orice aplicație continuă

$$f : A - U \to S^{n-1}$$

poate fi extinsă la o aplicație

$$\bar{f} : (A - U) \cup B \to S^{n-1}.$$

Fie $q \in S(x) - A$. Pentru orice $x \in A$, fie x' proiecția lui x pe B din q. Definim

$$F(x) = \bar{f}(x'), \quad x \in U$$
$$F(x) = f(x), \quad x \in A - U$$

F este extinderea căutată.

Condiția este suficientă. Să presupunem că x aparține interiorului lui A. Fie $S(x)$ o bilă deschisă cu centrul în x și cu aderența conținută în A. Vom arăta că pentru orice vecinătate U a lui x astfel încît

$$U \subset S(x),$$

există o aplicație continuă a lui $A - U$ în S^{n-1} care nu poate fi extinsă la întreg A. Identificăm pe S^{n-1} cu frontiera lui $S(x)$ și luăm ca aplicație f proiecția lui $A - U$ pe S^{n-1} din x. Dacă f ar putea fi extinsă la întreg A, am obține o aplicație a lui $S(x)$ pe frontiera sa care lasă fixe punctele de pe frontiera sa, ceea ce ar contrazice corolarul 4.2.

TEOREMA 4.7. (Teorema lui Brouwer de invarianță a domeniului). *Fie A o submulțime arbitrară a lui R^n și h un omeomorfism al lui A pe o altă submulțime $h(A)$ a lui R^n. Dacă x aparține interiorului lui A, atunci $h(x)$ aparține interiorului lui $h(A)$. În particular, dacă A și B sînt două submulțimi omeomorfe ale lui R^n și A este deschisă, atunci și B este deschisă.*

Demonstrație. Întrucît spațiul R^n este regulat, putem găsi o vecinătate relativ compactă V a lui x astfel încît

$$\overline{V} \subset A.$$

Întrucît propoziția 4.5 dă o caracterizare intrinsecă a punctelor interioare ale unei submulțimi compacte a lui R^n, se vede imediat că punctul $h(x)$ este punct interior al mulțimii $h(V)$, deci și al mulțimii $h(A)$.

COROLARUL 4.9. *Teorema 4.7 rămîne adevărată dacă spațiul R^n este înlocuit cu o varietate topologică oarecare.*

Demonstrația rezultă imediat din propoziția 4.5 și din faptul că orice punct al varietății posedă o vecinătate omeomorfă cu R^n.

COROLAR 4.10. (Teorema invarianței dimensiunii spațiilor euclidiene). *Spațiile R^n și R^m nu sînt omeomorfe decît dacă $n = m$.*

Demonstrație. Este suficient, dacă $n > m$, să considerăm pe R^m ca subspațiu al lui R^n.

Submulțimea R^m nu este deschisă în R^n, pe cînd spațiul total R^n este evident, o mulțime deschisă. Conform teoremei 4.7, nu poate exista nici un omeomorfism al lui R^m pe R^n.

§ 5. Teorema de separare a lui Jordan

DEFINIȚIA 5.1. O aplicație continuă a unui spațiu X într-un spațiu Y se numește *neesențială* dacă este omotopă *) cu o aplicație constantă. O aplicație care nu este neesențială se numește *esențială.*

LEMA 5.1. *Orice aplicație continuă f a lui I^n într-un spațiu topologic oarecare Y este neesențială.*

Demonstrație. Fie $\varphi : I^n \times I \to I^n$ definită prin

$$\varphi(x, t) = (1 - t)\, x, \quad x \in I^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

unde $(1 - t)\, x$ înseamnă punctul din I^n care are coordonatele lui x multiplicate prin $(1 - t)$. Să definim o aplicație continuă h a lui $I^n \times I$ în Y prin:

$$h(x, t) = f(\varphi(x, t)), \quad x \in I^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Atunci avem

$$h(x, 0) = f(x), \qquad x \in I^n$$

$$h(x, 1) = f(0), \qquad x \in I^n,$$

cu alte cuvinte aplicația f este omotopă cu aplicația constantă care duce tot spațiul I^n în punctul $f(0)$ al lui Y.

PROPOZIȚIA 5.1. *Fie X un spațiu metrizabil compact, C o submulțime închisă a lui X și f o aplicație continuă a lui C în S^n care nu poate fi extinsă la întreg spațiul X. Atunci există o submulțime închisă K a lui X avînd următoarele proprietăți:*

1° *f nu poate fi extinsă la $C \cup K$.*

2° *Dacă K' este o submulțime închisă proprie a lui K, atunci f poate fi extinsă la $C \cup K'$.*

*) Vezi definiția 5.3.

Demonstrație. Fie $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ familia de submulțimi închise ale lui X care au proprietatea că f nu poate fi extinsă la $C \cup K_\lambda$ pentru fiecare $\lambda \in \Lambda$. Această familie e nevidă, căci conține pe X. Fie $(K_i)_{i=1,2,\ldots}$ o subfamilie a familiei (K_λ) astfel încît

$$K_i \supset K_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Să presupunem că mulțimea

$$K^\circ = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$$

nu aparține familiei (K_λ). Aceasta înseamnă că aplicația f poate fi extinsă la $C \cup K^\circ$. În baza propoziției 3.5, există o mulțime deschisă U cu $U \supset C \cup K^\circ$ și o extindere a lui f la U. Există cel puțin un indice i_0 astfel încît

$$K_{i_0} \subset U,$$

căci altfel $K_i \cap (X - U) \neq \varnothing$, pentru orice $i = 1, 2, \ldots$, deci ar urma, avînd în vedere compacitatea lui $X - U$, că și $K^\circ \cap (X - U) \neq \varnothing$ ceea ce este imposibil. Dar ultima incluziune implică că f poate fi extinsă la $C \cup K_{i_0}$, ceea ce contrazice definiția familiei $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Conchidem că mulțimea K° aparține familiei (K_λ).

Putem deci aplica teorema de reducere a lui Brouwer *) pentru a deduce existența unei *mulțimi închise K satisfăcînd* condițiile 1° și 2° din enunț.

DEFINIȚIA 5.2. Pentru fiecare punct p din R^n, definim aplicația continuă

$$\pi_p : R^n - \{p\} \to S^{n-1}$$

astfel: pentru orice $x \in R^n - \{p\}$, $\pi_p(x)$ este proiecția punctului $x - p$ (în notație vectorială) din originea O pe S^{n-1}.

PROPOZIȚIA 5.2. *Fie U o submulțime deschisă mărginită a lui R^n, $p \in U$ și $C = \mathcal{F}r\, U$. Atunci restricția $\pi_p | C$ nu poate fi extinsă la $\overline{U} = U \cup C$.*

Demonstrație. Putem, fără a restrînge generalitatea, să presupunem că p este originea O.

Fie $r > 0$ suficient de mare ca bila $S_r(O)$ cu centrul în origine și raza r să conțină mulțimea $U \cup C$. Să presupunem că $\pi_0 | C$ poate fi extinsă la o aplicație continuă $\varphi : U \cup C \to S^{n-1}$. Atunci aplicația continuă definită prin

$$\psi(x) = \varphi(x) \text{ pentru } r\ x \in U$$

$$\psi(x) = \pi_0(x) \text{ pentru } r\ x \in S_r(O) - U$$

*) A se vedea anexa III.

este o aplicație a lui $S_1(O)$ pe frontiera sa S^{n-1} care menține punctele lui S^{n-1} fixe, ceea ce contrazice corolarul 4.2.

TEOREMA 5.1. *Fie C o submulțime compactă a lui R^n $(n \geqslant 2)$. Două puncte p și q care nu aparțin lui C, sînt separate de C dacă și numai dacă aplicațiile $\pi_p | C$ și $\pi_q | C$ nu sînt omotope.*

Demonstrație. Să presupunem că p și q sînt separate de C, adică există două mulțimi U și V deschise în $R^n - C$, deci și în R^n, astfel încît

$$R^n - C = U \cup V, \qquad U \cap V = \varnothing$$

$$p \in U, \quad q \in V.$$

Una din mulțimile U și V este mărginită. Într-adevăr, fie K^n un cub de dimensiune n astfel încît $C \subset K^n$; întrucît $R^n - K^n$ este o submulțime conexă a lui $R^n - C$, ea trebuie să fie conținută în una din mulțimile U și V, de exemplu în V. Urmează că $U \subset K^n$, adică U e mărginită.

Aplicația $\pi_q | C$ poate fi extinsă la $R^n - \{q\}$, care conține pe $U \cup C$. Cum $\mathcal{F}t\ U \subset C$, în conformitate cu propoziția 5.2, $\pi_p | C$ nu poate fi extinsă la $U \cup C$. În baza teoremei 3.1, aplicațiile $\pi_p | C$ și $\pi_q | C$ nu sînt omotope.

Reciproc, să presupunem că p și q nu sînt separate de C. Atunci, datorită unei proprietăți binecunoscute a spațiilor euclidiene, putem uni punctele p și q printr-un arc situat în $R^n - C$, adică putem găsi o aplicație continuă f a lui I în $R^n - C$ astfel încît

$$f(0) = p, \quad f(1) = q.$$

Aplicația continuă $h : C \times I \to S^{n-1}$ definită prin

$$h(x, t) = \pi_{f(t)}(x), \quad x \in C, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

realizează omotopia între $\pi_p | C$ și $\pi_q | C$.

TEOREMA 5.2. *Fie X o submulțime compactă a lui R^n și C o submulțime închisă a lui X. Condiția necesară și suficientă ca să existe o aplicație continuă f a lui C în S^{n-1} care să nu poată fi extinsă la întreg X este să existe o submulțime deschisă nevidă G a lui R^n astfel încît*

$$G \subset X - C \text{ și } \mathcal{F}t\ G \subset C.$$

Demonstrație. Condiția este necesară. Fie f o aplicație continuă a lui C în S^{n-1} care nu poate fi extinsă la X. Datorită propoziției 5.1, există o submulțime închisă K a lui X avînd următoarele proprietăți:

1° f nu poate fi extinsă la mulțimea $C \cup K$.

2° Dacă K' este o submulțime închisă proprie a lui K, atunci f poate fi extinsă la $C \cup K'$.

Din 1° deducem

$$K - C \neq \varnothing.$$

De asemenea

$$K - C \subset X - C.$$

Să arătăm acum că $K - C$ este deschisă. Conform propoziției 4.5, este suficient să demonstrăm că, dacă $s \in K - C$, atunci pentru orice vecinătate U a lui s în R^n astfel încît $\overline{U} \cap C = \varnothing$, se poate defini o aplicație continuă

$$\varphi : K - C - U \to S^{n-1}$$

care nu poate fi extinsă la $K - C$. Întrucît $K - U \neq K$, din 2° deducem că există o extindere F a lui f la mulțimea $C \cup (K - U) = (C \cup K) - U$. Restricția

$$\varphi = F \mid K - C - U$$

nu poate fi extinsă la $K - C$, căci dacă ψ ar fi o astfel de extindere, aplicația continuă H definită prin

$$H(x) = \psi(x), \quad x \in K - C$$

$$H(x) = F(x), \quad x \in C$$

ar fi o extindere a lui f la $C \cup K$, ceea ce ar contrazice condiția 1°. Rezultă că $K - C$ este deschisă.

Relația

$$\mathcal{F}t(K - C) \subset C$$

se demonstrează ușor. Putem deci lua $G = K - C$.

Condiția este suficientă. Într-adevăr, fie U o mulțime satisfăcînd condițiile din enunț și fie $B = \mathcal{F}t\, U$. Fiind conținută în mulțimea compactă X, U e mărginită. Fie $p \in U$. Conform propoziției 5.2, aplicația $\pi_p \mid B$ nu poate fi extinsă la mulțimea $U \cup B$; cum $B \subset C$ și $U \cup B \subset X$, rezultă că $\pi_p \mid C$ nu poate fi extinsă la întreg X.

TEOREMA 5.3. *O submulțime compactă C a lui R^n disconectează spațiul R^n dacă și numai dacă există o aplicație continuă esențială a lui C în S^{n-1}.*

Demonstrație. Condiția e necesară. Să presupunem că C disconectează spațiul R^n. Atunci există două puncte p și q care sînt separate de C. Conform teoremei 5.1, aplicațiile $\pi_p \mid C$ și $\pi_q \mid C$ nu sînt omotope, deci cel puțin una din ele este esențială.

Condiția este suficientă. Fie f o aplicație continuă esențială a lui C în S^{n-1}. Fie K^n un cub cu n dimensiuni în R^n astfel $C \subset K^n$. Nu există nici o extindere a lui f la K^n, căci, în caz contrar, aplicînd lema 5.1, se vede că f ar fi neesențială. În baza teoremei 5.2 există o submulțime nevidă U a lui $K^n - C$, deschisă în R^n și a cărei frontieră este conținută în C. U este atunci o submulțime proprie nevidă a lui $R^n - C$ care este

simultan închisă şi deschisă în $R^n - C$. Rezultă că C disconectează spaţiul R^n.

COROLARUL 5.1. *Dacă o mulţime compactă C disconectează spaţiul R^n, atunci orice submulţime a lui R^n omeomorfă cu C disconectează spaţiul R^n.*

Demonstraţie. Este suficient să se observe că teorema 5.3 dă o caracterizare intrinsecă a submulţimilor compacte care disconectează spaţiul R^n.

COROLARUL 5.2. (Teorema de separare a lui Jordan). *Orice submulţime a lui R^n care este omeomorfă cu S^{n-1} disconectează spaţiul R^n.*

Demonstraţia urmează imediat din corolarul 5.1.

COROLARUL 5.3. *Teorema 5.3 şi corolarul 5.1 şi 5.2 sînt adevărate cînd spaţiul R^n este înlocuit cu sfera S^n.*

Demonstraţie. Se vede uşor că dacă C disconectează spaţiul S^n, atunci C disconectează spaţiul $S^n - \{p\}$ pentru orice p care nu aparţine lui C, şi reciproc. Pe de altă parte, $S^n - \{p\}$ este omeomorf cu R^n.

§ 6. Dimensiunea în sensul lui Lebesgue

DEFINIŢIA 6.1. Prin *acoperire* a unui spaţiu topologic X vom înţelege o familie *finită* de submulţimi *deschise* $U_1, \ldots, U_r$ ale spaţiului X astfel încît

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} U_i.$$

Ordinul acoperirii este cel mai mare întreg n astfel încît există $n + 1$ mulţimi U_i care au intersecţie nevidă.

O acoperire (U_i) a spaţiului metric X se numeşte o ε-*acoperire*, ε fiind un număr real pozitiv, dacă diametrul fiecărei mulţimi U_i este $< \varepsilon$.

O acoperire $\beta = (V_j)$ se zice că este o rafinare a unei acoperiri $\alpha = (U_i)$ dacă fiecare V_j este conţinut într-un U_i.

LEMA 6.1. *Fie $X \in \mathcal{C}$ şi M o submulţime a lui X de dimensiune $\leqslant 0$. Fie U_1 şi U_2 două submulţimi deschise ale lui X, astfel încît $M \subset U_1 \cup U_2$. Atunci există două submulţimi deschise V_1 şi V_2 ale lui X astfel încît*

$$M \subset V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

$$V_1 \subset U_1, \quad V_2 \subset U_2.$$

Demonstraţie. Dacă $\dim M = -1$, adică $M = \varnothing$, lema este evidentă. Să presupunem că $\dim M = 0$. Putem presupune că

$$X = U_1 \cup U_2,$$

căci altfel am putea înlocui pe X cu $U_1 \cup U_2$. Atunci mulțimile

$$C_1 = X - U_2, \quad C_2 = X - U_1$$

sînt închise și disjuncte. În virtutea propoziției 2.1, există o mulțime închisă B care separă pe C_1 și C_2 și pentru care $M \cap B = \varnothing$. Există deci două mulțimi deschise V_1 și V_2 astfel încît

$$X - B = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing$$
$$C_1 \subset V_1, \quad C_2 \subset V_2.$$

Deducem din relațiile de mai sus

$$V_1 \subset U_1, \quad V_2 \subset U_2$$
$$M \subset V_1 \cup V_2.$$

LEMA 6.2. *Fie $X \in \mathcal{C}$ și M o submulțime a lui X avînd dimensiunea $\leqslant 0$. Fie $U_1, U_2, \ldots, U_r$ mulțimi deschise astfel încît*

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{r} U_i.$$

Atunci există mulțimi deschise $V_1, \ldots, V_r$ astfel încît

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{r} V_i, \qquad V_i \subset U_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$
$$V_i \cap V_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Demonstrația se face prin inducție asupra numărului mulțimilor U_i. Lema e evidentă dacă $r = 1$. Să presupunem că este adevărată pentru $r - 1$ și fie acum numărul mulțimilor U_i chiar r.

Fie

$$U'_{r-1} = U_{r-1} \cup U_r.$$

Mulțimile deschise $U_1, \ldots, U_{r-2}, U'_{r-1}$ acoperă pe M, deci — în baza ipotezei inducției — există o acoperire deschisă a lui M, $\{V_1, \ldots$ $\ldots, V_{r-2}, V'_{r-1}\}$, astfel încît

$$V_1 \subset U_1, \ldots, V_{r-2} \subset U_{r-2}, V'_{r-1} \subset U'_{r-1},$$

și $V_1, \ldots, V_{r-2}, V'_{r-1}$ sînt două cîte două disjuncte.

Întrucît

$$\dim (V'_{r-1} \cap M) \leqslant 0 \text{ și } V'_{r-1} \cap M \subset U_{r-1} \cup U_r,$$

conform lemei 6.1 există mulțimi deschise W_1 și W_2 astfel încît

$$V'_{r-1} \cap M \subset W_1 \cup W_2, \quad W_1 \cap W_2 = \varnothing$$
$$W_1 \subset U_{r-1}, \quad W_2 \subset U_r.$$

Punem :

$$V_{r-1} = W_1 \cap V'_{r-1}, \quad V_r = W_2 \cap V'_{r-1}.$$

Este acum suficient să luăm acoperirea $\{V_1, \ldots, V_{r-2}, V_{r-1}, V_r\}$ a lui M.

TEOREMA 6.1. *Fie $X \in \mathcal{C}$ un spațiu de dimensiune $\leqslant n$ și α o acoperire a lui X. Atunci există o rafinare β a lui α având ordinul $\leqslant n$.*

Demonstrație. Teorema este evidentă pentru $n = \infty$. Să presupunem că n e finit. Datorită teoremei 2.3,

$$X = A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1},$$

unde $\dim A_i \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n+1)$. Întrucît α este o acoperire pentru orice A_i, lema 6.2, ne permite să obținem $n+1$ familii de mulțimi deschise

$$\beta^i = (V_1^i, \ldots, V_{r(i)}^i) \qquad i = 1, \ldots, n+1$$

astfel încît β^i este o acoperire a lui A_i, fiecare element al lui β^i este conținut într-un element al lui α, și

$$V_j^i \cap V_k^i = \varnothing \quad \text{dacă } j \neq k.$$

Să considerăm acoperirea lui X

$$\beta = (V_j^i) \quad i = 1, \ldots, n+1$$
$$j = 1, \ldots, r(i).$$

Se vede imediat că orice subfamilie de $n+2$ elemente ale lui β conține două elemente ale uneia din familiile β^i, deci au intersecție vidă. Aceasta înseamnă că β are ordinul $\leqslant n$. Pe de altă parte, β este o rafinare a lui α.

COROLARUL 6.1. *Fie X un spațiu metric compact de dimensiune $\leqslant n$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există o ε-acoperire a lui X având ordinul $\leqslant n$.*

Demonstrație. Să considerăm familia tuturor bilelor deschise din spațiul X de rază $\frac{\varepsilon}{2}$. X fiind compact, putem extrage o subfamilie finită care este o acoperire a lui X. Este suficient acum să aplicăm teorema 6.1 acestei acoperiri.

DEFINIȚIA 6.2. Fie X un spațiu metric compact și ε un număr real pozitiv. O aplicație continuă g a lui X într-un spațiu topologic Y se numește *ε-aplicație* dacă pentru orice $y \in g(X)$ avem

$$\operatorname{diam}(g^{-1}(y)) < \varepsilon.$$

LEMA 6.3. *Fie X un spațiu metric compact. Dacă g este o $\frac{1}{i}$ - aplicație a lui X într-un spațiu separat Y pentru orice număr natural i, atunci g e o injecție topologică a lui X în Y, și reciproc.*

Demonstrație. Dacă g este $\frac{1}{i}$-aplicație pentru orice i, atunci g trebuie să fie biunivocă și se știe că orice aplicație continuă biunivocă a unui spațiu compact într-un spațiu separat este o injecție topologică.

DEFINIȚIA 6.3. Fie X un spațiu topologic și Y un spațiu metric compact. Vom nota prin $\mathcal{C}(X, Y)$ spațiul metric al tuturor aplicațiilor continue ale lui X și Y, metrica fiind definită prin

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)), \qquad (f, g \in \mathcal{C}(X, Y)).$$

LEMA 6.4. *Spațiul metric $\mathcal{C}(X, Y)$ este complet.*

Demonstrație. Fie $(f_n)_{n=1,2,\ldots}$ un șir Cauchy în $\mathcal{C}(X, Y)$. Pentru orice $x \in X$, șirul $(f_n(x))_{n=1,2,\ldots}$ este un șir Cauchy în Y, care este compact, deci complet. Rezultă că șirul $(f_n(x))$ are o limită, pe care s-o notăm cu $f(x)$. Observăm că, fiind dat $\varepsilon > 0$, există un număr natural N_ε, astfel încît $n > N_\varepsilon$ implică

$$d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon \text{ pentru orice } x \in X.$$

Într-adevăr, este suficient să alegem pe N_ε astfel încît $n > N_\varepsilon$ și $p > N_\varepsilon$ să implice

$$d(f_n(x), f_p(x)) \leqslant \varepsilon \text{ pentru orice } x \in X,$$

ceea ce este posibil ținînd seama că (f_n) e un șir Cauchy. Întrucît mulțimea

$$\{y \mid y \in Y,\ d(f_n(x), y) \leqslant \varepsilon\}$$

este închisă și $f_p(x)$ tinde către $f(x)$ cînt $p \to \infty$, rezultă că N_ε satisface condiția cerută.

Avînd în vedere această observație și inegalitatea

$$d(f(x), f(x')) \leqslant d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x')) + \\ + d(f_n(x'), f(x')),$$

deducem că, dacă x' e suficient de apropiat de x, $d(f(x), f(x'))$ este oricît de mic, adică $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

Pe de altă parte, șirul (f_n) converge în $\mathcal{C}(X, Y)$ către f.

LEMA 6.5. *Fie X un spațiu metric compact și $\varepsilon > 0$. Mulțimea $G(\varepsilon)$ a tuturor ε-aplicațiilor ale lui X într-un spațiu metric compact Y este deschisă în $\mathcal{C}(X, Y)$.*

Demonstrație. Fie $g \in G(\varepsilon)$ și fie

$$\eta = \inf d(g(x), g(x'))$$
$$d(x, x') \geqslant \varepsilon$$

Din compactitatea lui X rezultă că există o pereche $x,\ x' \in X$ astfel încît $d(x, x') \geqslant \varepsilon$ și $\eta = d(g(x), g(x'))$; prin urmare $\eta > 0$, căci altfel g nu ar fi o ε-aplicație. Orice aplicație continuă f astfel încît

$$d(f, g) < \frac{\eta}{2}$$

aparține lui $G(\varepsilon)$. Într-adevăr, dacă x și x' sînt astfel încît $f(x) = f(x')$, atunci $d(g(x), g(x')) < \eta$, ceea ce implică că $d(x, x') < \varepsilon$.

PROPOZIȚIA 6.1. *Fie X un spațiu metric compact, astfel încît* $\dim X \leqslant n$ *(n finit). Pentru orice număr pozitiv ε, fie $G(\varepsilon)$ mulțimea ε-aplicațiilor lui X în I^{2n+1}. Atunci $G(\varepsilon)$ este densă în spațiul $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$.*

Demonstrație. Fie $f \in \mathcal{C}(X, I^{2n+1})$ și $\eta > 0$. Vom construi o aplicație $g \in \mathcal{C}(X, I^{2n+1})$ astfel încît

$$d(f, g) < \eta.$$

$$g \in G(\varepsilon).$$

Orice funcție continuă pe un spațiu compact este uniform continuă. Există deci un număr $\delta < \varepsilon$ astfel încît relația

$$d(x, x') < \delta$$

să implice

$$d(f(x), f(x')) < \frac{\eta}{2}.$$

Datorită corolarului 6.1 putem găsi o acoperire $\beta = (U_i)_{i=1, \ldots, r}$ a lui X, avînd ordinul $\leqslant n$ și astfel încît

$$\operatorname{diam} U_i < \delta \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Urmează că

$$\operatorname{diam} f(U_i) < \frac{\eta}{2} \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{28}$$

Să alegem acum punctele $p_1, \ldots, p_r$ în I^{2n+1} astfel încît

$$d(p_i, f(U_i)) < \frac{\eta}{2} \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{29}$$

și p_i sînt în poziție generală în R^{2n+1}, adică nici o submulțime de $m + 2$ dintre punctele p_i ($m = 0, 1, \ldots, 2n$) nu aparțin unui plan de dimensiune m în R^{2n+1} ($m = 0, 1, \ldots, 2n$).

Pentru orice $x \in X$, punem

$$w_i(x) = d(x, X - U_i) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

cu convenția că, dacă $U_i = X$, $w_i(x) = 1$.

Avem :

$$w_i(x) > 0 \quad \text{dacă } x \in U,$$

$$w_i(x) = 0 \quad \text{dacă } x \notin U_i.$$

Din cauză că (U_i) este o acoperire a lui X, avem, pentru orice $x \in X$:

$$w_1(x) + \ldots + w_r(x) > 0.$$

Să definim o aplicație continuă $g : X \to I^{2n+1}$ prin *)

$$g(x) = \frac{w_1(x)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(x)} p_1 + \ldots + \frac{w_r(x)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(x)} p_r, \quad (x \in X).$$

Să arătăm că $\mathrm{d}(f, g) < \eta$. Presupunem că U_i sînt astfel numerotați încît $x \in U_i$ pentru $i = 1, 2, \ldots, s$ și $x \notin U_i$ pentru $i = s+1, s+2, \ldots, r$.

Atunci $w_i(x) > 0$ pentru $i \leqslant s$ și $w_i(x) = 0$ pentru $i > s$ deci, în expresia lui $g(x)$, apar numai $p_1 \ldots, p_s$.

Din (28), (29) și $x \in U_i$ $(i \leqslant s)$ deducem

$$\mathrm{d}(p_i, f(x)) < \eta \quad (i \leqslant s)$$

și, mai departe,

$$\mathrm{d}(g(x), f(x)) < \eta,$$

căci punctul $g(x)$ aparține închiderii convexe a mulțimii $\{p_1, \ldots, p_s\}$.

Să arătăm că $g \in G(\varepsilon)$. Fie $U_{i_1}, \ldots, U_{i_s}$ toate elementele lui β care conțin un punct $x \in X$. Întrucît ordinul acoperirii β este $\leqslant n$, avem $s \leqslant n+1$. Fie $L(x)$ planul de dimensiune $s-1$ subîntins de punctele

$$p_{i_1}, \ldots, p_{i_s}$$

în I^{2n+1}. Evident că $g(x) \in L(x)$.

Fie $x' \in X$. Să presupunem că $L(x')$ este subîntins de punctele

$$p_{j_1}, \ldots, p_{j_t}.$$

Avem, ca și mai sus, $t \leqslant n+1$ și $L(x')$ este un plan de dimensiune $t-1$.

Dacă $L(x) \cap L(x') \neq \varnothing$, atunci planul subîntins de punctele $p_{i_1}, \ldots, p_{i_s}, p_{j_1}, \ldots, p_{j_t}$ este de dimensiune $\leqslant s+t-2 \leqslant 2n$. De aici și din faptul că punctele p_i sînt în poziție generală în R^{2n+1}, rezultă

$$\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_s}\} \cap \{p_{j_1}, \ldots, p_{j_t}\} \neq \varnothing.$$

---

*) Utilizăm scrierea vectorială : dacă $p \in R^n$ și a e un număr real, ap este punctul care are drept coordonate coordonatele lui p multiplicate prin a.

Deducem că punctele x şi x' aparţin unui acelaşi U_i dacă $L(x) \cap \cap L(x') \neq \varnothing$.

Or, aceasta este situaţia dacă $g(x) = g(x')$, ceea ce implică avînd în vedere că diam $U_i < \delta$,

$$d(x, x') < \delta < \varepsilon,$$

deci g este o ε-aplicaţie.

TEOREMA 6.2. (Teorema de scufundare a lui Menger-Nöbeling). *Fie X un spaţiu metrizabil compact de dimensiune $\leqslant n$ (n finit). Atunci X este omeomorf cu un subspaţiu al lui I^{2n+1}.*

În plus, mulţimea injecţiilor topologice ale lui X în I^{2n+1} este o mulţime G_δ) densă în spaţiul $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$.*

Demonstraţie. Pentru orice număr natural i, fie $G\left(\frac{1}{i}\right)$ submulţimea lui $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$ formată din toate $\frac{1}{i}$ - aplicaţiile şi fie

$$H = \bigcap_{i=1}^{\infty} G\left(\frac{1}{i}\right).$$

În baza lemei 6.3, H coincide cu mulţimea injecţiilor topologice ale lui X în I^{2n+1}. Conform lemei 6.5, fiecare $G\left(\frac{1}{i}\right)$ este deschisă, deci o mulţime G_δ, în $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$, iar conform propoziţiei 6.1 fiecare $G\left(\frac{1}{i}\right)$ este densă în $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$.

Ţinînd seamă de lema 6.4, putem aplica teorema lui Baire **) în spaţiul $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$.

Rezultă că H este o mulţime G_δ densă în $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$.

Observaţia 6.1. Teorema 6.2 este inclusă în teorema 6.3 demonstrată mai jos. Am dat însă separat demonstraţia teoremei 6.2, întrucît ea este mai simplă şi mai puţin încărcată de detalii tehnice decît cea a cazului general şi ajută la înţelegerea ideii principale a acesteia din urmă.

DEFINIŢIE 6.3. Fie α o acoperire a spaţiului X şi g o aplicaţie continuă a lui X în spaţiul Y. Se zice că g e o *α-aplicaţie* dacă fiecare punct $y \in Y$ are o vecinătate V în Y astfel încît

$$g^{-1}(V) \subset U$$

pentru un anumit $U \in \alpha$.

DEFINIŢIA 6.4. Fie α o acoperire a lui X şi fie pentru fiecare $x \in X$, $S_\alpha(x)$ mulţimea deschisă egală cu reuniunea elementelor lui α care conţin

*) Reamintim că se numeşte mulţime G_δ o intersecţie numărabilă de mulţimi deschise.
**) Vezi anexa II.

punctul x. O familie numărabilă $(\alpha_i)_{i=1,2,\ldots}$ de acoperiri se numește *șir fundamental de acoperiri*, dacă fiind dat un punct x și o vecinătate U a lui x, cel puțin una din mulțimile deschise

$$S_{\alpha_1}(x),\ S_{\alpha_2}(x),\ \ldots$$

este conținută în U.

PROPOZIȚIA 6.2. *Pentru orice spațiu metric separabil X există un șir fundamental de acoperiri.*

Demonstrație. Fie $(U_i)_{i=1,2,\ldots}$ o bază numărabilă a lui X. Fie o pereche U_n, U_m astfel încît

$$\overline{U}_n \subset U_m.$$

Fie $\alpha_{n,m}$ acoperirea lui X formată din mulțimile $X - \overline{U}_n$ și U_m. Dacă $x \in U_n$, avem $S_{\alpha_{n,m}}(x) = U_m$. Rezultă că pentru fiecare $x \in X$ familia $(S_{\alpha_{n,m}}(x))$ include familia mulțimilor U_m care conțin pe x, ceea ce probează că $(\alpha_{n,m})$ este un șir fundamental de acoperiri.

PROPOZIȚIA 6.3. *Fie $(\alpha_i)_{i=1,2,\ldots}$ un șir fundamental de acoperiri al unui spațiu X. Dacă g este o α_i - aplicație a lui X într-un spațiu Y pentru orice i, atunci g este o injecție topologică.*

Demonstrație. Este vizibil că este destul să demonstrăm că pentru orice $x \in X$ și orice vecinătate U a lui x există o vecinătate V a lui $g(x)$ astfel încît $g^{-1}(V) \subset U$.

Există un indice i astfel încît

$$S_{\alpha_i}(x) \subset U. \tag{30}$$

Întrucît g este o α_i - aplicație, există o vecinătate V a lui $g(x)$ și un element $U_0^i \in \alpha_i$ astfel încît

$$g^{-1}(V) \subset U_0^i, \tag{31}$$

și cum $x \in g^{-1}(V)$, deducem

$$U_0^i \subset S_{\alpha_i}(x). \tag{32}$$

Din (30), (31), (32) rezultă că

$$g^{-1}(V) \subset U.$$

PROPOZIȚIA 6.4. *Fie X un spațiu metric compact și α o acoperire a lui X. Există atunci un număr pozitiv η astfel încît orice submulțime a lui X de diametru $< \eta$ este conținută într-un element al lui α.*

Demonstrație. Să presupunem că nu există nici un număr cu proprietățile din enunț. Atunci putem găsi un șir $(X_i)_{i=1,2,\ldots}$ de submulțimi ale lui X astfel încît

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{diam} X_i = 0$$

și fiecare X_i nu este conținut în nici un element al lui α. Fie $x_i \in X_i$.

Fie x un punct de acumulare al şirului $(x_i)_{i=1, 2, \ldots}$ şi fie $U_0 \in \alpha$ astfel încît $x \in U_0$. U_0 fiind deschis, avem

$$\rho = d(x, X - U_0) > 0.$$

Există atunci un indice i_0 astfel încît

$$d(x, x_{i_0}) < \frac{\rho}{4}$$

$$\text{diam } X_{i_0} < \frac{\rho}{4},$$

de unde deducem că $X_{i_0} \subset U_0$, ceea ce este absurd.

LEMA 6.6. *Fie X un spaţiu oarecare şi Y un spaţiu metric compact. Pentru orice acoperire α a lui X, mulţimea $G(\alpha)$ a tuturor α-aplicaţiilor lui X în Y este deschisă în spaţiul $\mathcal{C}(X, Y)$.*

Demonstraţie. Fie $g \in G(\alpha)$. Întrucît Y este compact, există o acoperire finită

$$\sigma = \{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$$

a lui Y cu proprietatea că pentru orice i, $1 \leqslant i \leqslant r$, $g^{-1}(V_i)$ este conţinut într-un element al lui α. În baza propoziţiei 6.4, există un $\eta > 0$ astfel încît orice submulţime a lui Y de diametru $< \eta$ este conţinută într-un element al lui σ, deci are imagine inversă prin g conţinută într-un element al lui α. Fie $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ astfel încît

$$d(f, g) < \frac{\eta}{3}.$$

Pentru $y \in Y$, fie S_y bila cu centrul în y de diametru $\frac{\eta}{3}$. Se vede uşor că

$$\text{diam } g(f^{-1}(S_y)) < \eta, \qquad y \in Y$$

aşa încît $f^{-1}(S_y)$ este conţinut într-un element al lui α. Conchidem că f este o α - aplicaţie.

PROPOZIŢIA 6.5. *Fie X un spaţiu metric separabil astfel încît* dim $X \leqslant n$ (*n finit*) *şi α o acoperire a lui X. Fie $G(\alpha)$ mulţimea tuturor α-aplicaţiilor lui X în I^{2n+1}. Atunci $G(\alpha)$ este densă în spaţiul $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$.*

Demonstraţie. Fie $f \in \mathcal{C}(X, I^{2n+1})$ şi $\eta > 0$. Vom construi un $g \in \mathcal{C}(X, I^{2n+1})$ astfel încît

$$d(f, g) < \eta$$

$$g \in G(\alpha).$$

Fiind compact, I^{2n+1} posedă o δ-acoperire σ, unde $\delta < \frac{\eta}{2}$. Fie τ acoperirea lui X definită astfel:

$$\tau = \{f^{-1}(V) \mid V \in \sigma\}.$$

Conform teoremei 6.1, există o rafinare comună

$$\beta = \{U_1, \ldots, U_r\}$$

a lui α și τ, astfel încît ordinul lui $\beta \leqslant n$.

Avem deci

$$\operatorname{diam}(f(U_i)) < \frac{\eta}{2} \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Construim acum aplicația g exact ca în demonstrația propoziției 6.1, utilizînd puncte $p_1, \ldots, p_r$ în I^{2n+1} în poziție generală. Faptul că $\mathrm{d}(f, g) < \eta$, se demonstrează exact ca acolo și tot așa se demonstrează, în notațiile respective că dacă $L(x) \cap L(x') \neq \varnothing$, atunci x și x' se află într-un același U_i din β. Întrucît însă există numai un număr finit de plane $L(x)$, există un număr $\eta > 0$ astfel încît oricare pereche de asemenea plane sau au intersecție nevidă, sau au o distanță $\geqslant \eta$ între ele. Dacă $\mathrm{d}(g(x), g(x')) < \eta$, atunci avem

$$\mathrm{d}(L(x), L(x')) < \eta,$$

deci $L(x) \cap L(x') \neq \varnothing$, deci punctele x și x' sînt conținute într-un același element al lui β și g este o α-aplicație.

Teorema 6.3. *Fie X un spațiu metrizabil separabil de dimensiune $\leqslant n$ (n finit). Atunci X este omeomorf cu un subspațiu al lui I^{2n+1}.*

In plus, mulțimea injecțiilor topologice ale lui X în I^{2n+1} conține o mulțime G_δ densă în spațiul $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$.

Demonstrație. În baza propoziției 6.2, există un șir fundamental $(\alpha_i)_{i=1, 2, \ldots}$ de acoperiri ale spațiului X. Fie $G(\alpha_i)$ mulțimea α_i-aplicațiilor ale lui X în I^{2n+1} și

$$H = \bigcap_{i=1}^{\infty} G(\alpha_i).$$

Conform propoziției 6.3, fiecare element al lui H e o injecție topologică, iar în baza lemei 6.6 fiecare $G(\alpha_i)$ e deschis în $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$. În fine, în virtutea propoziției 6.5, fiecare $G(\alpha_i)$ este densă în $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$. Avînd în vedere lema 6.4, putem aplica teorema lui Baire *) în spațiul $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$. Rezultă că H este o mulțime G_δ densă în $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$.

*) A se vedea anexa II.

TEOREMA **6.4.** (Teorema de scufundare a lui Urysohn). *Fie X un spațiu metric separabil. Atunci X este omeomorf cu un subspațiu al cubului lui Hilbert I^ω.*

În plus, mulțimea injecțiilor topologice ale lui X în I^ω conține o mulțime G_δ densă în spațiul $\mathcal{C}(X, I^\omega)$.

Demonstrația este identică cu cea a teoremei 6.5, cu simplificarea că nu impunem nici o condiție ordinului acoperiri β. Punctele p_i sînt astfel alese încît orice submulțime finită a lor este liniar independentă.

TEOREMA 6.5. *Fie X un spațiu metrizabil și separabil, astfel încît orice acoperire a lui X posedă o rafinare avînd ordinul $\leqslant n$. Atunci X are dimensiunea $\leqslant n$.*

Demonstrația. Dacă se notează prin $\mathcal{M}_m^n$ submulțimea lui R^n formată din punctele care au *cel mult* m coordonate raționale, vom demonstra că există o injecție topologică

$$h : X \to \mathcal{M}_n^{2n+1} \cap I^{2n+1}.$$

Pentru aceasta, vom modifica demonstrația propoziției 6.5 și vom utiliza notațiile de acolo.

Considerăm un $f \in \mathcal{C}(X, I^{2n+1})$ și un $\eta > 0$. Luăm o δ-acoperire σ a lui I^{2n+1}, unde $\delta < \frac{\eta}{2}$ și acoperirea $\tau = \{f^{-1}(V) \mid V \in \sigma\}$. Conform ipotezei, există o rafinare

$$\beta = \{U_1, \ldots, U_r\}$$

a lui τ, astfel încît ordinul lui β este $\leqslant n$.

Se vede ușor că, dacă P este un plan fix de dimensiune n în spațiul R^{2n+1}, se pot deplasa puțin punctele $p_1, \ldots, p_r$ astfel încît nici unul din planele $L(x)$ să nu intersecteze pe P. Exact ca în demonstrația propoziției 6.1, construim o aplicație $g \in \mathcal{C}(X, I^{2n+1})$, satisfăcînd $d(f, g) < \eta$ și, în plus, condiția

$$\overline{g(X)} \cap P = \varnothing.$$

Rezultă că mulțimea

$$G(P) = \{g \mid g \in \mathcal{C}(X, I^{2n+1}),\ \overline{g(X)} \cap P = \varnothing\}$$

este densă în $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$. Ea este și deschisă, căci relația $\overline{g(X)} \cap P = \varnothing$ implică

$$d(g(X), P) > 0,$$

ceea ce ne permite să afirmăm că orice aplicație g' cu

$$d(g, g') < \frac{d(g(x), P)}{2}$$

aparține lui $G(P)$.

Mulțimea $I^{2n+1} - \mathcal{M}_n^{2n+1} \cap I^{2n+1}$ este formată din punctele lui I^{2n+1} care au *cel puțin* $n+1$ coordonate raționale, deci ea coincide cu reuniunea unei familii numărabile de hiperplane $(P_i)_{i=1,2,\ldots}$ fiecare P_i fiind definit de ecuații de forma

$$x_{i_1} = r_1, \ldots, x_{i_{n+1}} = r_{n+1},$$

unde $r_1, \ldots, r_{n+1}$ sînt numere raționale (aici trebuie luate toate familiile de cîte $n+1$ numere naturale cuprinse între 1 și $2n+1$ și toate familiile de $n+1$ numere raționale). Dimensiunea fiecăruia din aceste hiperplane este $2n+1-(n+1)=n$. În baza teoremei 6.3, există o mulțime G_δ densă în $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$, H, formată din injecții topologice ale lui X în I^{2n+1}. Fie

$$H' = H \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} G(P_i).$$

În virtutea lemei 6.4, putem aplica teorema lui Baire *); deducem că H' este o mulțime G_δ densă în $\mathcal{C}(X, I^{2n+1})$, deci, în particular, $H' \neq \varnothing$. Fie $h \in H'$. Este clar că

$$\overline{h(X)} \subset I^{2n+1} - \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right) = \mathcal{M}_n^{2n+1} \cap I^{2n+1}.$$

În conformitate cu lema 4.5, $\dim \mathcal{M}_n^{2n+1} \leqslant n$. Rezultă că

$$\dim X = \dim h(X) \leqslant \dim (\mathcal{M}_n^{2n+1} \cap I^{2n+1}) \leqslant n.$$

COROLARUL 6.2. *Fie X un spațiu metric compact, astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$, X posedă o ε-acoperire avînd ordinul $\leqslant n$. Atunci X are dimensiunea $\leqslant n$.*

Demonstrație. Este suficient să se observe că, în conformitate cu propoziția 6.4, orice acoperire a lui X posedă o rafinare avînd ordinul $\leqslant n$.

TEOREMA 6.6. *Un spațiu metric separabil are dimensiunea $\leqslant n$ dacă și numai dacă orice acoperire a sa posedă o rafinare avînd ordinul $\leqslant n$.*

Demonstrație. Teorema rezultă din combinarea teoremei 6.1 și a teoremei 6.5.

COROLARUL 6.3. *Un spațiu metric compact are dimensiunea $\leqslant n$ dacă și numai dacă el posedă pentru orice $\varepsilon > 0$ o ε-acoperire avînd ordinul $\leqslant n$.*

Demonstrație. Corolarul rezultă din combinarea corolarului 6.1 și a corolarului 6.2.

---

*) A se vedea anexa II.

Anexe

I. Un spațiu topologic se numește *complet normal* dacă fiecare subspațiu al său este normal. Orice spațiu metric este complet normal.

LEMA. *Fie X un spațiu complet normal și fie A și B două submulțimi ale lui X astfel încît $\overline{A} \cap B = \varnothing$, $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Există atunci o submulțime deschisă G a lui X astfel încît $A \subset G$ și $\overline{G} \cap B = \varnothing$.*

Demonstrație. Fie $C = X - \overline{A} \cap \overline{B}$. Mulțimile $\overline{A} - \overline{B}$ și $\overline{B} - \overline{A}$ sînt disjuncte și închise în C. X fiind complet normal, subspațiul său C este normal. Există deci o mulțime G deschisă în C și astfel încît

$$\overline{A} - \overline{B} \subset G, \ \overline{G} \cap C \cap (\overline{B} - \overline{A}) = \varnothing.$$

Dar din faptul că G e deschisă în C și C este deschisă în X, deducem că G este deschisă în spațiul X. Pe de altă parte, relația $A \cap \overline{B} = \varnothing$ implică $A \subset \overline{A} - \overline{B} \subset G$, iar relația $\overline{A} \cap B = \varnothing$ implică $\overline{G} \cap B \subset \overline{G} \cap \cap \overline{B} - \overline{A} \subset \overline{G} \cap C \cap (\overline{B} - \overline{A}) = \varnothing$.

II. TEOREMA LUI BAIRE. *Orice intersecție numărabilă de submulțimi deschise dense ale unui spațiu metric complet este densă.*

Demonstrație. Fie $(D_i)_{i=1, 2, \ldots}$ o familie de submulțimi deschise dense ale spațiului metric complet X și fie

$$D = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i.$$

Fie U o submulțime deschisă arbitrară a lui X. Întrucît D_1 este densă, există un punct $p_1 \in U \cap D_1$. Întrucît $U \cap D_1$ e deschisă, există o bilă deschisă S_1 cu centrul în p_1 de diametru < 1, astfel încît $\overline{S}_1 \subset U \cap D_1$.

Printr-un raționament analog, determinăm un punct $p_2 \in S_1 \cap D_2$ și o bilă deschisă S_2 cu centrul în p_2 de diametru $< \frac{1}{2}$, astfel încît $\overline{S}_2 \subset \subset S_1 \cap D_2$. Continuînd în acest fel obținem un șir de puncte $(p_n)_{n=1, 2, \ldots}$ și un șir de bile deschise $(S_n)_{n=1, 2, \ldots}$, astfel încît

$$p_n \in S_n, \ \operatorname{diam} S_n < \frac{1}{n},$$

și

$$(*) \qquad \overline{S}_n \subset S_{n-1} \cap D_n, \quad \overline{S}_1 \subset U \cap D_1.$$

Rezultă că (p_n) este un șir Cauchy ; fie p limita acestui șir. Din (*) rezultă că $p \in U \cap D$, ceea ce demonstrează că D este densă.

Din teorema lui Baire rezultă :

Într-un spațiu metric complet, orice intersecție numărabilă de mulțimi G_δ dense este o mulțime G_δ densă.

III. Teorema de reducere a lui Brouwer. *Fie X un spațiu cu bază numărabilă și fie $\mathcal{K}$ o familie de submulțimi închise ale lui X cu următoarea proprietate: Dacă $K_i \in \mathcal{K}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ este un șir de elemente ale lui $\mathcal{K}$ astfel încît*

$$K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots,$$

atunci $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \in \mathcal{K}$.

În aceste condiții există o mulțime $K \in \mathcal{K}$ astfel încît nici o submulțime proprie a lui K nu aparține lui $\mathcal{K}$.

Demonstrație. Fie $(U_i)_{i=1, 2, \ldots}$ o bază numărabilă a lui X. Fie K_0 un element arbitrar al lui $\mathcal{K}$. Definim inductiv o familie $(K_n)_{n=1, 2, \ldots}$ astfel:

$$K_n \in \mathcal{K} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

și

$$(**) \qquad K_n \subset K_{n-1} \cap (X - U_n)$$

dacă o astfel de mulțime există, și $K_n = K_{n-1}$ în caz contrar.

Fie

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n. \qquad (***)$$

K are proprietatea de minimalitate dorită, căci, în caz contrar, ar exista o submulțime proprie K' a lui K astfel încît $K' \in \mathcal{K}$ și deci un U_n astfel încît

$$(****) \qquad K \cap U_n \neq \varnothing,$$

și în același timp $K' \cap U_n = \varnothing$. Dar atunci, prin construcția lui K_n, relația (**) ar fi valabilă. Aceasta ar implica $K \cap U_n = \varnothing$ datorită lui (***), ceea ce ar contrazice (****).

PARTEA A DOUA

Teoria categoriilor

de

Martin Jurchescu

Capitolul I

Categorii și functori

§ 1. Univers

DEFINIȚIE. O mulțime $\mathfrak{U}$ se numește *univers* dacă satisface condițiile următoare :

U1) Dacă $x \in \mathfrak{U}$, atunci $\{x\} \in \mathfrak{U}$ (unde $\{x\}$ este mulțimea formată din elementul x).

U2) Dacă $x \in X$ și $X \in \mathfrak{U}$, atunci $x \in \mathfrak{U}$.

U3) Dacă o mulțime $X \in \mathfrak{U}$, atunci mulțimea părților $\mathfrak{P}(X) \in \mathfrak{U}$.

U4) Dacă $(X_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi $X_i \in \mathfrak{U}$ și dacă $I \in \mathfrak{U}$, atunci $\bigcup_{i \in I} X_i \in \mathfrak{U}$.

U5) Cuplul $(x, y) \in \mathfrak{U}$ dacă și numai dacă x și $y \in \mathfrak{U}$.

Mulțimea vidă este un univers numit *universul vid.*

Evident, dacă $(\mathfrak{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ este o familie de universuri, unde A este o mulțime, atunci $\bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{U}_\alpha$ este tot un univers.

Pentru existența universurilor, vom presupune că avem o teorie a mulțimilor în care este satisfăcută axioma următoare :

Pentru orice mulțime A, există un univers $\mathfrak{U}$ care conține pe A ca element.

Rezultă atunci că există chiar un cel mai mic univers care conține pe A ca element. Acest univers se numește universul *generat* de mulțimea A.

În particular, există universuri care conțin mulțimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi. Acestea sînt dealtfel universurile importante în matematică.

Vom nota $e = \{\varnothing\}$, deci e este mulțimea care are ca unic element mulțimea vidă.

Fie $(X_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (I o mulțime). Vom defini produsul direct $X = \prod_{i \in I} X_i$ astfel :

1° $X = e$ cînd $I = \varnothing$.

2° $X = \varnothing$ cînd $I \neq \varnothing$ dar există $i \in I$ astfel încît $X_i = \varnothing$.

3° X = mulțimea tuturor familiilor $x = (x_i)_{i \in I}$ cu $x_i \in X_i$ cînd $I \neq \varnothing$ și toți $X_i \neq \varnothing$.

Cînd $I \neq \varnothing$ și $X_i \neq \varnothing$ pentru toți $i \in I$, avem aplicațiile $\mathrm{pr}_i : X \to X_i$ definite prin $\mathrm{pr}_i(x) = x_i$ pentru orice element $x = (x_j)_{j \in I}$ în X. Aceste aplicații se numesc *proiecțiile canonice* ale produsului direct X.

De asemenea, vom defini *suma directă* $X' = \coprod_{i \in I} X_i$ prin egalitatea

$$X' = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times X_i.$$

Rezultă că $X' = \varnothing$ cînd $I = \varnothing$. Dacă $I \neq \varnothing$, atunci pentru toți $i \in I$ astfel încît $X_i \neq \varnothing$ avem aplicațiile $\varepsilon_i : X_i \to X'$ definite prin $\varepsilon_i(x) = (i, x)$ pentru orice element $x \in X_i$. Aplicațiile ε_i se numesc *injecțiile canonice* ale sumei directe X'.

Vom scrie uneori x_i în loc de (i, x) cu $i \in I$ și $x \in X_i$.

Teorema 1.1. *Fie* $\mathfrak{U}$ *un univers.*

1) *Dacă o mulțime* $A \in \mathfrak{U}$ *și dacă* $B \subset A$, *atunci* $B \in \mathfrak{U}$.

2) *Dacă* A, $B \in \mathfrak{U}$, *atunci* $A \cup B \in \mathfrak{U}$ *și* $A \times B \in \mathfrak{U}$ (*în particular* $B^A \in \mathfrak{U}$).

3) *Dacă* x, $y \in \mathfrak{U}$, *atunci mulțimea* $\{x, y\} \in \mathfrak{U}$.

4) *Dacă* $(X_i)_{i \in I}$ *este o familie de mulțimi* $X_i \in \mathfrak{U}$ *și dacă* $I \in \mathfrak{U}$, *atunci* $\prod_{i \in I} X_i \in \mathfrak{U}$ *și* $\coprod_{i \in I} X_i \in \mathfrak{U}$.

5) *Dacă o mulțime* $X \in \mathfrak{U}$, *atunci* $\mathrm{Card}\, X < \mathrm{Card}\, \mathfrak{U}$ (*în particular* $\mathfrak{U}$ *nu se conține ca element*).

Demonstrație. Mai întîi dacă $A \in \mathfrak{U}$, atunci $\mathfrak{P}(A) \in \mathfrak{U}$ în virtutea lui U3) și deci $B \in \mathfrak{U}$ în virtutea lui U2).

Rezultă, în particular, că dacă $\mathfrak{U}$ este nevid, atunci mulțimea vidă $\varnothing$ este un element $\in \mathfrak{U}$. Într-adevăr, dacă $\mathfrak{U} \neq \varnothing$, atunci există un element $a \in \mathfrak{U}$. Din U1) rezultă că mulțimea $\{a\} \in \mathfrak{U}$, deci mulțimea vidă, fiind o submulțime a lui $\{a\}$, este un element din $\mathfrak{U}$. Din U1) mai rezultă atunci că $e \in \mathfrak{U}$.

Înainte de a termina demonstrația vom stabili următoarea :

Lemă. *Dacă* $\mathfrak{U}$ *este un univers nevid, pentru orice întreg* $n \geqslant 0$, *există o mulțime* $A \in \mathfrak{U}$ *astfel încît* $\mathrm{Card}\, A = n$.

Pentru demonstrația lemei vom face inducție după n. În virtutea celor precedente, asertiunea lemei este adevărată pentru $n = 0$ întrucît $\mathrm{Card}\, \varnothing = 0$.

Vom presupune deci că asertiunea lemei este adevărată pentru n și o vom demonstra pentru $n + 1$. Fie B o mulțime $\in \mathfrak{U}$ astfel încît $\mathrm{Card}\, B = n$. Atunci $\mathfrak{P}(B) \in \mathfrak{U}$ și evident $\mathrm{Card}\, \mathfrak{P}(B) = 2^n > n$. Deci există o mulțime $A \subset \mathfrak{P}(B)$ astfel încît $\mathrm{Card}\, A = n + 1$ etc.

Revenim la demonstrația teoremei.

Din lemă și din U4) rezultă că orice reuniune finită de mulțimi $\in \mathfrak{U}$ este o mulțime $\in \mathfrak{U}$.

Fie acum A, B două mulţimi $\in \mathfrak{U}$. Pentru orice $a \in A$ şi orice $b \in B$, $a \in \mathfrak{U}$ şi $b \in \mathfrak{U}$ în virtutea lui U2), deci $(a, b) \in \mathfrak{U}$ în virtutea lui U5), deci $\{(a, b)\} \in \mathfrak{U}$ în virtutea lui U1). Astfel, după U4), avem mai întîi

$$\{a\} \times B = \bigcup_{b \in B} \{(a, b)\} \in \mathfrak{U}$$

şi apoi

$$A \times B = \bigcup_{a \in A} \{a\} \times B \in \mathfrak{U}.$$

Orice aplicaţie de mulţimi $f : A \to B$ se identifică cu graful ei. Atunci mulţimea B^A a tuturor aplicaţiilor lui A în B este o submulţime a lui $\mathfrak{P}(A \times B)$ şi deci B^A este un element din $\mathfrak{U}$ dacă mulţimile A şi B sînt elemente din $\mathfrak{U}$.

Aserţiunea 3) a fost esenţial demonstrată mai sus.

Mai departe ştim că dacă $\mathfrak{U}$ este nevid, $\varnothing$ şi $e \in \mathfrak{U}$. Apoi dacă $I \neq \varnothing$ şi $X_i \neq \varnothing$ pentru toţi $i \in I$, $\prod_{i \in I} X_i$ este o submulţime a lui A^I, unde $A = \bigcup_{i \in I} X_i$. De asemenea $\coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times X_i$.

În sfîrşit, dacă A este o mulţime $\in \mathfrak{U}$, atunci A este de asemenea o submulţime a lui $\mathfrak{U}$ în virtutea lui U2), deci Card $A \leqslant$ Card $\mathfrak{A}$. Or, dacă X este o mulţime $\in \mathfrak{U}$, atunci $\mathfrak{P}(X) \in \mathfrak{U}$ şi deci Card $\mathfrak{P}(X) \leqslant$ Card $\mathfrak{U}$. Cum Card $X <$ Card $\mathfrak{P}(X)$, avem

$$\text{Card } X < \text{Card } \mathfrak{U}$$

ceea ce termină demonstraţia teoremei.

Noţiunea de univers a fost introdusă în matematică de A. Grothendieck.

§ 2. Categorii

Amintim că o aplicaţie de mulţimi $f : X \to Y$ se zice *injectivă* cînd $f(x') = f(x'')$ implică $x' = x''$, *surjectivă* cînd, pentru orice $y \in Y$, există $x \in X$ astfel încît $f(x) = y$, şi *bijectivă* cînd este simultan injectivă şi surjectivă.

O aplicaţie de mulţimi $f : X \to Y$ se mai notează $x \rightsquigarrow f(x)$.

DEFINIŢIE. O *categorie* $\mathcal{C}$ constă din următoarele date:

1) o mulţime Ob $(\mathcal{C})$ ale cărei elemente se numesc *obiectele* lui $\mathcal{C}$;

2) pentru orice cuplu de obiecte A, $B \in$ Ob $(\mathcal{C})$, o mulţime $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ale cărei elemente se numesc morfisme (sau *săgeţi*) de la A în B sau de *sursă* A şi *capăt* B;

3) pentru orice triplet de obiecte A, B, $C \in$ Ob $(\mathcal{C})$, o aplicaţie

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C),$$

numită *compunerea morfismelor*, care asociază cu orice cuplu de morfisme $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ şi $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, un morfism $vu \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$, notat uneori şi $v \circ u$;

toate supuse la următoarele axiome:

i) pentru orice $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, există un morfism $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, numit identitatea lui A, astfel încît $1_A u = u$ şi $v 1_A = v$ pentru orice morfism u de capăt A şi orice morfism v de sursă A;

ii) compunerea morfismelor este asociativă: dacă $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ şi $w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, atunci $w(vu) = (wv)\, u = wvu$ (ultima egalitate este o definiţie);

iii) mulţimile $\mathrm{Hom}(A, B)$ sînt mutual disjuncte, i.e. orice morfism are o unică sursă şi un unic capăt.

Cînd nici o ambiguitate nu este posibilă, vom scrie $\mathrm{Hom}(A, B)$ în loc de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Vom scrie de asemenea $u : A \to B$ sau $A \xrightarrow{u} B$ în loc de $u \in \mathrm{Hom}(A, B)$, iar uneori vom desemna un morfism numai printr-o săgeată $A \to B$.

Vom nota $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ reuniunea mulţimilor $\mathrm{Hom}(A, B)$ cînd A şi B parcurg independent mulţimea $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ şi vom numi $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ *mulţimea săgeţilor* sau *mulţimea morfismelor* lui $\mathcal{C}$. Să observăm că compunerea morfismelor acţionează în $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ şi că vu este definit atunci şi numai atunci cînd sursa lui v coincide cu capătul lui u.

Să mai observăm că, pentru orice $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, identitatea lui A este unic determinată. Într-adevăr, dacă $e : A \to A$ este astfel încît $eu = u$ şi $ve = v$ pentru orice morfism u de capăt A şi orice morfism v de sursă A (vom spune atunci că e este o *unitate* sau o *identitate* în $\mathcal{C}$), atunci în particular $e = 1_A\, e = 1_A$. Mai rezultă că orice identitate în $\mathcal{C}$ este de formă 1_A, şi anume pentru un singur A în virtutea axiomei iii).

Aşadar aplicaţia $A \rightsquigarrow 1_A$ este o bijecţie între mulţimea $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ şi mulţimea identităţilor lui $\mathcal{C}$.

Dacă $A \xrightarrow{u} B$ şi $B \xrightarrow{v} A$ sînt morfisme în $\mathcal{C}$ astfel încît $vu = 1_A$, atunci v se numeşte un *invers la stînga* al lui u, iar u un *invers la dreapta* al lui v.

DEFINIŢIE. Un morfism $A \xrightarrow{u} B$ în $\mathcal{C}$ se numeşte *izomorfism* dacă există un morfism $B \xrightarrow{v} A$ care este simultan invers la stînga şi la dreapta pentru u, i.e. $vu = 1_A$ şi $uv = 1_B$.

Faptul că u este izomorfism se notează $u : A \xrightarrow{\sim} B$ sau $u : A \approx B$.

Morfismul v satisfăcînd condiţia din definiţie (dacă există) este unic determinat: într-adevăr, dacă $B \xrightarrow{v'} A$ este un alt morfism care satisface condiţiei din definiţie, atunci

$$v' = 1_A\, v' = (vu)\, v' = v(uv') = v 1_B = v.$$

Morfismul $B \to A$ satisfăcînd $vu = 1_A$ şi $uv = 1_B$ (dacă există) se numeşte *invers* al lui u şi se notează $v = u^{-1}$.

Evident, identităţile lui $\mathcal{C}$ sînt izomorfisme. De asemenea, dacă $A \xrightarrow{u} B$ şi $B \xrightarrow{v} C$ sînt izomorfisme, atunci vu este izomorfism şi $(vu)^{-1} = u^{-1} v^{-1}$.

Să mai observăm că dacă u este izomorfism, u^{-1} este izomorfism.

Dacă $A \to B$ este un morfism în $\mathcal{C}$, atunci, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, avem o aplicaţie

$$\mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B)$$

care asociază cu orice morfism $f : X \to A$, morfismul $uf : X \to B$, şi o aplicaţie

$$\mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X)$$

care asociază cu orice morfism $f : B \to X$, morfismul $fu : A \to X$.

DEFINIŢIE. Un morfism $A \to B$ se numeşte *monomorfism* (resp. *epimorfism*) dacă, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, prima (resp. a doua) din aplicaţiile precedente este injectivă. Vom spune că u este o *bijecţie* dacă u este simultan monomorfism şi epimorfism.

Deci u este monomorfism, cînd $uf = ug$ implică $f = g$ şi epimorfism, cînd $fu = gu$ implică $f = g$.

TEOREMA 2.1. 1) *Orice izomorfism este o bijecţie.*

2) *Orice compus de două monomorfisme* (*epimorfisme*) *este un monomorfism* (*epimorfism*).

3) *În situaţia* $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$, *dacă* vu *este monomorfism* (*resp. epimorfism*), *atunci* u (*resp.* v) *este monomorfism* (*resp. epimorfism*).

Demonstraţia este trivială şi o vom omite.

O *mulţime preordonată* este o categorie I astfel încît $\mathrm{Hom}(i, j)$ conţine cel mult un element pentru orice cuplu de obiecte i, j din I. Vom scrie atunci $i \leqslant j$ în loc de $\mathrm{Hom}(i, j) \neq \varnothing$. Rezultă că $i \leqslant i$ pentru orice $i \in \mathrm{Ob}(I)$ şi că $i \leqslant j$ şi $j \leqslant k$ implică $i \leqslant k$. O *mulţime ordonată* este o mulţime preordonată astfel încît $i \leqslant j$ şi $j \leqslant i$ implică $i = j$. Dacă I este o mulţime preordonată (ordonată), atunci $\mathrm{Ob}(I)$ se numeşte *mulţimea subiacentă* lui I, iar $\mathrm{Fl}(I)$ *relaţia de preordine* (*ordine*) a lui I.

Conceptul de categorie apare aşadar ca o generalizare a celui de mulţime preordonată.

Evident, într-o mulţime *preordonată* I, orice morfism în I este o bijecţie. Pe de altă parte, dacă I este o mulţime *ordonată*, orice izomorfism în I este o identitate. Rezultă că în general într-o categorie există bijecţii care nu sînt izomorfisme.

DEFINIŢIE. Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie, se numeşte *categorie duală* a lui $\mathcal{C}$ şi se notează $\mathcal{C}^\circ$ categoria definită astfel :

1) $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\circ) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;

2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$;

3) Compunerea lui v şi u în $\mathcal{C}^\circ$ este egală cu compunerea lui u şi v în $\mathcal{C}$.

Evident, $(\mathcal{C}^\circ)^\circ = \mathcal{C}$, adică duala dualei lui $\mathcal{C}$ coincide cu $\mathcal{C}$.

Principiul general de dualitate: Orice noţiune (propoziţie) într-o categorie neprecizată $\mathcal{C}$ are o noţiune (propoziţie) duală care se obţine considerînd noţiunea (propoziţia) în categoria duală $\mathcal{C}^\circ$ şi apoi interpretînd-o în categoria $\mathcal{C}$.

Procedeul de trecere de la o noţiune (propoziţie) la noţiunea (propoziţia) duală se numeşte *procedeul inversării săgeţilor*.

O noţiune (propoziţie) se zice *autoduală* dacă coincide cu duala ei.

De exemplu, noţiunea de epimorfism este duală cu cea de monomorfism, iar noţiunile de bijecţie şi izomorfism sînt autoduale. În teorema 2.1, propoziţia 1) este autoduală, iar în 2) şi 3) enunţurile duale sînt date între paranteze.

Să mai considerăm un exemplu.

DEFINIŢIE. Un obiect e din $\mathcal{C}$ se cheamă *obiect final* dacă, pentru orice $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, mulţimea $\mathrm{Hom}(A, e)$ conţine exact un element, i.e. există exact o săgeată $A \to e$. Dual avem noţiunea de *obiect iniţial*: i este un obiect iniţial în categoria $\mathcal{C}$ dacă, pentru orice $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, există exact o săgeată $i \to A$. Un obiect în $\mathcal{C}$ care este simultan final şi iniţial se numeşte *obiect nul*.

Evident, toate obiectele finale (dacă există) sînt mutual izomorfe: mai precis, pentru orice cuplu de obiecte finale e şi e' în $\mathcal{C}$, unicul morfism $e \to e'$ este un izomorfism. La fel pentru obiectele iniţiale şi pentru obiectele nule.

Dacă I este o mulţime ordonată, obiectul final (iniţial) dacă există este unic şi se numeşte cel mai mare (mic) element al lui I.

DEFINIŢIE. Dacă $\mathfrak{U}$ este un univers, o categorie $\mathcal{C}$ se numeşte $\mathfrak{U}$-categorie cînd $\mathrm{Hom}(A, B) \in \mathfrak{U}$ pentru orice cuplu de obiecte A, B în $\mathcal{C}$. O $\mathfrak{U}$-categorie se zice *mică* dacă $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \in \mathfrak{U}$; rezultă atunci că şi $\mathrm{Fl}(\mathcal{C}) \in \mathfrak{U}$.

Pentru orice categorie $\mathcal{C}$ există un univers (chiar unul cel mai mic) $\mathfrak{U}$ astfel încît $\mathcal{C}$ să fie o $\mathfrak{U}$-categorie.

Exemple de $\mathfrak{U}$-categorii sînt:

Categoria $\mathfrak{U}$-**Ens**. Obiecte: mulţimile $\in \mathfrak{U}$; morfisme: aplicaţiile de mulţimi. În exemplele următoare prin grup, monoid etc., se va înţelege un grup, monoid etc. avînd ca mulţime subiacentă un element din $\mathfrak{U}$.

Categoria $\mathfrak{U}$-**G** (resp. $\mathfrak{U}$-**Ab**). Obiecte: grupurile (resp. grupurile abeliene); morfisme: omomorfismele de grupuri.

Categoria $\mathfrak{U}$-**M**. Obiecte: monoizii; morfisme: omomorfismele de monoizi.

Categoria $\mathfrak{U}$-**A**. Obiecte: inelele cu element unitate; morfisme: omomorfismele de inele cu element unitate.

Categoria **U-Top**. Obiecte: spațiile topologice; morfisme: aplicațiile continue.

Se vede ușor că în categoria **U-Ens** (resp. **U-Ab**) monomorfismele sînt aplicațiile (resp. omomorfismele) injective, iar epimorfismele sînt aplicațiile (resp. omomorfismele) surjective. În plus, bijecțiile coincid cu izomorfismele în aceste categorii. Același lucru este adevărat pentru **U-G**, dar este mai puțin imediat.

Mulțimea vidă $\varnothing$ este unicul obiect inițial în **U-Ens**, iar mulțimile *punctuale* (i.e. mulțimile care conțin un singur element) sînt obiecte finale în **U-Ens**; în particular, $e = \{\varnothing\}$ este final în **U-Ens**. Întrucît $\varnothing$ și e nu sînt izomorfe, se vede că **U-Ens** nu are obiect nul.

De asemenea grupurile care se reduc la elementul neutru sînt obiecte nule în **U-G** și **U-Ab**.

DEFINIȚIE. O categorie $\mathcal{C}'$ se numește *subcategorie* a lui $\mathcal{C}$ dacă:

1) $\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}') \subset \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$;

2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ pentru orice cuplu de obiecte A, B în $\mathcal{C}'$;

3) compunerea morfismelor în $\mathcal{C}'$ este indusă de compunerea morfismelor în $\mathcal{C}$.

O subcategorie $\mathcal{C}'$ a lui $\mathcal{C}$ se zice *plină* dacă

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

pentru orice cuplu de obiecte A, B în $\mathcal{C}'$.

De exemplu, categoria **U-Ab** este o subcategorie plină a categoriei **U-G**. De asemenea, categoria în care obiectele sînt spațiile topologice local compacte din **U-Top**, iar morfismele aplicațiile proprii, este o subcategorie neplină a lui **U-Top**.

Categoria $\mathcal{C}$ definită prin $\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}) = \varnothing$ se numește *categoria vidă* și se notează $\varnothing$. Ea este considerată subcategorie a oricărei categorii. De asemenea vom nota e categoria avînd ca unic obiect pe $\varnothing$ și ca unic morfism identitatea lui $\varnothing$.

DEFINIȚIE. Fie $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ o familie de categorii (I o mulțime). Atunci definim *categoria produs* $\mathcal{C} = \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ astfel:

1) $\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}) = \prod_{i \in I} \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}_i)$;

2) pentru orice cuplu de obiecte $A = (A_i)_{i \in I}$ și $B = (B_i)_{i \in I}$ în $\mathcal{C}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_i}(A_i, B_i);$$

3) compunerea morfismelor se face pe componente.

Evident, cînd $I = \varnothing$, $\mathcal{C}$ este categoria punctuală e, iar cînd $I \neq \varnothing$ dar există $i \in I$ astfel încît $\mathcal{C}_i = \varnothing$, atunci $\mathcal{C} = \varnothing$.

§ 3. Functori

DEFINIȚIE. Dacă $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ sînt două categorii, un *functor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ (se mai spune : *functor covariant*) este o funcție care asociază cu orice obiect A din $\mathcal{C}$ un obiect $F(A)$ din $\mathcal{C}'$ și cu orice morfism $u : A \to B$ din $\mathcal{C}$, un morfism $F(u) : F(A) \to F(B)$ din $\mathcal{C}'$ astfel încît :

1) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ pentru orice $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;

2) $F(vu) = F(v)\,F(u)$ pentru orice compus vu de morfisme din $\mathcal{C}$.

Rezultă că un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ induce o aplicație

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$$

definită prin $A \rightsquigarrow F(A)$, și pentru orice cuplu de obiecte A, B în $\mathcal{C}$, o aplicație

$$\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$$

definită prin $u \rightsquigarrow F(u)$.

Evident, dacă $u : A \to B$ este un izomorfism în $\mathcal{C}$ și $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor, atunci $F(u)$ este un izomorfism în $\mathcal{C}'$.

Vom folosi uneori notația indicială pentru functori, i.e. vom scrie F_A în loc de $F(A)$ și F_u în loc de $F(u)$.

$\mathcal{C}^\circ$ fiind categoria duală lui $\mathcal{C}$, un functor $F : \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{C}'$ se mai numește *functor contravariant* de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$.

Dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este un functor, atunci avem un functor $F^\circ : \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{C}'^\circ$ definit prin $F^\circ(A) = F(A)$ și $F^\circ(u) = F(u)$ pentru orice $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\circ)$ și orice $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(B, A)$.

Functorii se compun în mod natural : dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ și $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ sînt doi functori, atunci functorul $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$ se definește prin $GF(A) = G(F(A))$ și $GF(u) = G(F(u))$.

Dacă $\mathcal{C}'$ este o subcategorie a lui $\mathcal{C}$, avem *functorul de incluziune* $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ definit prin $i(A) = A$ și $i(u) = u$ pentru orice obiect A și orice morfism u în $\mathcal{C}'$. Dacă $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$ este un functor, functorul $Gi : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ se mai notează $G \mid \mathcal{C}'$ și se numește restricția lui G la $\mathcal{C}'$.

Cînd $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, i se numește identitatea lui $\mathcal{C}$ și se notează $1_{\mathcal{C}}$. Evident, $1_{\mathcal{C}}$ este o unitate pentru compunerea functorilor.

Dacă $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ este o familie de categorii și $\mathcal{C} = \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$, atunci, pentru orice $j \in I$ avem functorul

$$\mathrm{pr}_j ;\ \mathcal{C} \to \mathcal{C}_j,$$

numit *proiecția canonică* de indice j a lui $\mathcal{C}$, care asociază cu orice obiect $A = (A_i)_{i \in I}$ în $\mathcal{C}$ obiectul A_j în $\mathcal{C}_j$ și cu orice morfism $(u_i)_{i \in I}$ în $\mathcal{C}$ morfismul u_j în $\mathcal{C}_j$. Pentru orice categorie $\mathcal{C}'$ și orice familie $(F_i)_{i \in I}$ de functori $F_i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}_i$, există și este unic un functor $F = \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ astfel încît $F_i = \mathrm{pr}_i\, F$ pentru toți $i \in I$.

Cînd $\mathcal{C}$ este o $\mathfrak{U}$-categorie, avem un functor

$$\mathrm{Hom} : \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens}$$

definit astfel : dacă (A, B) este un obiect în $\mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C}$, deci un cuplu de obiecte în $\mathcal{C}$, atunci $\mathrm{Hom}\ (A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\ (A, B)$ este mulţimea morfismelor de la A în B în $\mathcal{C}$; dacă $(u, v) : (A, B) \to (A', B')$ este un morfism în $\mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C}$, deci $u : A' \to A$ şi $v : B \to B'$ în $\mathcal{C}$, atunci $\mathrm{Hom}\ (u, v) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\ (u, v)$ este aplicaţia

$$\mathrm{Hom}\ (A, B) \to \mathrm{Hom}\ (A', B')$$

care asociază cu orice morfism $f : A \to B$ în $\mathcal{C}$, morfismul $vfu : A' \to B'$ în $\mathcal{C}$.

Astfel Hom este un functor contravariant în prima variabilă şi covariant în a doua.

Mai precis, pentru orice obiect B în $\mathcal{C}$, funcţiile $A \rightsquigarrow \mathrm{Hom}\ (A, B)$ şi $u \rightsquigarrow \mathrm{Hom}\ (u, 1_B) = \mathrm{Hom}\ (u, B)$ (această egalitate este o definiţie) definesc un functor contravariant

$$h_B = \mathrm{Hom}\ (\cdot, B) : \mathcal{C}^\circ \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens}.$$

De asemenea, pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, funcţiile $B \rightsquigarrow \mathrm{Hom}\ (A, B)$ şi $v \rightsquigarrow \mathrm{Hom}\ (1_A, v) = \mathrm{Hom}\ (A, v)$ (egalitatea este o definiţie) definesc un functor

$$\mathring{h} = \mathrm{Hom}\ (A, \cdot).$$

Definiţie. Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se zice *fidel* (resp. *deplin fidel*), dacă, pentru orice cuplu de obiecte A, B în $\mathcal{C}$, aplicaţia

$$\mathrm{Hom}\ (A, B) \to \mathrm{Hom}\ (F(A), F(B))$$

indusă de F este injectivă (resp. bijectivă).

De exemplu, dacă $\mathcal{C}'$ este o subcategorie a lui $\mathcal{C}$, functorul de incluziune $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ este fidel, şi este deplin fidel atunci şi numai atunci cînd $\mathcal{C}'$ este o subcategorie plină a lui $\mathcal{C}$.

Propoziţia 3.1 *Dacă F este fidel, $F(u)$ monomorfism (epimorfism, bijecţie) implică u monomorfism (epimorfism, bijecţie). Dacă F este deplin fidel, $F(u)$ izomorfism implică u izomorfism.*

Demonstraţie. Fie $u : A \to B$ un morfism în $\mathcal{C}$ astfel încît $F(u)$ este monomorfism, şi fie $f, g \in \mathrm{Hom}\ (X, A)$ astfel încît $uf = ug$. Rezultă $F(u)F(f) = F(u)F(g)$, deci $F(f) = F(g)$ întrucît $F(u)$ este monomorfism, deci $f = g$ întrucît F este fidel. Dual avem aserţiunea pentru epimorfisme. şi autodual pentru bijecţii. În sfîrşit, fie F deplin fidel şi $F(u)$ izomorfism. Există $v' : F(B) \to F(A)$ astfel încît $F(u)\,v' = 1_{F(B)}$ şi $v'\,F(u) = 1_{F(A)}$. Întrucît F este deplin fidel, există $v : B \to A$ astfel încît $F(v) = v'$. Avem $F(uv) = F(u)\ v' = 1_{F(B)} = F(1_B)$, deci $uv = 1_B$ întrucît F este fidel. Similar $vu = 1_A$.

Se numeşte *categorie supraiacentă* unei categorii date $\mathcal{C}_0$ o categorie $\mathcal{C}$ împreună cu un functor fidel $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$.

Astfel categoriile $\mathfrak{U}$-**G**, $\mathfrak{U}$-**A**, $\mathfrak{U}$-**Top** etc., sînt supraiacente lui $\mathfrak{U}$-**Ens**. Functorul γ este aici functorul care asociază cu orice obiect

(grup, spațiu topologic etc.) mulțimea subiacentă și cu orice morfism (omomorfism, aplicație continuă etc.) aplicația de mulțimi subiacentă. Evident, în orice categorie supraiacentă lui $\mathfrak{U}$ — **Ens**, morfismele pot fi considerate aplicații.

În categoriile supraiacente lui $\mathfrak{U}$-**Ens**, un morfism u se zice *injectiv* (*surjectiv*) dacă $\gamma(u)$ este injectiv (surjectiv) în $\mathfrak{U}$-**Ens**. Din propoziția 3.1 rezultă că orice morfism injectiv (surjectiv) este monomorfism (epimorfism). Reciproca nu este adevărată în general.

DEFINIȚIE. Un functor $i : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se numește *izomorfism de categorii* dacă :

1) i este deplin fidel,

2) aplicația $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ indusă de i este bijectivă.

Aceasta înseamnă că există un functor $j : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ satisfăcînd $ij = 1$ și $ji = 1$; se notează $j = i^{-1}$.

DEFINIȚIE. Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se numește *echivalență* de categorii dacă :

1) F este deplin fidel,

2) orice obiect A' în $\mathcal{C}'$ este izomorf cu un obiect de forma $F(A)$.

Orice izomorfism de categorii este o echivalență. Reciproca nu este adevărată cum se constată cu ușurință considerînd categorii în care fiecare mulțime $\mathrm{Hom}(A, B)$ conține un unic morfism.

Să mai observăm că dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este o echivalență, atunci există o echivalență $F' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ cum iarăși se constată cu ușurință. De asemenea compunerea a două echivalențe este tot o echivalență.

Dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este o echivalență, atunci proprietățile omologice, adică proprietățile definite cu ajutorul functorului Hom, sînt aceleași pentru $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$.

DEFINIȚIE. Fie $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ două categorii fixate. Dacă F și G sînt doi functori de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$, un *morfism functorial* sau *morfism de functori* $f : F \to G$ este o familie

$$f = (f(A))_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

de morfisme $f(A) : F(A) \to G(A)$ în $\mathcal{C}'$ astfel încît, pentru orice morfism $A \xrightarrow{u} B$ în $\mathcal{C}$, diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ {\scriptstyle F(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(u)} \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

i.e. $f(B)\, F(u) = G(u)\, f(A)$. Vom scrie uneori f_A în loc de $f(A)$. Morfismele $f(A) : F(A) \to G(A)$ se numesc *componentele* morfismului functorial f.

Morfismele functoriale se compun pe componente : dacă F, G, H sînt trei functori de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$ și dacă $f : F \to G$ și $g : G \to H$ sînt morfisme

functoriale, atunci $gf : F \to H$ este morfismul functorial definit prin $gf(A) = g(f(A))$. Această compunere este asociativă. De asemenea, pentru orice functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, avem morfismul identitate $1_F : F \to F$ definit prin $1_F(A) = 1_{F(A)}$ și evident 1_F este o unitate pentru compunerea morfismelor functoriale.

Astfel, date două categorii $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$, functorii de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$ și morfismele functoriale sînt obiectele și respectiv morfismele unei noi categorii care se notează Hom $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$, uneori $\mathcal{C}'^{\mathcal{C}}$, și se numește *categoria functorilor de la* $\mathcal{C}$ *în* $\mathcal{C}'$.

Dacă $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ sînt $\mathfrak{U}$-categorii, în general Hom $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ nu este $\mathfrak{U}$-categorie. Dar dacă, în plus, $\mathcal{C}$ este $\mathfrak{U}$-categorie mică, atunci Hom $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ este $\mathfrak{U}$-categorie. Într-adevăr, dacă F și G sînt functori de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$, atunci mulțimea Hom (F, G) a morfismelor functoriale de la F în G este o submulțime a produsului direct

$$\prod_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}\,(F(A), G(A))$$

care este un element din $\mathfrak{U}$ cînd $\mathcal{C}'$ este o $\mathfrak{U}$-categorie și $\mathcal{C}$ o $\mathfrak{U}$-categorie mică (în virtutea teoremei 1.1).

Notăm că, pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, avem un functor

$$\mathrm{pr}_A : \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \to \mathcal{C}',$$

numit *proiecția canonică* de indice A, definit prin

$$\mathrm{pr}_A(F) = F(A) \text{ și } \mathrm{pr}_A(f) = f(A)$$

pentru orice functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ și orice morfism $f : F \to G$ de functori de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$.

Izomorfismele în categoria Hom $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ se numesc *izomorfisme functoriale*. Evident, un morfism functorial $f : F \to G$ este un izomorfism functorial dacă și numai dacă $f(A) : F(A) \to G(A)$ este izomorfism în $\mathcal{C}'$ pentru orice $A \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$.

O *diagramă* este esențial un functor*). Dar se numesc diagrame în $\mathcal{C}$ mai ales functorii $D : I \to \mathcal{C}$ pentru care I este o categorie destul de simplă încît functorii D să poată fi „desenați".

Să considerăm de exemplu diagrama de tipul pătrat

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' \end{array}$$

*) În general, o diagramă (= un functor) $D : T \to \mathcal{C}$ se zice *comutativă* dacă, pentru orice cuplu de obiecte i, j în I și orice cuplu de morfisme $u, v \in \mathrm{Hom}\,(i, j)$ are loc egalitatea $D(u) = D(v)$.

Știm că o asemenea diagramă se zice comutativă dacă $u'f=g\,u$. Pentru a interpreta diagramele pătratice ca functori, să considerăm categoria I cu patru obiecte, 0, 1, 2, 3, și șase morfisme $0 \xrightarrow{\alpha} 1$, $0 \xrightarrow{\lambda} 2$, $0 \xrightarrow{\mu} 2$, $0 \xrightarrow{\beta} 3$, $1 \xrightarrow{\gamma} 2$ și $3 \xrightarrow{\delta} 2$, plus identitățile respective, și să definim compunerea morfismelor prin $\gamma\alpha = \lambda$ și $\delta\beta = \mu$. Atunci orice functor $D : I \to \mathcal{C}$ este o diagramă pătratică

$$\begin{array}{ccc} D(0) & \xrightarrow{D(\beta)} & D(3) \\ {\scriptstyle D(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D(\delta)} \\ D(1) & \xrightarrow{D(\gamma)} & D(2) \end{array}$$

iar dacă I este astfel încît $\lambda = \mu$, orice diagramă $D : I \to \mathcal{C}$ este comutativă.

După procedeul precedent se pot construi diagrame de diferite tipuri, comutative sau nu, *tipul* fiind dat de categoria I. Astfel de tipuri de diagrame vor fi considerate în cele ce urmează.

Întrucît diagramele sînt functori, putem vorbi de *categoria tuturor diagramelor* în $\mathcal{C}$ de un anume tip I.

De exemplu, diagramele în $\mathcal{C}$ de tipul $0 \to 1$ se identifică cu morfismele lui $\mathcal{C}$. De aceea categoria tuturor diagramelor de tipul $0 \to 1$ se notează tot $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ ca și mulțimea săgeților lui $\mathcal{C}$.

După definiția morfismelor functoriale, dacă $A \xrightarrow{u} B$ și $A' \xrightarrow{u'} B'$ sînt morfisme în $\mathcal{C}$, un morfism $\lambda : u \to u'$ este un cuplu $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ de morfisme $\lambda_0 : A \to A'$ și $\lambda_1 : B \to B'$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ {\scriptstyle \lambda_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_1} \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' \end{array}$$

Să mai observăm că avem functorii S și C de la $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ în $\mathcal{C}$ definiți astfel : dacă $A \xrightarrow{u} B$ este un morfism în $\mathcal{C}$, atunci $S(u) = A$ = sursa lui u și $C(u) = B$ = capătul lui u; dacă $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) : u \to u'$ este un morfism în categoria $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$, atunci $S(\lambda) = \lambda_0$ și $C(\lambda) = \lambda_1$. De asemenea, avem un morfism functorial $\theta : S \to C$ cu $\theta(u) = u$ pentru orice $u \in \mathrm{Fl}(\mathcal{C})$.

Vom scrie uneori „sursă u" în loc de $S(u)$ și „capăt u" în loc de $C(u)$, similar „sursă λ" și „capăt λ".

Compunerea la stînga cu un functor. Fie $\alpha : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ un functor. Pentru orice categorie I avem un functor

$$\alpha^* : \mathrm{Hom}\,(I, \mathcal{C}') \to \mathrm{Hom}\,(I, \mathcal{C})$$

care asociază cu orice functor $F : I \to \mathcal{C}'$, functorul $\alpha^*(F) = \alpha F : I \to \mathcal{C}$ și cu orice morfism functorial $\varphi : F \to G$ de componente φ_i, $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$,

morfismul functorial $\alpha^*(\varphi) = \alpha\varphi : \alpha F \to \alpha G$ de componente $\alpha(\varphi_i)$. Se verifică uşor că $\alpha\varphi$ este într-adevăr un morfism functorial.

Compunerea la dreapta cu un functor. Fie din nou un functor $\alpha : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$. Pentru orice categorie I, avem un functor

$$\alpha_* : \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}, I) \to \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}', I)$$

care asociază cu orice functor $F : \mathcal{C} \to I$ functorul $\alpha_*(F) = F\alpha : \mathcal{C}' \to I$ şi cu orice morfism functorial $\varphi : F \to G$ de componente $\varphi(A)$, $A \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$, morfismul functorial $\varphi\alpha : F\alpha \to G\alpha$ de componente $\varphi(\alpha(A'))$, $A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$. Se verifică imediat că $\varphi\alpha$ este într-adevăr un morfism functorial.

Evident, dacă $\alpha : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ şi $\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$, atunci

$$(\beta\alpha)^* = \beta^*\alpha^* \text{ şi } (\beta\alpha)_* = \alpha_*\beta_*.$$

În particular, cînd $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}'$ şi $\alpha\beta = 1$,

$$\beta^*\alpha^* = 1 \text{ şi } \alpha_*\beta_* = 1$$

întrucît, evident, $1^* = 1$ şi $1_* = 1$.

§ 4. Morfisme stricte

DEFINIŢIE. Dacă $A \xrightarrow{u} B$ şi $A' \xrightarrow{u'} B'$ sînt morfisme în $\mathcal{C}$, un morfism $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) : u \to u'$ se zice *omotop cu zero* (resp. *coomotop cu zero*) dacă există $h : B \to A'$ astfel încît $\lambda_0 = hu$ (resp. $\lambda_1 = u'h$).

Denumirea este împrumutată de la categorii aditive şi de aceea este într-un anume sens abuzivă.

Un morfism $\lambda : u \to u'$ care este simultan omotop şi coomotop cu zero se zice *trivial*.

De exemplu, dacă u este epimorfism, orice morfism omotop cu zero $\lambda : u \to u'$ este trivial, şi, în plus, h este unic determinat. Tot astfel dacă u este un monomorfism, orice morfism coomotop cu zero $\lambda : u \to u'$ este trivial. Rezultă că dacă u este epimorfism şi u' monomorfism, atunci, pentru orice morfism $\lambda : u \to u'$, „omotop cu zero" coincide cu „coomotop cu zero" şi cu „trivial".

Să mai observăm că $1_u : u \to u$ este omotop cu zero (resp. coomotop cu zero) dacă şi numai dacă u are un invers la stînga (resp. la dreapta). În particular, 1_u este trivial dacă şi numai dacă u este un izomorfism.

DEFINIŢIE. Un monomorfism $A' \xrightarrow{i} A$ în $\mathcal{C}$ se numeşte *monomorfism strict* dacă, pentru orice epimorfism $X' \xrightarrow{p} X$ în $\mathcal{C}$, toate morfismele $p \to i$ sînt triviale.

După cele precedente, este suficient să cerem, în această definiţie, ca toate morfismele $p \to i$ să fie omotope cu zero sau de asemenea ca toate morfismele $p \to i$ să fie coomotope cu zero.

TEOREMA 4.1. 1) *Izomorfismele coincid cu bijecțiile care sînt monomorfisme stricte.*

2) *Orice compus vu de monomorfisme stricte este monomorfism strict.*

3) *Dacă un compus vu este monomorfism strict, atunci u este monomorfism strict.*

Demonstrație. 1) Evident, orice izomorfism este un monomorfism strict. Invers, dacă avem o bijecție u care este un monomorfism strict, atunci în particular morfismul 1_u este trivial etc.

2) Fie $A \xrightarrow{u} B$ și $B \xrightarrow{v} C$ două monomorfisme stricte. După teorema 2.1, vu este monomorfism. Să considerăm o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ {\scriptstyle\lambda_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_1} \\ A & \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} & C \end{array}$$

cu p epimorfism. Întrucît v este monomorfism strict, există $h_1 : Y \to B$ astfel încît $u\lambda_0 = h_1 p$. Apoi, întrucît u este monomorfism strict, există $h : Y \to A$ astfel încît $\lambda_0 = hp$.

3) Să presupunem că vu este monomorfism strict și să considerăm o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ {\scriptstyle\lambda_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_1} \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

cu p epimorfism. Atunci avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ {\scriptstyle\lambda_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v\lambda_1} \\ A & \xrightarrow{vu} & C \end{array}$$

Întrucît vu este monomorfism strict, există $h : Y \to A$ astfel încît $\lambda_0 = hp$, ceea ce termină demonstrația teoremei.

Fie A un obiect în $\mathcal{C}$. Vom spune că două monomorfisme stricte $A_1 \xrightarrow{i_1} A$ și $A_2 \xrightarrow{i_2} A$ de capăt A sînt *echivalente* sau *canonic izomorfe* dacă există un izomorfism $\theta : A_1 \to A_2$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & {\scriptstyle i_1}\nearrow & & \nwarrow{\scriptstyle i_2} & \\ A_1 & & \xrightarrow{\theta} & & A_2 \end{array}$$

i.e. astfel încît $i_1 = i_2\theta$. Evident, axiomele unei relații de echivalență sînt îndeplinite și deci monomorfismele stricte de capăt A se împart în clase de echivalență.

Din fiecare clasă de echivalență de monomorfism stricte de capăt A *alegem* cîte un reprezentant. Presupunem că această alegere este astfel încît $\bar{1}_A$ reprezintă clasa sa de echivalență.

DEFINIȚIE. Reprezentanții aleși pentru clasele de monomorfisme stricte de capăt A se numesc *subobiecte* ale lui A.

Astfel un subobiect al lui A este în esență un cuplu (A', i) cu $A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ și $i : A' \to A$ un monomorfism strict ales. Prin abuz, vom spune că A' este un subobiect al lui A și că i este *monomorfismul canonic* sau *incluziunea* lui A'.

De exemplu, în categoria **U-Ens** orice monomorfism $A' \xrightarrow{i} A$ este strict și este echivalent cu incluziunea de mulțimi $i(A') \to A$. De aceea, în **U-Ens**, definim subobiectele unei mulțimi A ca fiind submulțimile lui A, iar incluziunile de subobiecte ca fiind incluziunile de mulțimi.

De asemenea, în **U-Ab**, subobiectele unui grup abelian G sînt subgrupurile lui G etc.

DEFINIȚIE. Dacă $A \to B$ este un morfism în $\mathcal{C}$, se numește *imagine* a lui u orice monomorfism strict $i : B' \to B$ cu proprietatea că există un epimorfism $p : A \to B'$ astfel încît $u = ip$.

Se vede atunci imediat că toate imaginile lui u (dacă există) aparțin aceleiași clase de echivalență de monomorfisme stricte de capăt B și epuizează această clasă de echivalență.

Urmează că dacă u are imagini, atunci există și este unic un subobiect (B', i) al lui B care este o imagine a lui u. Atunci B' se numește *imaginea* lui u și se notează

$$B' = \mathrm{Im}\ u,$$

iar i se cheamă *incluziunea* sau *monomorfismul canonic* al imaginii. Prin abuz vom nota

$$(B', i) = \mathrm{Im}\ u \text{ sau } i = \mathrm{Im}\ u.$$

PROPOZIȚIA 4.1. *Dacă u are imagine (i.e. dacă $u = ip$ cu i monomorfism strict și p epimorfism), atunci factorizarea $u = i_1 p_1$ cu i_1 monomorfism strict și p_1 epimorfism este unică pînă la un izomorfism de diagrame.*

Demonstrație. Avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_1} & I_1 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_1} \\ I & \xrightarrow{i} & B \end{array}$$

Întrucît i este monomorfism strict, există $\theta : I_1 \to I$ astfel încît $p = \theta p_1$ și $i_1 = i\theta$. Rezultă că θ este epimorfism și monomorfism strict, deci izomorfism, q.e.d.

Fie $A \xrightarrow{u} B$ și $A' \xrightarrow{u'} B'$ două morfisme astfel încît $I = \operatorname{Im} u$ și $I' = \operatorname{Im} u'$ există, și fie $\lambda : u \to u'$ un morfism în categoria Fl ($\mathcal{C}$). Din definiția imaginii și a monomorfismului strict rezultă că există și este unic un morfism $h : I \to I'$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{p} & I & \xrightarrow{i} & B \\ {\scriptstyle\lambda_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_1} \\ A' & \xrightarrow{p'} & I' & \xrightarrow{i'} & B' \end{array}$$

unde i și i' sînt incluziunile imaginilor, iar p și p' epimorfisme satisfăcînd $u = ip$ și $u' = i'p'$; vom defini

$$\operatorname{Im} \lambda = h.$$

Atunci, evident, Im este un functor de la subcategoria plină a lui Fl ($\mathcal{C}$) formată din morfismele $A \to B$ care au imagini, cu valori în categoria $\mathcal{C}$.

Noțiunile duale cu monomorfism strict, subobiect, incluziune, imagine, functorul Im sînt : *epimorfism strict*, *obiect cît*, *coincluziune* sau *epimorfism canonic* de obiect cît, *coimagine*, *functorul* Coim.

DEFINIȚIE. Un morfism $u : A \to B$ se zice *strict* dacă $u = \beta\alpha$ cu β monomorfism strict și α epimorfism strict.

PROPOZIȚIA 4.2. *Dacă u este un morfism strict, factorizarea $u = \beta_1\alpha_1$ cu β_1 monomorfism și α_1 epimorfism este unică pînă la un izomorfism de diagrame (în particular β_1 este monomorfism strict iar α_1 epimorfism strict)*

Demonstrație. Dacă $u = \beta\alpha$ cu β monomorfism strict și α epimorfism strict, avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & I \\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ I_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B \end{array}$$

Rezultă că există $\theta : I \to I_1$ astfel încît $\alpha_1 = \theta\alpha$ și $\beta = \beta_1\theta$. Din prima egalitate rezultă că θ este epimorfism, iar din a doua că θ este monomorfism strict. Din teorema 4.1 rezultă că θ este izomorfism etc.

Din definiție rezultă că orice monomorfism strict este un morfism strict. Din propoziția precedentă rezultă că invers, dacă $u : A \to B$ este un morfism strict și un monomorfism, atunci u este un monomorfism strict. Similar pentru epimorfisme stricte.

Să mai observăm că dacă $u = \beta\alpha$ cu β monomorfism strict și α epimorfism strict, atunci β este o imagine a lui u iar α o coimagine a lui u.

Fie $u : A \to B$ un morfism astfel încît Im u și Coim u există. Atunci avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q} & \text{Coim } u \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \text{Im } u & \xrightarrow{i} & B \end{array}$$

unde i este incluziunea imaginii, q epimorfismul canonic al coimaginii, iar p un epimorfism și j un monomorfism satisfăcînd $u = ip = jq$. Rezultă că există și este unic un morfism

$$\bar{u} : \text{Coim } u \to \text{Im } u$$

satisfăcînd $p = \bar{u}q$ și $j = i\bar{u}$; în particular $\bar{u}$ este bijecție și $u = i\bar{u}q$.

$\bar{u}$ se numește *morfism canonic* sau *bijecție canonică* de la Coim u în Im u, iar egalitatea

$$u = i\bar{u}q$$

care determină în mod univoc pe $\bar{u}$ se numește *factorizare canonică* a lui u.

PROPOZIȚIA 4.3. *Proprietățile următoare ale unui morfism* $u : A \to B$ *sînt echivalente* :

i) *u este un morfism strict.*

ii) Im u *și* Coim u *există și* $\bar{u}$: Coim $u \to$ Im u *este izomorfism.*

Demonstrație. i) $\Rightarrow$ ii). Dacă $u = \beta\alpha$ cu β monomorfism strict și α epimorfism strict atunci β este o imagine a lui u iar α o coimagine a lui u, deci factorizarea canonică $u = i\bar{u}q$ există. Apoi, din propoziția precedentă, rezultă că $\bar{u}q$ este epimorfism strict, deci $\bar{u}$ este o bijecție strictă, deci un izomorfism.

ii) $\Rightarrow$ i). Factorizarea canonică $u = i\bar{u}q$ există și u este izomorfism, deci $u = i\,(\bar{u}q)$ este strict.

§ 5. Functori reprezentabili

LEMA 5.1. *Fie* I, J și $\mathcal{C}$ *trei categorii. Avem un izomorfism canonic de categorii*

$$u : \text{Hom } (I \times J, \mathcal{C}) \tilde{\to} \text{Hom } (J, \mathcal{C}^I).$$

Demonstrație. Vom defini functorul u după cum urmează.

Dacă $t : J \to \mathcal{C}^I$ este un functor, vom nota t_j valoarea lui t pentru obiectul j în J și t_v valoarea lui t pentru morfismul v în J. De asemenea,

pentru orice morfism $\varphi : t \to t'$ de functori de la J în $\mathcal{C}^I$, vom nota $\varphi_j : t_j \to t'_j$ componentele lui φ, $j \in \mathrm{Ob}\,(J)$.

Fie $T : I \times J \to \mathcal{C}$ un functor. Definim functorul $u\,(T) = t$ astfel : Dacă $j \in \mathrm{Ob}\,(J)$, t_j este obiectul în $\mathcal{C}^I$ cu $t_j(i) = T\,(i, j)$ şi $t_j\,(u) = T\,(u, j)$ pentru orice $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$, şi orice $u \in \mathrm{Fl}\,(I)$. Apoi dacă $v : j_1 \to j_2$ este un morfism în J, $t_v : t_{j1} \to t_{j2}$ este morfismul functorial de componente $t_v\,(i) = T\,(i, v)$, $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$. Am folosit notaţiile $T\,(u, j) = T\,(u, 1_j)$ şi $T\,(i, v) = T\,(1_i, v)$. Se verifică uşor că t_v este într-adevăr un morfism functorial, deci $u\,(T) = t$ este definit.

Evident u este un functor.

Fie acum $\Phi : T \to T'$ un morfism functorial în $\mathcal{C}^{I \times J} = \mathrm{Hom}\,(I \times J, \mathcal{C})$ şi fie $t = u\,(T)$ şi $t' = u\,(T')$. Definim $\varphi = u\,(\Phi)$ astfel : Pentru orice $j \in \mathrm{Ob}\,(J)$, $\varphi_j : t_j \to t'_j$ este morfismul functorial de componente $\varphi_j\,(i) = \Phi\,(i, j)$, $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$.

Evident, aplicaţia $\Phi \rightsquigarrow u\,(\Phi)$ indusă de u este bijectivă, deci u este deplin fidel.

De asemenea aplicaţia

$$\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}^{I \times J}) \to \mathrm{Ob}\,((\mathcal{C}^I)^J)$$

indusă de u este bijectivă. Anume, inversa acestei aplicaţii asociază, cu orice functor $t : J \to \mathcal{C}^I$, functorul $T : I \times J \to \mathcal{C}$ definit prin

$$T\,(i, j) = t_j\,(i) \text{ şi } T\,(u, v) = t_v\,(i_2)\,t_{j_1}\,(u) = t_{j_2}\,(u)\,t_v\,(i_1)$$

pentru orice cuplu $(i, j) \in \mathrm{Ob}\,(I \times J)$ şi orice cuplu $(u, v) \in \mathrm{Fl}\,(I \times J)$, $u : i_1 \to i_2$ şi $v : j_1 \to j_2$.

COROLAR. *Avem un izomorfism canonic de categorii*

$$\theta : \mathrm{Hom}\,(J, \mathcal{C}^I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(I, \mathcal{C}^J)$$

definit prin $\theta\,(t) = s$ *cu* $s_i = \mathrm{pr}_i\,t = T\,(i)$, *şi* $s_u = T\,(u, .)$ *pentru orice* $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$ *şi* $u \in \mathrm{Fl}\,(I)$, i.e. $s_i\,(j) = t_j\,(i)$ *şi* $s_u\,(j) = t_j\,(u)$ *pentru orice* $j \in \mathrm{Ob}\,(J)$.

Reamintim că functorul

$$\mathrm{pr}_i : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$$

se defineşte prin

$$\mathrm{pr}_i\,(F) = F\,(i) \text{ şi } \mathrm{pr}_i\,(f) = f\,(i)$$

pentru orice functor $F : I \to \mathcal{C}$ şi orice morfism $f : F \to G$ de functori de la I în $\mathcal{C}$.

Fiind dată o $\mathfrak{U}$-categorie $\mathcal{C}$, avem functorul

$$\mathrm{Hom} : \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens}$$

căruia i se asociază, după lema precedentă, un functor

$$h : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}} = \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}^\circ, \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens})$$

(egalitatea este o definiție) care asociază cu orice obiect X în $\mathcal{C}$ functorul $h_X = \mathrm{Hom}\ (., X) : \mathcal{C}^\circ \to$ **Ul-Ens** și cu orice morfism $f : X \to Y$ în $\mathcal{C}$ morfismul functorial

$$h_f : h_X \to h_Y$$

cu

$h_f(A) = \mathrm{Hom}\ (A, f)$ = compunerea cu f la stînga pentru orice $A \in \mathrm{Ob}\ (\mathcal{C})$.

Observăm că pentru orice morfism $g : A \to B$ în $\mathcal{C}$, $h_X(g) = \mathrm{Hom}\ (g, X)$ este compunerea cu g la dreapta.

TEOREMA 5.1. (Teorema lui Yoneda). *Pentru orice functor contravariant* $F : \mathcal{C}^\circ \to$ **Ul-Ens** *și orice obiect* X *în* $\mathcal{C}$, *aplicația*

$$\alpha : \mathrm{Hom}\ (h_X, F) \to F(X)$$

definită prin $\alpha(v) = v(X)\ (1_X)$ *este bijectivă* *).

Demonstrație. Vom defini o aplicație

$$\beta : F(X) \to \mathrm{Hom}\ (h_X, F)$$

după cum urmează.

Fie $\xi \in F(X)$. Atunci

$$\beta(\xi) : h_X \to F$$

este morfismul functorial astfel încît, pentru orice $A \in \mathrm{Ob}\ (\mathcal{C})$,

$$\beta(\xi)(A) : \mathrm{Hom}\ (A, X) \to F(A)$$

este aplicația care asociază cu orice morfism $f : A \to X$ elementul

$$\beta(\xi)(A)(f) = F(f)(\xi).$$

Să arătăm că $\beta(\xi)$ este într-adevăr un morfism functorial. Fie $u : A \to B$ un morfism în $\mathcal{C}$. Avem de arătat că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\ (A, X) & \xrightarrow{v(A)} & F(A) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(u, X)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle F(u)} \\ \mathrm{Hom}\ (B, X) & \xrightarrow{v(B)} & F(B) \end{array}$$

unde $v(A) = \beta(\xi)(A)$ și $v(B) = \beta(\xi)(B)$.

Or, pentru orice $g \in \mathrm{Hom}\ (B, X)$, avem

$$v(A)\ (gu) = F(gu)(\xi) = (F(u)\ F(g))(\xi)$$
$$= F(u)(F(g)(\xi)) = F(u)\ (v(B)(g))$$

---

*) Un simbol de forma $f(x)(y)$ are semnificația următoare : $f(x)$ este o aplicație de mulțimi, iar $f(x)(y)$ este valoarea acestei aplicații pentru elementul y aparținînd sursei lui $f(x)$; prin recurență se definesc simboluri de forma $f(x)(x_1) \ldots (x_n)$ pentru orice întreg $n > 0$.

ceea ce probează comutativitatea diagramei precedente.

Vom arăta acum că $\alpha\beta = 1$ şi $\beta\alpha = 1$.

Fie mai întîi $\xi \in F(X)$. Atunci, pentru $v = \beta(\xi)$, avem

$$\alpha(\beta(\xi)) = \alpha(v) = v(X)(1_X) =$$

$$= \beta(\xi)(X)(1_X) = F(1_X)(\xi) = 1_{F(X)}(\xi) = \xi$$

i.e. $\alpha\beta = 1$.

Să arătăm, în sfîrşit, că $\beta\alpha = 1$, deci că, pentru orice morfism functorial $v : h_X \to F$,

$$\beta(\alpha(v)) = v,$$

deci că

$$F(f)(\xi) = v(A)(f)$$

pentru orice $f : A \to X$ în $\mathcal{C}$.

Or, întrucît $v : h_X \to F$ este un morfism functorial şi $f : A \to X$ un morfism în $\mathcal{C}$, avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\,(A, X) & \xrightarrow{v(A)} & F(A) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(f,\,X)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle F(f)} \\ \mathrm{Hom}\,(X, X) & \xrightarrow{v(B)} & F(X) \end{array}$$

din care rezultă, luînd imaginea lui 1_X pe cele două drumuri, că $F(f)(\xi) = v(A)(f)$, ceea ce termină demonstraţia teoremei.

Vom scrie uneori α_F şi β_F în loc de α şi β.

Observaţie. Se poate vedea uşor că bijecţia α (deci şi β) este functorială în X şi F.

Să considerăm cazul particular $F = h_Y$, unde $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. În acest caz, pentru orice cuplu de obiecte X, Y în $\mathcal{C}$, aplicaţia

$$\beta : \mathrm{Hom}\,(X, Y) \to \mathrm{Hom}\,(h_X, h_Y)$$

este aplicaţia $\xi \rightsquigarrow h_\xi$ indusă de functorul h. Într-adevăr, pentru orice $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ şi orice $f : A \to X$ în $\mathcal{C}$,

$$\beta(\xi)(A)(f) = h_X(f)(\xi) = \xi f,$$

i.e. $\beta(\xi)(A)$ este compunerea cu ξ la stînga ca şi $h_\xi(A)$.

Cum aplicaţia $\beta(\xi)(A)$ este bijectivă, avem următorul

COROLAR. *Functorul* $h : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ *este deplin fidel.*

DEFINIŢIE. Cînd $F : \mathcal{C}^\circ \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens}$ este un functor contravariant, vom spune că un cuplu (X, ξ) cu $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ şi $\xi \in F(X)$ *reprezintă* pe F dacă morfismul functorial

$$\beta(\xi) : h_X \to F$$

este izomorfism, i.e. dacă, pentru orice $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, aplicația

$$\mathrm{Hom}(A, X) \to F(A)$$

definită prin $f \rightsquigarrow F(f)(\xi)$ este bijectivă.

Vom spune că F este *reprezentabil* dacă există un cuplu (X, ξ) care reprezintă pe F, i.e. dacă există un $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ și un izomorfism functorial $h_X \approx F$.

Prin abuz, vom spune că X reprezintă pe F dacă există $\xi \in F(X)$ astfel încît (X, ξ) reprezintă pe F. În virtutea teoremei 5.1 aceasta înseamnă de asemenea că există un izomorfism functorial $v : h_X \xrightarrow{\sim} F$ iar $\xi = v(X)(1_X)$.

Corolarul precedent spune că *functorul h induce o echivalență între $\mathcal{C}$ și subcategoria plină a lui $\hat{\mathcal{C}}$ formată din functorii reprezentabili.*

Dacă $u : F \to G$ este un morfism în $\hat{\mathcal{C}}$ și dacă F este reprezentat de (X, ξ) și G de (Y, η), atunci β_F și β_G fiind izomorfisme functoriale și h fiind deplin fidel, există și este unic un morfism $f : X \to Y$ astfel încît să avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} h_X & \xrightarrow{\beta_F(\xi)} & F \\ {\scriptstyle h_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ h_Y & \xrightarrow{\beta_G(\eta)} & G \end{array}$$

Atunci, în particular, avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(X, X) & \xrightarrow{\beta_F(\xi)(X)} & F(X) \\ {\scriptstyle h_f(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u(X)} \\ \mathrm{Hom}(X, Y) & \xrightarrow{\beta_G(\eta)(X)} & G(X) \end{array}$$

Luînd imaginea lui 1_X pe cele două drumuri, obținem egalitatea

$$u(X)(\xi) = G(f)(\eta)$$

care reprezintă un alt mod de a defini pe f (întrucît aplicația $g \rightsquigarrow G(g)(\eta)$ este bijectivă).

DEFINIȚIE. În situația descrisă mai sus vom spune că $f : X \to Y$ *reprezintă* morfismul functorial $u : F \to G$.

În particular, dacă $F = G$, morfismul $f : X \to Y$ care reprezintă pe 1_F este un izomorfism (în virtutea propoziției 3.1) și satisface

$$\xi = F(f)(\eta).$$

Astfel cuplul (X, ξ) care reprezintă un functor contravariant $F : \mathcal{C}^\circ \to$ **Ul-Ens** este *unic determinat* pînă la un izomorfism f, unic determinat prin egalitatea precedentă, numit *izomorfism canonic.*

Functorul h pentru categoria duală $\mathcal{C}^\circ$ se notează $\overset{\circ}{h}$, deci

$$\overset{\circ}{h} : \mathcal{C}^\circ \to \text{Hom } (\mathcal{C}, \text{Ul-Ens}),$$

deci $\overset{\circ}{h}_X = \text{Hom } (X,.)$, $\overset{\circ}{h}_f (A) =$ compunerea cu f la dreapta, iar $\overset{\circ}{h}_X (g) =$ = compunerea cu g la stînga.

Rezultă că duala teoremei 5.1 este

TEOREMA 5.1′. *Pentru orice functor covariant* $F : \mathcal{C} \to$ **Ul-Ens** *și orice obiect* X *în* $\mathcal{C}$, *aplicația*

$$\overset{\circ}{\alpha} : \text{Hom } (\overset{\circ}{h}_X, F) \to F (X)$$

definită prin $\overset{\circ}{\alpha} (v) = v (X) (1_X)$ *este bijectivă și are drept inversă aplicația* $\overset{\circ}{\beta}$ *definită prin* $\overset{\circ}{\beta} (\xi) (A) (f) = F (f) (\xi)$ *pentru orice* $A \in \text{Ob } (\mathcal{C})$ *și* $f \in \overset{\circ}{h}_X (A) = \text{Hom } (X, A)$.

Vom spune despre un cuplu (X, ξ) cu $X \in \text{Ob } (\mathcal{C})$ și $\xi \in F (X)$ că *reprezintă* un functor covariant $F : \mathcal{C} \to$ **Ul-Ens** dacă morfismul functorial

$$\overset{\circ}{\beta} (\xi) : \overset{\circ}{h}_X \to F$$

este un izomorfism, i. e. dacă, pentru orice $A \in \text{Ob } (\mathcal{C})$, aplicația

$$\overset{\circ}{\beta} (\xi) (A) : \text{Hom } (X, A) \to F (A)$$

definită prin

$$f \rightsquigarrow F (f) (\xi)$$

este bijectivă.

Vom spune că un functor covariant $F : \mathcal{C} \to$ **Ul-Ens** este *reprezentabil* dacă există un cuplu (X, ξ) care-l reprezintă. Aceasta înseamnă că există un izomorfism functorial

$$v : \overset{\circ}{h}_X \to F$$

iar $\xi = v (X) (1_X)$, deci $v = \overset{\circ}{\beta} (\xi)$.

§ 6. Functori adjuncți

DEFINIȚIE. Fie $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ un functor. Vom spune că *adjunctul la dreapta* j al lui i este definit în X dacă functorul contravariant

$$h_X i^\circ : \mathcal{C}'^\circ \xrightarrow{i^\circ} \mathcal{C}^\circ \xrightarrow{h_X} \text{Ul-Ens}$$

este reprezentabil.

Aceasta înseamnă că există un cuplu $(j(X), \xi_X)$ cu $j(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ și $\xi_X \in h_X(ij(X)) = \mathrm{Hom}(ij(X), X)$ care reprezintă pe $h_X i^\circ$, i.e. avem un izomorfism functorial

$$v : h_{j(X)} \xrightarrow{\sim} h_X i^\circ$$

și anume

$$v = \beta(\xi_X),$$

deci pentru orice $T' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$, aplicația

$$\beta(\xi_X)(T') : \mathrm{Hom}(T', j(X)) \to \mathrm{Hom}(i(T'), X)$$

definită prin

$$f \rightsquigarrow \xi_X i(f) = h_X(i(f))(\xi_X)$$

este bijectivă : pentru orice morfism $g : i(T') \to X$ în $\mathcal{C}$, există și este unic un morfism $f : T' \to j(X)$ în $\mathcal{C}'$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} & i(T') & \\ {\scriptstyle i(f)}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle g} \\ ij(X) & \xrightarrow{\xi_X} & X \end{array}$$

ξ_X se numește *morfismul canonic al lui* X. Notăm că, dat izomorfismul functorial v, morfismul canonic se obține prin formula

$$\xi_X = v(j(X))(1_{j(X)}).$$

Dacă $(\overline{j}(X), \overline{\xi}_X)$ este un alt cuplu care reprezintă functorul $h_X i^\circ$, atunci, după paragraful precedent, avem un *izomorfism canonic* $\theta : \overline{j}(X) \xrightarrow{\sim} j(X)$, i.e. un izomorfism θ astfel încît

$$\overline{\xi}_X = \xi_X i(\theta),$$

deci astfel încît diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} & ij(X) & \\ {\scriptstyle i(\theta)}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \overline{\xi}_X} \\ ij(X) & \longrightarrow & X \end{array}$$

În particular, cînd $\overline{\xi}_X$ este izomorfism (monomorfism etc.), atunci ξ_X este izomorfism (monomorfism etc.).

Astfel, cuplul care reprezintă pe $h_X i^\circ$ este unic determinat pînă la izomorfisme canonice. De aceea, dacă adjunctul la dreapta al lui i este definit în X, *se alege* un cuplu bine determinat $(j(X), \xi_X)$ care reprezintă pe $h_X i^\circ$.

Să observăm că $P_X = h_X i^\circ$ este un functor în X. Anume, dacă $f : X \to Y$ este un morfism în $\mathcal{C}$, avem un morfism functorial

$$P_f : P_X \to P_Y$$

definit prin egalitatea

$$P_f = h_f i^\circ = \mathrm{Hom}\ (i(.), f)$$

deci, pentru orice $T' \in \mathrm{Ob}\ (\mathcal{C}')$,

$$P_f(T') = \mathrm{Hom}\ (i(T'), f)$$

este compunerea cu f la stînga.

Să presupunem că adjunctul la dreapta al lui i este definit în X și Y, i.e. P_X este reprezentat de un cuplu $(j(X), \xi_X)$ iar P_Y de un cuplu $(j(Y), \xi_Y)$. Dacă $f : X \to Y$ este un morfism în $\mathcal{C}$, avem un unic morfism

$$j(f) : j(X) \to j(Y)$$

care reprezintă morfismul functorial $P_f : P_X \to P_Y$.

Din paragraful precedent rezultă că $j(f)$ este unicul morfism astfel încît

$$P_f(j(X))(\xi_X) = P_Y(j(f))(\xi_Y),$$

i.e. astfel încît

$$f \xi_X = \xi_Y ij(f),$$

i.e. astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} ij(X) & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle ij(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ ij(Y) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Fie $\mathcal{C}_1$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată din obiectele X pentru care adjunctul la dreapta j al lui i este definit în X. Din cele precedente rezultă că $j : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}'$ este un functor, iar $\xi : ij \to \varepsilon$ un morfism functorial (i.e. ξ_X este functorial în X), unde $\varepsilon : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$ este functorul de incluziune.

Cazul $\mathcal{C}_1$ = categoria vidă nu este exclus.

Definiție. Vom spune că adjunctul la dreapta j al lui i *există* (sau că *i are un adjunct la dreapta*) dacă $j(X)$ este definit prin orice $X \in \mathrm{Ob}\ (\mathcal{C})$, i.e. dacă $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$.

Propoziția 6.1. *Dacă adjunctul la dreapta j al lui i există, atunci bijecția*

$$\beta(\xi_X)(T') : \mathrm{Hom}\ (T', j(X)) \to \mathrm{Hom}\ (i(T'), X)$$

este functorială în X și T', i.e. este un izomorfism de functori de la $\mathcal{C}'^\circ \times \mathcal{C}$ în **Ul-Ens**.

Demonstrație. Știm că bijecția $\beta(\xi_X)(T')$ este functorială în T'. Fie acum T' fix și $X \xrightarrow{f} Y$ un morfism în $\mathcal{C}$. Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\ (T', j(X)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\ (i(T'), X) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(T',\, j(f))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(i(T'),\, f)} \\ \mathrm{Hom}\ (T', j(Y)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\ (i(T'), Y) \end{array}$$

Întrucît $\xi_Y\, ij(f) = f\xi_X$, se vede imediat că această diagramă este comutativă, i.e. bijecția $\beta(\xi_X)(T')$ este functorială în X etc.

Noțiunea duală este cea de *adjunct la stînga*. Dacă $j : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este un functor, vom spune că *adjunctul la stînga* i al lui j este definit în $T' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ dacă adjunctul la dreapta i° al lui j° este definit în T'.

Rezultă că adjunctul la stînga i al lui j este definit în T' dacă functorul covariant

$$\mathcal{C} \xrightarrow{j} \mathcal{C}' \xrightarrow{\overset{\circ}{h}_{T'}} \mathfrak{U}\text{-Ens}$$

este reprezentabil.

Aceasta înseamnă că există un cuplu $(i(T'), \eta_{T'})$ cu $i(T') \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ și $\eta_{T'} \in \overset{\circ}{h}_{T'}(ji(T')) = \mathrm{Hom}\ (T', ji(T'))$ care reprezintă pe $\overset{\circ}{h}_{T'} j$, i.e. avem un izomorfism functorial

$$u : \overset{\circ}{h}_{i(T')} \simeq \overset{\circ}{h}_{T'} \cdot j$$

iar $\eta_{T'} = u(i(T'))\,(1_{i(T')})$ și $u = \overset{\circ}{\beta}(\eta_{T'})$, i.e., pentru orice $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, aplicația

$$\overset{\circ}{\beta}(\eta_{T'})(X) : \mathrm{Hom}\ (i(T'), X) \to \mathrm{Hom}\ (T', j(X))$$

definită prin

$$g \rightsquigarrow j(g)\, \eta_{T'}$$

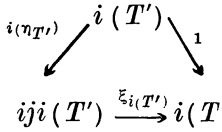
este bijectivă : pentru orice morfism $f : T' \to j(X)$ în $\mathcal{C}'$ există și este unic un morfism $g : i(T') \to X$ în $\mathcal{C}$ astfel încît să avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\eta_{T'}} & ji(T') \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle j(g)} & \\ & j(X) & \end{array}$$

etc.

Să presupunem că, pentru un functor $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, adjunctul la dreapta j al lui i există. După propoziția 6.1, pentru X fix, bijecția $\beta(\xi_X)(T')$ este functorială în T'. Din cele precedente rezultă că, dacă pentru orice $T' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$, $\eta_{T'} : T' \to ji(T')$ este contraimaginea lui $1_{i(T')}$ prin $\beta(\xi_{i(T')})(T')$,

i.e. dacă $\eta_{T'}$ este unicul morfism astfel încît diagrama următoare este comutativă



atunci cuplul $(i(T'), \eta_{T'})$ reprezintă functorul covariant $\overset{\circ}{h}_{T'} j$ (deci i este un adjunct la stînga al lui j), iar bijecțiile

$$\beta(\xi_X)(T') \text{ și } \overset{\circ}{\beta}(\eta_{T'})(X),$$

i.e. bijecțiile

$$f \rightsquigarrow \xi_X i(f) \text{ și } g \rightsquigarrow j(g)\, \eta_{T'}$$

sînt inverse una alteia.

Propoziția 6.2. *Condițiile următoare pentru un cuplu de functori* $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ *și* $j : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *satisfăcînd* $ij = 1$ *sînt echivalente*:

1) j *este un adjunct la dreapta al lui* i.

2) *pentru orice* $T' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ *și orice* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, *aplicația*

$$\mathrm{Hom}(T', j(X)) \to \mathrm{Hom}(i(T'), X)$$

indusă de i [i.e. definită prin $f \rightsquigarrow i(f)$] *este bijectivă.*

Demonstrație. 1) $\Rightarrow$ 2). Pentru orice $T' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$, aplicația

$$\mathrm{Hom}(T', j(X)) \to \mathrm{Hom}(i(T'), X)$$

definită prin $f \rightsquigarrow \xi_X i(f)$ este bijectivă. În particular, pentru $T' = j(X)$, rezultă că există un morfism θ astfel încît $\xi_X i(\theta) = 1$, deci $\xi_X : X \to X$ este epimorfism strict.

Apoi, fie $T \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} X$ o diagramă astfel încît $\xi_X f_1 = \xi_X f_2$. Întrucît $f_1 = ij(f_1)$ și $f_2 = ij(f_2)$ și întrucît aplicația $f \rightsquigarrow \xi_X i(f)$ este bijectivă, rezultă că avem $j(f_1) = j(f_2)$, deci $f_1 = f_2$, i.e. ξ_X este monomorfism.

Astfel ξ_X este o bijecție strictă, deci un izomorfism etc.

2) $\Rightarrow$ 1). Condiția 2) spune că j este un adjunct la dreapta al lui i cu $\xi_X = 1_X$ pentru orice $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$; în particular, j este deplin fidel.

Dacă j este un adjunct la dreapta al lui i și satisface $ji = 1$, atunci j° este un adjunct la stînga al lui i° și satisface $j^\circ i^\circ = 1$. Rezultă că duala propoziției precedente este

Propoziția 6.2.′ *Condițiile următoare pentru un cuplu de functori* $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ *și* $j : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *satisfăcînd* $ji = 1$ *sînt echivalente*

1) j *este un adjunct la dreapta al lui* i.

2) *Pentru orice* $T' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ *și orice* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, *aplicația*

$$\mathrm{Hom}(i(T'), X) \to \mathrm{Hom}(T', j(X))$$

indusă de j [i.e. definită prin $g \rightsquigarrow j(g)$] *este bijectivă.*

COROLAR. *Dacă* $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ *este izomorfism de categorii, atunci* $j = i^{-1}$ *este un adjunct la dreapta și la stînga al lui* i.

Exemple. Considerăm functorii

$$\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{G} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{M} \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens},$$

unde α și β sînt incluziuni, iar γ functorul canonic de supraiacență.

Adjuncții la stînga γ', β', α' ai lui γ, β, α există și anume, dacă S este o mulțime, M un monoid și G un grup, $\gamma'(S)$ este *monoidul liber* generat de S, $\beta'(M)$ *grupul asociat* lui M, iar $\alpha'(G)$ *grupul abelian* asociat lui G; în plus $\beta'\beta = 1$ și $\alpha'\alpha = 1$.

Vom mai arăta cum se compun functorii adjuncți.

Să considerăm doi functori

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{i'} \mathcal{C} \xrightarrow{i''} \mathcal{C}''$$

și fie $i = i''\,i'$. Vom nota j', j'', j adjuncții la dreapta ai lui i', i'', i.

PROPOZIȚIA 6.3. *Presupunem că* j'' *este definit în* $T'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}'')$. *Atunci* j *este definit în* T'' *dacă și numai dacă* j' *este definit în* $j''(T'')$ *și în acest caz avem*

$$j(T'') = j'(j''(T'')).$$

Demonstrație. Întrucît j'' este definit în T'', avem o bijecție

$$\mathrm{Hom}(X, j''(T'')) \simeq \mathrm{Hom}(i''(X), T'')$$

functorială în $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Dacă j este definit în T'', atunci avem o bijecție

$$\mathrm{Hom}(T', j(T'')) \simeq \mathrm{Hom}(i(T'), T'')$$

functorială în $T' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$. Luînd $X = i'(T')$, deci $i''(X) = i''(i'(T')) = i(T')$, rezultă că avem o bijecție

$$\mathrm{Hom}(T'' j(T'')) \simeq \mathrm{Hom}(i(T'), j''(T''))$$

functorială în T', i.e. j' este definit în $j''(T'')$ și $j'(j''(T'')) = j(T'')$.

Invers, dacă j' este definit în $j''(T'')$, avem o bijecție

$$\mathrm{Hom}(T', j'j''(T'')) \simeq \mathrm{Hom}(i'(T'), j''(T''))$$

functorială în T'. Luînd din nou $X = i'(T')$, obținem, prin compunere, o bijecție

$$\mathrm{Hom}(T', j'j''(T'')) \simeq \mathrm{Hom}(i(T'), T''),$$

functorială în T', ceea ce atestă că j este definit în T'' și $j(T'') = j'j''(T'')$.

Observație. Din ultima parte a demonstrației și din definiția morfismelor cononice rezultă imediat că avem

$$\xi_{T''} = \xi''_{T''}\, i''\,(\xi'_{j''(T'')}),$$

unde semnificația notațiilor este evidentă.

§ 7. Limite proiective și inductive

Pentru orice cuplu de categorii I și $\mathcal{C}$, vom nota în mod ambiguu prin c functorul

$$\mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$$

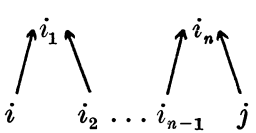
care corespunde prin izomorfismul canonic $\mathrm{Hom}\,(I \times \mathcal{C}, \mathcal{C}) \simeq \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}, \mathcal{C}^I)$ functorului $\mathrm{pr}_2 : I \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Functorul c asociază cu orice obiect A în $\mathcal{C}$ obiectul $c_A = \mathrm{pr}_2\,(., A)$ în $\mathcal{C}^I$, deci $c_A\,(i) = \mathrm{pr}_2\,(i, A) = A$ și $c_A\,(u) = \mathrm{pr}_2\,(u, 1_A) = 1_A$ pentru orice $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$ și orice $u \in \mathrm{Fl}\,(I)$. De asemenea c asociază cu orice morfism $f : A \to B$ în $\mathcal{C}$, morfismul functorial $c_f : c_A \to c_B$ cu $c_f\,(i) = \mathrm{pr}_2\,(i, f) = f$ pentru orice $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$.

Evident, cînd f este monomorfism (resp. epimorfism) în $\mathcal{C}$, c_f este monomorfism (resp. epimorfism) în $\mathcal{C}^I$.

Evident, c este *fidel*, dar în general nu deplin fidel.

DEFINIȚIE. O categorie I se numește *conexă* dacă este nevidă și dacă pentru orice cuplu de obiecte i, j în I există o diagramă în I de forma



i.e. i și j pot fi unite printr-un șir finit de săgeți în I.

LEMA 7.1. *Cînd I este conexă, functorul $c : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$ este deplin fidel.*

Demonstrație. Fie $u : c_A \to c_B$ un morfism functorial. Avem de arătat că există $f : A \to B$ astfel încît $u = c_f$ sau, echivalent, că $u\,(i) = u\,(j)$ pentru orice cuplu de obiecte i, j în I. Dacă există un morfism $i \to j$ sau un morfism $j \to i$, atunci, întrucît u este morfism functorial, avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A} & A \\ {\scriptstyle u(i)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u(i)} \\ B & \xrightarrow{1_B} & B \end{array}$$

deci $u(i) = u(j)$. Întrucît I este conexă, avem prin recurență $u(i) = u(j)$ în general.

DEFINIȚIE. Se numește *componentă conexă* a unei categorii nevide I o subcategorie plină conexă I_1 cu proprietatea că orice subcategorie plină conexă a lui I care conține pe I_1 este egală cu I_1.

Pentru orice $i \in \mathrm{Ob}(I)$ există, evident, o componentă conexă și numai una care conține pe i.

Următoarele trei cazuri particulare pentru I vor avea o mare importanță în cele ce urmează.

Cazul 1). I este o categorie *discretă* : componentele conexe ale lui I sînt punctuale (i. e. orice morfism în I este o unitate). Categoria vidă se consideră discretă.

Orice categorie discretă I va fi identificată cu mulțimea $\mathrm{Ob}(I)$.

Dacă I este discretă, un obiect în $\mathcal{C}^I$ este o familie $F = (A_i)_{i \in I}$ de obiecte în $\mathcal{C}$, iar un morfism în $\mathcal{C}^I$ este o familie $(A_i \to B_i)_{i \in I}$ de morfisme în $\mathcal{C}$.

Cazul 2). I este categoria $0 \rightrightarrows 1$ cu două obiecte 0 și 1 și două morfisme de la 0 în 1 (plus identitățile lui 0 și 1).

În acest caz un obiect oarecare în $\mathcal{C}^I$ este o diagramă în $\mathcal{C}$ de forma

$$F : A \rightrightarrows B$$

i.e. este un cuplu de săgeți cu aceeași sursă și același capăt.

În particular, pentru orice obiect X în $\mathcal{C}$, c_X este diagrama

$$X \underset{1_X}{\overset{1_X}{\rightrightarrows}} X$$

Un morfism $\lambda : F' \to F$ în $\mathcal{C}^I$ este un cuplu $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ de morfisme $\lambda_0 : A' \to A$ și $\lambda_1 : B' \to B$ astfel încît diagrama următoare este *comutativă*

$$\begin{array}{ccc} A' & \overset{\alpha'}{\underset{\beta'}{\rightrightarrows}} & B' \\ {\scriptstyle\lambda_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_1} \\ A & \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} & B \end{array}$$

i.e. astfel încît $\alpha\lambda_0 = \lambda_1\alpha'$ și $\beta\lambda_0 = \lambda_1\beta'$.

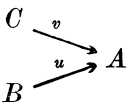
Două morfisme $\lambda, \mu \in \mathrm{Hom}(F', F)$ se zic *omotope* (resp. *coomotope*) dacă există un morfism $h : B' \to A$ astfel încît $\lambda_0 = h\alpha'$ și $\mu_0 = h\beta'$, sau $\lambda_0 = h\beta'$ și $\mu_0 = h\alpha'$ (resp. $\lambda_1 = \alpha h$ și $\mu_1 = \beta h$, sau $\lambda_1 = \beta h$ și $\mu_1 = \alpha h$).

Cazul 3). I este categoria

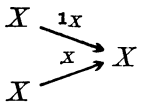
$$\begin{array}{ccc} 2 & \searrow & \\ & & 0 \\ 1 & \nearrow & \end{array}$$

cu trei obiecte 0,1 și 2 și două morfisme (plus identitățile lui 0, 1 și 2).

În acest caz un obiect în $\mathcal{C}^I$ este o diagramă



În particular, pentru orice obiect X în $\mathcal{C}$, c_X este diagrama



etc.

Evident, cazurile 1) și 2) sînt autoduale, iar I în cazurile 2) și 3) este conexă (deci functorul c este deplin fidel în aceste ultime două cazuri).

Revenim la situația generală.

DEFINIȚIE. Adjunctul la dreapta al lui c, definit pe o subcategorie plină a lui $\mathcal{C}^I$, se numește *limită proiectivă* și se notează ambiguu $\varprojlim$ sau $\varprojlim_I$.

Rezultă că, pentru $F : I \to \mathcal{C}$, functorul $\varprojlim$ este definit în F dacă și numai dacă există un cuplu $(A = \varprojlim F, \xi_F)$ cu $A \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$ și $\xi_F : c_A \to F$, care reprezintă functorul $P_F = h_F^{\circ}$.

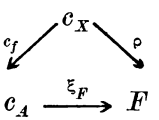
Aceasta înseamnă că, pentru orice obiect X în $\mathcal{C}$, aplicația

$$\mathrm{Hom}\,(X, A) \to \mathrm{Hom}\,(c_X, F)$$

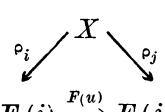
definită prin

$$f \rightsquigarrow \xi_F\, c_f$$

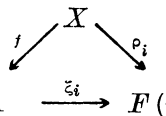
este bijectivă : pentru orice morfism functorial $\rho : c_X \to F$ există și este unic un morfism $f : X \to A$ astfel încît diagrama următoare este comutativă



Mai detaliat : pentru orice familie $(\rho_i)_{i \in \mathrm{Ob}(I)}$ de morfisme $\rho_i : X \to F(i)$ cu proprietatea că, pentru orice morfism $u : i \to j$ în I, diagrama



este comutativă, există și este unic un morfism $f : X \to A$ astfel încît diagramele



sînt comutative pentru toți $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$, unde $\xi_i = \xi_F(i)$ sînt componentele morfismului functorial ξ_F.

Întrucît cuplul (A, ξ_F) care reprezintă functorul $P_F = h_F c^\circ$ (dacă există) este determinat numai pînă la un izomorfism canonic, vom vorbi despre *o limită proiectivă a lui* F (= un cuplu reprezentant al functorului P_F) și despre *limita proiectivă* sau *limita proiectivă aleasă* a lui F (= cuplul reprezentant ales al functorului P_F).

Dacă (A, ξ_F) este limita proiectivă aleasă a lui F, se notează $A = \varprojlim F$ sau $A = \varprojlim_I F$ [suprimarea parantezelor este aici abuzivă, corect ar fi $A = \varprojlim (F)$], iar ξ_F se cheamă *morfismul canonic* al limitei proiective a lui F. Prin abuz vom spune că A este limita proiectivă a lui F.

Dacă $A = \varprojlim F$ și $B = \varprojlim G$ și dacă $u : F \to G$ este un morfism functorial, atunci, după paragraful precedent, $f = \varprojlim u$ este unicul morfism care face comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} c_A & \xrightarrow{\xi_F} & F \\ {\scriptstyle c_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ c_B & \xrightarrow{\xi_G} & G \end{array}$$

unde ξ_F și ξ_G sînt morfismele canonice ale limitelor proiective.

Notăm că dacă c este deplin fidel (de exemplu dacă I este conexă), pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, $(A, 1_{c_A})$ este o limită proiectivă a lui c_A și se ia, prin definiție, ca fiind limita proiectivă aleasă a lui c_A.

În particular, cînd c este deplin fidel și cînd $\varprojlim$ este definit peste tot, atunci $\varprojlim \circ c = 1$ (aici $\varprojlim \circ c$ înseamnă compunerea functorului $\varprojlim$ cu functorul c).

Vom considera acum cele trei cazuri particulare importante pentru categoria I.

Cazul 1). În acest caz functorul $\varprojlim_I$ se numește *produs direct* și se notează $\prod_I$.

Știm că, în acest caz, un obiect în $\mathcal{C}^I$ este o familie $F = (A_i)_{i \in I}$ de obiecte în $\mathcal{C}$, indexată pe mulțimea I. Dacă $A = \prod_I F = \prod_{i \in I} A_i$ (ultima

egalitate este o definiție) și dacă $\xi_F : c_A \to F$ este morfismul canonic, atunci componentele $\xi_i : A \to A_i$ ale lui ξ_F se numesc proiecțiile canonice ale produsului direct și se notează pr_i, p_i etc.

Interpretarea detaliată a definiției produsului direct este următoarea : Un obiect A împreună cu o familie de morfisme $p_i : A \to A_i$ este un produs direct al familiei F dacă și numai dacă, pentru orice familie de morfisme $f_i : X \to A_i$, există și este unic un morfism $f : X \to A$ astfel încît diagramele

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ {\scriptstyle f}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle f_i} \\ A & \xrightarrow{p_i} & A_i \end{array}$$

sînt comutative pentru toți $i \in I$.

Cazul 2). În acest caz, limita proiectivă se numește *nucleu*, iar functorul $\varprojlim$ se notează Ker.

Mai precis, fiind dată o diagramă

$$F : A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B$$

și un obiect X, în $\mathcal{C}$, un morfism $\rho : c_X \to F$ este unic determinat de componenta sa $\rho_0 : X \to A$ satisfăcînd $\alpha\rho_0 = \beta\rho_0$ (componenta $\rho_1 : X \to B$ se definește prin $\rho_1 = \alpha\rho_0 = \beta\rho_0$). De aceea vom spune că un cuplu (K, ε) este *un nucleu* al diagramei F dacă :

1° $\alpha\varepsilon = \beta\varepsilon$,

2° pentru orice morfism g de capăt A satisfăcînd $\alpha g = \beta g$ există și este unic un morfism f de capăt K astfel încît $g = \varepsilon f$.

Aceasta revine evident la aceea că, pentru $\rho : c_K \to F$ de componente $\rho_0 = \varepsilon$ și $\rho_1 = \alpha\varepsilon = \beta\varepsilon$, cuplul (K, ρ) este o limită proiectivă a lui F.

Alegerea nucleelor se va face în acord cu alegerea subobiectelor. Într-adevăr, avem

Lema 7.2. *Cînd* (K, ε) *este un nucleu al unei diagrame* F, $\varepsilon : K \to A$ *este un monomorfism strict.*

Demonstrație. Din condiția 2° (unicitatea) rezultă imediat că ε este monomorfism.

Pe de altă parte, fie

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ K & \xrightarrow{\varepsilon} & A \end{array}$$

o diagramă comutativă cu p epimorfism. Avem $\alpha\varepsilon = \beta\varepsilon$, deci $\alpha\varepsilon g = \beta\varepsilon g$, deci $\alpha fp = \beta fp$, deci $\alpha f = \beta f$ (întrucît p este epimorfism), deci există $h : X \to K$ astfel încît $f = \varepsilon h$, ceea ce termină demonstrația.

Din lema 7.2 rezultă că dacă o diagramă F are nucleu, atunci există și este unic un subobiect (K, ε) al lui A care este un nucleu al lui F, și care prin definiție va fi *nucleul* sau *nucleul ales* al lui F. Se notează $K = \mathrm{Ker}\, F$, iar ε se numește *monomorfismul canonic* sau *incluziunea* lui K. Prin abuz, vom spune că obiectul $K = \mathrm{Ker}\, F$ este nucleul lui F, și tot prin abuz vom nota $\varepsilon = \mathrm{Ker}\, F$.

DEFINIȚIE. Vom spune că o diagramă

$$K \xrightarrow{\varepsilon} A \rightrightarrows B$$

este *exactă* cînd $\varepsilon = \mathrm{Ker}\, F$.

Definiția nucleului unui morfism $\lambda : F \to F'$ este evidentă. Se poate vedea ușor că dacă λ și μ sînt omotope, atunci $\mathrm{Ker}\, \lambda = \mathrm{Ker}\, \mu$.

Cazul 3). În acest caz limita proiectivă se numește *produs fibrat.* Mai precis, fie

$$F : \begin{array}{ccc} & C & \\ & {\scriptstyle v}\searrow & \\ & & A \\ & {\scriptstyle u}\nearrow & \\ B & & \end{array}$$

un obiect în $\mathcal{C}^I$ și X un obiect în $\mathcal{C}$. Un morfism $\rho : c_X \to F$ este unic determinat de componentele sale $\rho_1 : X \to B$ și $\rho_2 : X \to C$ satisfăcînd condiția $u\rho_1 = v\rho_2$ (anume, componenta $\rho_0 : X \to A$ se definește prin $\rho_0 = u\rho_1 = v\rho_2$). De aceea vom spune că un triplet (D, p_1, p_2) cu $D \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$, $p_1 : D \to B$ și $p_2 : D \to C$ este un *produs fibrat* al diagramei F dacă :

1° $up_1 = vp_2$,

2° pentru orice obiect X în $\mathcal{C}$ și orice cuplu de morfisme $f_1 : X \to B$ și $f_2 : X \to C$ astfel încît $uf_1 = vf_2$, există și este unic un morfism $f : X \to D$ astfel încît $f_1 = p_1 f$ și $f_2 = p_2 f$.

În particular, $p_1 f = p_1 g$ și $p_2 f = p_2 g$ implică $f = g$.

Produsul fibrat ales se notează $B \times_A C$ sau $B \sqcap_A C$; p_1 și p_2 se numesc *proiecțiile canonice* ale produsului fibrat și se mai notează pr_1 și pr_2.

DEFINIȚIE. Se numește *pătrat cartezian* sau *diagramă cartezianăă* orice diagramă

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{p_2} & C \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ B & \xrightarrow{u} & A \end{array}$$

satisfăcînd condițiile 1° și 2° de mai sus.

Vom da o altă interpretare produsului fibrat.

Pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, vom nota $\mathcal{C}_{/A}$ subcategoria (în general *neplină* a) lui $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ formată din obiectele în $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ de capăt A şi morfismele în $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ de capăt 1_A. Un obiect în $\mathcal{C}_{/A}$ este deci un cuplu (X, f) cu $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ şi $f : X \to A$ un morfism în $\mathcal{C}$, iar un morfism $\theta : (X, f) \to (Y, g)$ este un morfism $\theta : X \to Y$ în $\mathcal{C}$ cu proprietatea că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Obiectele lui $\mathcal{C}_{/A}$ se mai numesc *obiecte peste* A în $\mathcal{C}$.

Dacă $B \xrightarrow{u} A$ este un morfism în $\mathcal{C}$, avem un functor

$$i : \mathcal{C}_{/B} \to \mathcal{C}_{/A}$$

definit prin $i(B', g) = (B', ug)$ şi $i(\theta) = \theta$ pentru orice obiect (B', g) şi orice morfism θ în $\mathcal{C}_{/B}$.

DEFINIŢIE. Adjunctul la dreapta j al lui i se numeşte *functor de schimbare a bazei*. În general j este definit pe o subcategorie plină a lui $\mathcal{C}_{/A}$ şi ia valori în $\mathcal{C}_{/B}$.

Din definiţia adjunctului la dreapta şi din definiţia pătratelor carteziene rezultă imediat că j este definit în (A', f) dacă şi numai dacă produsul fibrat $B \times_A A'$ există, i.e. dacă şi numai dacă avem un pătrat cartezian

$$\begin{tikzcd} B \times_A A' \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & A' \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "u"] & A \end{tikzcd}$$

şi în acest caz valoarea lui j în (A', f) este $(B \times_A A', \mathrm{pr}_1)$ iar morfismul cononic este $\mathrm{pr}_2 : (B \times_A A', u\,\mathrm{pr}_1) \to (A', f)$.

Se mai poate observa că produsul fibrat în $\mathcal{C}$ al diagramei

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "u"] & A \end{tikzcd}$$

este exact produsul direct în $\mathcal{C}_{/A}$ al obiectelor (B, u) şi (A', f). Cînd $A = e$ este un obiect final în $\mathcal{C}$, categoriile $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_{/e}$ sînt canonic izomorfe şi avem $B \times A' = B \times_e A'$.

Fiind date două pătrate comutative

$$\pi': \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{u'} & A \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B' & \xrightarrow{v'} & B \end{array} \quad \text{și} \quad \pi'': \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u''} & A'' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} \\ B & \xrightarrow{v''} & B'' \end{array}$$

astfel încît „sursa" lui π'' coincide cu „capătul" lui π', se notează $\pi''\pi'$ pătratul comutativ

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{u''u'} & A'' \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f''} \\ B' & \xrightarrow{v''v'} & B'' \end{array}$$

Această compunere de pătrate corespunde evident compunerii morfismelor în categoria Fl ($\mathcal{C}$).

Din cele precedente și din propoziția 6.3 rezultă imediat

PROPOZIȚIA 7.1. *Dacă pătratul π'' este cartezian, atunci condițiile următoare sînt echivalente:*

1) $\pi = \pi''\pi'$ *este cartezian.*

2) π' *este cartezian.*

De altfel demonstrația directă a acestei propoziții este imediată. Tot la fel de imediată este demonstrația propoziției următoare:

PROPOZIȚIA 7.2. *Dacă diagrama comutativă*

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \rightrightarrows & B \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_0} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_1} \\ K' & \xrightarrow{\varepsilon'} & A' & \rightrightarrows & B' \end{array}$$

are linii exacte, i.e. $\varepsilon = \operatorname{Ker} F$ *și* $\varepsilon' = \operatorname{Ker} F'$, *deci* $\gamma = \operatorname{Ker} \lambda$, *și dacă* λ_1 *este monomorfism, atunci pătratul din stînga este cartezian.*

Noțiunile duale sînt: *limită inductivă, sumă directă, conucleu, sumă fibrată* sau *sumă amalgamată, pătrat cocartezian* etc.

De exemplu, dacă $F: I \to \mathcal{C}$ este un functor, se consideră functorul $F^\circ: I^\circ \to \mathcal{C}^\circ$ și se definește $\varinjlim F$ prin egalitatea

$$\varinjlim F = \varprojlim F^\circ.$$

Dacă $f: F \to G$ este un morfism în categoria $\mathcal{C}^I$, se consideră morfismul functorial $f^\circ: G^\circ \to F^\circ$ obținut prin inversarea săgeților. Dacă $\varprojlim F^\circ$ și $\varprojlim G^\circ$ există, atunci avem un morfism $u^\circ = \varprojlim f^\circ$,

$$u^\circ: \varprojlim G^\circ \to \varprojlim F^\circ$$

în categoria $\mathcal{C}^\circ$, ceea ce dă un morfism $u = \varinjlim f$,

$$u : \varinjlim F \to \varinjlim G,$$

în categoria $\mathcal{C}$ etc.

§ 8. Proprietăți de comutativitate ale limitelor proiective și inductive

DEFINIȚIE. Fie $\mathcal{C}$ și J categorii. Vom spune că *J-limitele* proiective există în $\mathcal{C}$ sau că $\mathcal{C}$ *are J-limite proiective* sau *că $\mathcal{C}$ este o categorie cu J-limite proiective*) dacă functorul $\varprojlim_J$ este definit peste tot pe $\mathcal{C}^J$.

Cînd J este discretă (în acest caz J se identifică cu mulțimea obiectelor sale), se spune J-produs direct în loc de J-limită proiectivă. Cînd J este categoria tip a nucleelor (i.e. categoria $0 \rightrightarrows 1$), se spune nucleu, în loc de J-limită proiectivă. Cînd J este categoria tip a produselor fibrate, se spune produs fibrat, în loc de J-limită proiectivă.

Rezultă că avem, în particular, noțiunile : *categorie cu J-produse directe, categorie cu nuclee, categorie cu produse fibrate.*

Noțiunile duale sînt : *categorie cu J-limite inductive, categorie cu J-sume directe, categorie cu conuclee, categorie cu sume fibrate.*

Cînd J este categoria vidă, $\mathcal{C}^J$ are ca unic obiect *functorul vid de capăt* $\mathcal{C}$, cum se numește incluziunea lui $J = \varnothing$ în $\mathcal{C}$, și ca unic morfism, identitatea functorului vid. Rezultă că, în acest caz, $c : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$ este functorul cu $c_A =$ functorul vid și $c_f =$ identitatea functorului vid pentru orice obiect A și orice morfism f în $\mathcal{C}$.

Dacă F este functorul vid de capăt $\mathcal{C}$, atunci $e = \varprojlim F$ dacă și numai dacă e este un obiect final în $\mathcal{C}$. Într-adevăr, $\operatorname{Hom}^{\leftarrow}(F, F)$ conține numai pe 1_F și $c_X = F$ pentru orice $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$, deci unica aplicație

$$\operatorname{Hom}(X, e) \to \operatorname{Hom}(F, F)$$

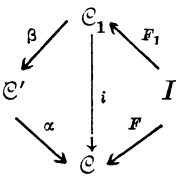
este bijectivă dacă și numai dacă $\operatorname{Hom}(X, e)$ conține exact un element.

În particular, *pentru J categoria vidă, $\mathcal{C}$ are J-limite proiective dacă și numai dacă are un obiect final.*

Pentru stabilirea proprietăților de comutativitate ale limitelor proiective și inductive vom folosi propoziția 6.3 și lema următoare.

LEMA 8.1. *Fie $\alpha : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ un functor, iar β adjunctul la dreapta al lui α (β este definit pe o subcategorie plină a lui $\mathcal{C}$). Dacă $F : I \to \mathcal{C}$ este un functor cu proprietatea că β este definit în $F(i)$ pentru orice $i \in \operatorname{Ob}(I)$, atunci adjunctul la dreapta al lui α^* ($=$ compunerea la stînga cu α) este definit în F și este egal (în F) cu βF.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{C}_1$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată din obiectele X cu proprietatea că β este definit în X, și fie $i : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$ functorul de incluziune. Întrucît $F(i)$ este în $\mathcal{C}_1$ pentru orice $i \in \mathrm{Ob}(I)$, F induce un functor $F_1 : I \to \mathcal{C}_1$. Astfel avem diagrama comutativă



În enunț am scris prin abuz βF în loc de βF_1, deci $\beta F(i) = \beta(F(i))$ și $\beta F(\lambda) = \beta(F(\lambda))$ pentru orice obiect i și orice morfism λ în I. De asemenea, vom scrie $\alpha\beta F$ în loc de $\alpha\beta F_1$.

După definiția adjunctului, pentru orice obiect X în $\mathcal{C}_1$ avem un cuplu $(\beta(X), \xi_X)$, cu $\beta(X)$ obiect în $\mathcal{C}'$ și $\xi_X : \alpha\beta(X) \to X$ morfism în $\mathcal{C}$, avînd proprietatea că, pentru orice obiect T' în $\mathcal{C}'$, aplicația

$$\mathrm{Hom}(T', \beta(X)) \to \mathrm{Hom}(\alpha(T'), X) \tag{1}$$

care asociază cu orice morfism

$$f : T' \to \beta(X)$$

(în $\mathcal{C}'$) morfismul compus

$$\alpha(T') \xrightarrow{\alpha(f)} \alpha\beta(X) \xrightarrow{\xi_X} X$$

(în $\mathcal{C}$) este bijectivă.

Știm, de asemenea, din teoria functorilor adjuncți, că morfismul ξ_X este functorial în X, i.e. că pentru orice morfism $\theta : X \to Y$ în $\mathcal{C}_1$, diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} \alpha\beta(X) & \xrightarrow{\xi_X} & X \\ {\scriptstyle \alpha\beta(\theta)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ \alpha\beta(Y) & \xrightarrow{\xi_Y} & Y \end{array} \tag{2}$$

Vom defini atunci un morfism functorial

$$\xi_F : \alpha\beta F \to F$$

punînd

$$\xi_F(i) = \xi_{F(i)} : \alpha\beta(F(i)) \to F(i)$$

pentru orice $i \in \mathrm{Ob}(I)$. Pentru a arăta că acest ξ_F este într-adevăr un morfism functorial, să considerăm un morfism $\lambda : i \to j$ în categoria I.

Punînd $\theta = F(\lambda)$ în diagrama comutativă (2), obţinem diagrama comutativă

$$(3) \qquad \begin{array}{ccc} \alpha\beta F(i) & \xrightarrow{\xi_{F(i)}} & F(i) \\ {\scriptstyle \alpha\beta F(\lambda)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\lambda)} \\ \alpha\beta F(j) & \xrightarrow{\xi_{F(j)}} & F(j) \end{array}$$

care exprimă exact faptul că ξ_F este un morfism functorial.

Să considerăm, pentru orice obiect F' în categoria $\mathcal{C}'^{I} = \mathbf{Hom}(I, \mathcal{C}')$, aplicaţia

$$(4) \qquad \mathrm{Hom}(F', \beta F) \to \mathrm{Hom}(\alpha F', F)$$

care asociază cu orice morfism functorial

$$u : F' \to \beta F$$

morfismul functorial compus

$$\alpha F' \xrightarrow{\alpha u} \alpha\beta F \xrightarrow{\xi_F} F$$

Reamintim că $\alpha u : \alpha F' \to \alpha\beta F$ este morfismul functorial de componente $\alpha(u(i)) : \alpha F'(i) \to \alpha\beta F(i)$.

Lema va fi demonstrată dacă vom arăta că aplicaţia (4) este bijectivă. Fie atunci $v : \alpha F' \to F$ un morfism functorial, de componente $v(i) : \alpha F'(i) \to F(i)$. Considerăm bijecţia (1) pentru $X = F(i)$ şi $T' = F'(i)$. Rezultă că, pentru orice obiect i în I, există şi este unic un morfism

$$u_i : F'(i) \to \beta(F(i))$$

astfel încît

$$v(i) = \xi_{F(i)}\ \alpha(u_i).$$

Fie $\lambda : i \to j$ un morfism în I. Întrucît ξ_F şi v sînt morfisme functoriale, avem diagrama comutativă (3) şi diagrama comutativă

$$(5) \qquad \begin{array}{ccc} \alpha F'(i) & \xrightarrow{v(i)} & F(i) \\ {\scriptstyle \alpha F'(\lambda)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\lambda)} \\ \alpha F'(j) & \xrightarrow{v(j)} & F(j) \end{array}$$

Vom arăta că diagrama următoare este de asemenea comutativă

$$\begin{array}{ccc} F'(i) & \xrightarrow{u_i} & \beta F(i) \\ {\scriptstyle F'(\lambda)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta F(\lambda)} \\ F'(j) & \xrightarrow{u_j} & \beta F(j) \end{array}$$

ceea ce exprimă faptul că morfismele $u_i : F'(i) \to \beta F(i)$ reprezintă componentele unui morfism functorial $u : F' \to \beta F$.

Considerînd bijecția (1) pentru $X = F(j)$ și $T' = F'(i)$, totul revine la a arăta că

$$\xi_{F(j)}\, \alpha\, (u_j\, F'(\lambda)) = \xi_{F(j)} \alpha\, (\beta F(\lambda)\, u_i)$$

deci că

$$\xi_{F(j)} \alpha\, (u_j)\ \alpha F'(\lambda) = \xi_{F(j)} \alpha\beta\ F(\lambda)\ \alpha\, (u_i).$$

Or această egalitate este adevărată întrucît

$$v(i) = \xi_{F(i)}\, \alpha\, (u_i) \text{ și } v(j) = \xi_{F(j)}\, \alpha\, (u_j)$$

și întrucît diagramele (3) și (5) sînt comutative.

Din definiția lui u rezultă că avem

$$v = \xi_F\, \alpha u,$$

iar din bijecția (1) rezultă imediat trecînd la componente că u este unic determinat prin această egalitate. Lema 8.1 este astfel complet demonstrată.

COROLAR. *Dacă adjunctul la dreapta* β *al lui* α *este definit peste tot, atunci adjunctul la dreapta al lui* α^* *este definit peste tot și este egal cu* β^*.

PROPOZIȚIA 8.1. *Fie* I, J *și* $\mathcal{C}$ *trei categorii și* $t : J \to \mathcal{C}^I$ *un functor astfel încît* $\varprojlim_J (\mathrm{pr}_i\, t)$ *există pentru toți* $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$. *Atunci* $\varprojlim_J t$ *există și se calculează pe componente, i.e.*

$$\mathrm{pr}_i \left(\varprojlim_J t\right) = \varprojlim_J (\mathrm{pr}_i\, t).$$

Demonstrație. Considerăm functorul $\alpha = \mathrm{c} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^J$. Adjunctul său la dreapta este $\beta = \varprojlim_J$.

Se vede ușor că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\alpha^*}{\nearrow} & (\mathcal{C}^J)^I \\ \mathcal{C}^I & & \uparrow \theta \\ & \underset{}{\searrow} & (\mathcal{C}^I)^J \end{array}$$

unde α^* este compunerea la stînga cu $\alpha = c$, iar θ este izomorfismul canonic din corolarul la lema 5.1.

Fie $s = \theta(t)$, deci $s_i = \mathrm{pr}_i\, t$. Ipoteza din enunț asupra lui t spune că β este definit în s_i pentru toți $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$. Din lema precedentă rezultă că adjunctul la dreapta al lui α^* este definit în s și egal cu βs. Cum θ

este izomorfism de categorii, θ^{-1} este adjunct la dreapta (şi la stînga) al lui θ, iar din propoziţia 6.3 rezultă că $\varprojlim_J t$ există şi este egal tot cu βs, deci

$$\mathrm{pr}_i\left(\varprojlim_J t\right) = (\beta s)(i) = \beta(s(i)) = \beta(\mathrm{pr}_i\, t) = \varprojlim_J (\mathrm{pr}_i\, t).$$

COROLAR. *Dacă T-limitele proiective există în $\mathcal{C}$, atunci, pentru orice categorie I, J-limitele proiective există în $\mathcal{C}^I$ (şi se calculează pe componente).*

Demonstraţie. Ipoteza corolarului spune că $\beta = \varprojlim_J$ este definit peste tot. Rezultă că adjunctul la dreapta al lui α^* este definit peste tot etc.

Interpretarea acestui corolar cînd J este categoria tip a produselor fibrate este următoarea :

Dacă $\mathcal{C}$ are produse fibrate, atunci, pentru orice categorie I, categoria $\mathcal{C}^I = \mathrm{Hom}\,(I, \mathcal{C})$ are produse fibrate care se calculează pe componente, i.e. dacă $G \to F$ şi $H \to F$ sînt morfisme în $\mathcal{C}^I$, atunci

$$(G \times_F H)(i) = G(i) \times_{F(i)} H(i),$$

sau, echivalent, pătratul

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & F \end{array}$$

este cartezian în $\mathcal{C}^I$ dacă şi numai dacă pătratele

$$\begin{array}{ccc} P(i) & \longrightarrow & H(i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(i) & \longrightarrow & F(i) \end{array}$$

sînt carteziene în $\mathcal{C}$ pentru toţi $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$.

Interpretări similare pentru obiect final, nuclee şi produse directe (şi, evident, pentru noţiunile duale).

În propoziţia următoare u este izomorfismul canonic din lema 5.1.

PROPOZIŢIA 8.2. *Fie $T : I \times J \to \mathcal{C}$ un functor astfel încît $\varprojlim_J t$ există, unde $t = u(T)$. Atunci $\varprojlim_I (\varprojlim_J t)$ există dacă şi numai dacă $\varprojlim_{I \times J} T$ există şi în acest caz avem*

$$\varprojlim_I (\varprojlim_J t) = \varprojlim_{I \times J} T.$$

Demonstrație. Se constată că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{I\times J} & \overset{u}{\cong} & (\mathcal{C}^I)^J \\ {\scriptstyle c}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle c} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{c} & \mathcal{C}^I \end{array}$$

și se aplică propoziția 6.3.

PROPOZIȚIA 8.3. *Fie* $\alpha : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ *un functor,* β *adjunctul său la dreapta (definit pe o subcategorie plină a lui* $\mathcal{C}$*),* $F : J \to \mathcal{C}$ *un functor astfel încît* $\varprojlim F$ *există și astfel încît compusul* βF *este definit (i.e.* β *este definit în* $F(i)$ *pentru orice obiect* i *în* J*). Atunci* $\varprojlim \beta F$ *există dacă și numai dacă* β *este definit în* $\varprojlim F$ *și în acest caz avem*

$$\varprojlim \beta F = \beta\,(\varprojlim F).$$

Demonstrație. Diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}'^J & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{C}^J \\ {\scriptstyle c}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle c} \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{C} \end{array}$$

i.e. $\alpha\, c_{T'} = c_{\alpha(T')}$ și $\alpha c_{f'} = c_{\alpha(f')}$ pentru orice $T' \in \mathrm{Ob}\ (\mathcal{C}')$ și $f' \in \mathrm{Fl}\,(\mathcal{C}')$.

Din lema 7.1 rezultă că adjunctul la dreapta al lui α^* este definit în F și egal cu βF. Din propoziția 6.3 rezultă că $\varprojlim \beta F$ există $\langle\Longrightarrow\rangle$ adjunctul la dreapta al lui $c\,\alpha = \alpha^*\, c$ este definit în $F \langle\Longrightarrow\rangle$ β este definit în $\varprojlim F$, și atunci avem $\varprojlim \beta F = \beta\,(\varprojlim F)$.

COROLAR. *Presupunem că adjunctul la dreapta* β *al lui* α *este definit peste tot. Dacă* $\varprojlim F$ *există, atunci* $\varprojlim \beta F$ *există și avem*

$$\varprojlim \beta F = \beta\,(\varprojlim F).$$

§ 9. Teoreme de existență pentru limite proiective și inductive

LEMA 9.1. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie astfel încît produsul direct* $B \times C$ *există pentru orice cuplu de obiecte* (B, C) *în* $\mathcal{C}$*. Condițiile următoare sînt echivalente :*

i) $\mathcal{C}$ *este o categorie cu nuclee.*

ii) $\mathcal{C}$ *este o categorie cu produse fibrate.*

Demonstrație. i) $\Rightarrow$ ii). Să admitem i) și să considerăm o diagramă

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ B & \xrightarrow{u} & A \end{array}$$

în $\mathcal{C}$. Fie $p_1 : B \times C \to B$ și $p_2 : B \times C \to C$ proiecțiile canonice ale produsului direct $B \times C$ și fie $K \xrightarrow{\varepsilon} B \times C$ un nucleu al diagramei

$$B \times C \underset{vp_2}{\overset{up_1}{\rightrightarrows}} A.$$

Se verifică ușor că diagrama

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u'} & C \\ {\scriptstyle v'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ B & \xrightarrow{u} & A \end{array}$$

este cartezianǎ, unde $v' = p_1 \varepsilon$ și $u' = p_2 \varepsilon$.

ii) $\Rightarrow$ i). Să admitem ii) și să considerăm o diagramă

$$F : A \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} B$$

în $\mathcal{C}$. Fie $u' : A \to A \times B$ morfismul de componente 1, u și $v' : A \to A \times B$ morfismul de componente 1, v, deci avem $p_1 u' = p_1 v' = 1$, $p_2 u' = u$ și $p_2 v' = v$. Construim o diagramă cartezianǎ

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi} & A \\ {\scriptstyle \varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v'} \\ A & \xrightarrow{u'} & A \times B \end{array}$$

Compunînd cu p_1 rezultă $\varphi = \varepsilon$. Apoi se verifică ușor că ε este un nucleu al diagramei F.

DEFINIȚIE. Fie $\mathcal{C}$ o categorie și $\mathfrak{U}$ un univers. Vom spune că $\mathfrak{U}$-*limitele proiective există* în $\mathcal{C}$ dacă J-limitele proiective există în $\mathcal{C}$ pentru orice $\mathfrak{U}$-categorie mică J. De asemenea, vom spune că $\mathfrak{U}$-*produsele directe există în* $\mathcal{C}$ dacă J-produsele directe există în $\mathcal{C}$ pentru orice mulțime $J \in \mathfrak{U}$.

Noțiunile duale sînt: $\mathfrak{U}$-limitele inductive există în $\mathcal{C}$, $\mathfrak{U}$-sumele directe există în $\mathcal{C}$.

TEOREMA 9.1. *Condițiile următoare sînt echivalente*:

1) $\mathfrak{U}$-*limitele proiective există în* $\mathcal{C}$.

2) $\mathfrak{U}$-*produsele directe și nucleele există în* $\mathcal{C}$.

3) $\mathfrak{U}$-*produsele directe și produsele fibrate există în* $\mathcal{C}$.

Demonstrație. Din lema precedentă rezultă că 2) $\langle = \rangle$ 3). Apoi este trivial că 1) implică 2).

Rămîne să arătăm că 2) $\Rightarrow$ 1).

Vom admite 2). Fie J o $\mathfrak{U}$-categorie mică și $F : J \to \mathcal{C}$ un functor. Atunci Ob (J) și Fl (J) sînt elemente din $\mathfrak{U}$ și deci putem considera diagrama

$$D : \prod_{i \in \mathrm{Ob}(J)} F(i) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \prod_{u \in \mathrm{Fl}(J)} F(\text{capăt } u)$$

în care α și β sînt morfismele de componente

$$\prod F(i) \underset{F(u)\, p_{\text{sursă}\, u}}{\overset{p_{\text{capăt}\, u}}{\rightrightarrows}} F(\text{capăt}\, u)$$

i.e.

$$q_{\text{capăt } u} = p_{\text{capăt } u} \text{ și } q_{\text{capăt } u} = F(u)\, p_{\text{sursă } u}$$

unde

$$p_i : \prod F(j) \to F(i) \text{ și } q_{\text{capăt } u} : \prod F(\text{capăt } u) \to F(\text{capăt } u)$$

sînt proiecțiile canonice ale produselor directe.

Reamintim că, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, un morfism functorial

$$v : c_X \to F$$

este o familie $v = (v_i)_{i \in \mathrm{Ob}(J)}$ de morfisme

$$v_i : X \to F(i)$$

astfel încît, pentru orice morfism u în J, diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ {\scriptstyle v_{\text{sursă}\, u}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle v_{\text{capăt}\, u}} \\ F(\text{sursă}\, u) & \xrightarrow{F(u)} & F(\text{capăt}\, u) \end{array}$$

Avem o aplicație

$$\mathrm{Hom}\,(c_X, F) \to \mathrm{Hom}\,(X, \prod F(i))$$

care asociază cu orice morfism functorial $v : c_X \to F$ morfismul $v : X \to \prod F(i)$ satisfăcînd

$$p_i \overline{v} = v_i$$

pentru toţi $i \in \mathrm{Ob}\ (I)$.

Evident această aplicaţie este injectivă.

Apoi, pentru orice $v : c_X \to F$, avem

$$\alpha\overline{v} = \beta\overline{v}$$

după definiţia lui α, β şi $\overline{v}$.

Invers, dacă $h : X \to \prod F(i)$ satisface $\alpha h = \beta h$, $v_i = p_i h$ sînt componentele unui morfism functorial $v : c_X \to F$ astfel încît $\overline{v} = h$.

Astfel aplicaţia $v \rightsquigarrow \overline{v}$ induce o bijecţie între $\mathrm{Hom}\ (c_X, F)$ şi mulţimea morfismelor $h : X \to \prod F(i)$ satisfăcînd $\alpha h = \beta h$.

Fie (A, ε) un nucleu al diagramei D. Avem $\alpha\varepsilon = \beta\varepsilon$, deci există un unic morfism functorial $\xi : c_A \to F$ astfel încît $\overline{\xi} = \varepsilon$, i.e. astfel încît

$$\xi_i = p_i \varepsilon$$

pentru toţi $i \in \mathrm{Ob}\ (J)$.

După definiţia nucleului, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ (\mathcal{C})$, aplicaţia

$$\mathrm{Hom}\ (X, A) \to \mathrm{Hom}\ (X, \prod F(i))$$

definită prin $f \rightsquigarrow \varepsilon f$ induce o bijecţie între $\mathrm{Hom}\ (X, A)$ şi mulţimea morfismelor $h : X \to \prod F(i)$ satisfăcînd $\alpha h = \beta h$.

Rezultă că avem o bijecţie

$$\mathrm{Hom}\ (X, A) \to \mathrm{Hom}\ (c_X, F)$$

care asociază cu orice morfism $f : X \to A$ morfismul functorial $v : c_X \to F$ de componente $v_i = p_i \varepsilon f = \xi_i f$ pentru toţi $i \in \mathrm{Ob}\ (J)$. Rezultă că aceasta este aplicaţia $f \to \xi c_f$, ceea ce atestă că (A, ξ) este o limită proiectivă a lui F şi termină demonstraţia teoremei.

Din demonstraţie mai rezultă că dacă (A, ε) este un nucleu al diagramei D şi dacă $\xi : c_A \to F$ este morfismul functorial de componente $\xi_i = p_i \varepsilon$, atunci (A, ξ) este o limită proiectivă a lui F.

O categorie J se zice *finită* dacă $\mathrm{Fl}\ (J)$ este o mulţime finită.

DEFINIŢIE. Vom spune că *limitele proiective finite există în* $\mathcal{C}$ (sau că $\mathcal{C}$ *are limite proiective finite* sau că $\mathcal{C}$ *este o categorie cu limite proiective finite*) dacă J-limitele proiective există în $\mathcal{C}$ pentru orice categorie finită J.

Noţiunea dual㠠: *categorie cu limite inductive finite.*

Din teorema precedentă şi lema 9.1 rezultă imediat următorul

COROLAR. *Condițiile următoare sînt echivalente* :

1° *Limitele proiective finite există în* $\mathcal{C}$.

2° $\mathcal{C}$ *este o categorie cu nuclee și obiect final și produsul direct* $A \times B$ *există pentru orice cuplu* (A, B) *de obiecte în* $\mathcal{C}$.

3° $\mathcal{C}$ *este o categorie cu produse fibrate și obiect final.*

TEOREMA 9.2. $\mathfrak{U}$*-limitele proiective există în categoriile* $\mathfrak{U}$-**Ens** *și* $\mathfrak{U}$-**Ab**. *În plus, pentru orice* $\mathfrak{U}$*-categorie mică* J *și orice functor* $F : J \to \mathfrak{U}$-**Ab**, *un cuplu* (A, ξ) *este o limită proiectivă a lui* F *în* $\mathfrak{U}$-**Ab** *dacă și numai dacă* $(\gamma(A), \gamma(\xi))$ *este o limită proiectivă a lui* γF *în* $\mathfrak{U}$-**Ens**, *unde* $\gamma : \mathfrak{U}$-**Ab** $\to \mathfrak{U}$-**Ens** *este functorul de supraiacență.*

Demonstrație. După teorema 9.1, este suficient să demonstrăm teorema 9.2 pentru produse directe și nuclee.

Fie $F = (A_i)_{i \in J}$ o familie de mulțimi $A_i \in \mathfrak{U}$ cu $J \in \mathfrak{U}$. Produsul direct A al acestei familii și proiecțiile canonice $\mathrm{pr}_i : A \to A_i$ au fost definite în § 1. Se verifică fără nici o dificultate că A împreună cu aplicațiile pr_i satisfac definiția generală a produsului direct dată în § 7.

Să presupunem apoi că A_i sînt grupuri abeliene, deci obiecte în $\mathfrak{U}$-**Ab**. Atunci A are o structură de grup abelian cu adunarea definită pe componente, iar proiecțiile canonice $\mathrm{pr}_i : A \to A_i$ sînt omomorfisme de grupuri, și evident grupul A împreună cu omomorfismele pr_i satisfac definiția generală a produsului direct.

Să considerăm acum o diagramă

$$F : A \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} B$$

n categoria $\mathfrak{U}$-**Ens**. Fie

$$A' = \{a \in A \mid u(a) = v(a)\}$$

și fie

$$\varepsilon : A' \to A$$

incluziunea lui A'. Atunci $A' \in \mathfrak{U}$ și evident ε este un nucleu al diagramei F în $\mathfrak{U}$-**Ens**.

Dacă A și B sînt grupuri abeliene, iar u și v omomorfisme de grupuri, atunci A' este un subgrup al lui A și evident ε este un nucleu al lui F în $\mathfrak{U}$-**Ab**.

Evident, proprietatea lui γ din enunț este adevărată pentru produse directe și nuclee.

Teorema este complet demonstrată.

Similar se poate arăta că $\mathfrak{U}$-limitele proiective există în categoriile $\mathfrak{U}$-**M**, $\mathfrak{U}$-**G**, $\mathfrak{U}$-**A**. Mai precis, dacă $\mathcal{C}$ este una din aceste categorii, $\gamma : \mathcal{C} \to \mathfrak{U}$-**Ens** functorul de supraiacență, J o $\mathfrak{U}$-categorie mică și $F : J \to \mathcal{C}$

un functor, atunci (A, ξ) este o limită proiectivă a lui F în $\mathcal{C}$ dacă și numai dacă $(\gamma(A), \gamma(\xi))$ este o limită proiectivă a lui γF în $\mathfrak{U}$-**Ens**.

Observație. Din teorema 9.2 rezultă, în particular, că γ comută cu $\mathfrak{U}$-limitele proiective. Această ultimă proprietate a lui γ este adevărată și în alte categorii supraiacente lui $\mathfrak{U}$-**Ens**, cum este $\mathfrak{U}$-**Top**. Notăm însă că în $\mathfrak{U}$-**Top** proprietatea inversă a lui γ din enunțul teoremei 9.2 nu este adevărată. Într-adevăr, dacă

$$A' \to A \rightrightarrows B$$

este o diagramă exactă în $\mathfrak{U}$-**Top**, atunci A' este un subspațiu topologic al lui A. Rezultă că dacă înzestrăm A' cu o topologie strict mai fină ca topologia de subspațiu a lui A, atunci diagrama obținută nu mai este exactă în $\mathfrak{U}$-**Top**, deși diagrama

$$\gamma(A') \to \gamma(A) \rightrightarrows \gamma(B)$$

ontinuă să fie exactă în $\mathfrak{U}$-**Ens**.

Din teoremele 9.1 și 9.2 rezultă că, dacă J este o $\mathfrak{U}$-categorie mică și $F : J \to \mathfrak{U}$-**Ab** (resp. $F : J \to \mathfrak{U}$-**Ens**), $A = \varprojlim F$ este subgrupul (resp. submulțimea) lui

$$X = \prod_{i \in \mathrm{Ob}(J)} F(i)$$

format (ă) din elementele $x = (x_i)_{i \in \mathrm{Ob}(J)}$ cu $x_i \in F(i)$ și cu proprietatea că, pentru orice morfism $u : i \to j$ în J, $x_j = F(u)(x_i)$, iar componentele ξ_i ale morfismului canonic ξ_F se definesc prin $\xi_i(x) = x_i$.

Folosind interpretarea detaliată a limitei proiective, rezultă în particular. că este adevărat următorul

COROLAR. *Fie $\mathcal{C}$ o $\mathfrak{U}$-categorie, J o categorie și $F : J \to \mathcal{C}$ un functor. Un cuplu (A, ξ) este o limită proiectivă a lui F dacă și numai dacă, pentru orice obiect X în $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(X, A)$ este o limită proiectivă a functorului $i \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X, F(i))$ în $\mathfrak{U}$-**Ens**, cu morfism canonic compunerea cu ξ la stînga*

Astfel o diagramă

$$A' \to A \rightrightarrows B$$

este exactă (în $\mathcal{C}$) dacă și numai dacă, pentru orice obiect X în $\mathcal{C}$, diagrama

$$\mathrm{Hom}(X, A') \to \mathrm{Hom}(X, A) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(X, B)$$

obținută prin aplicarea functorului covariant $\overset{\circ}{h}_X = \mathrm{Hom}(X,.)$ este exactă în $\mathfrak{U}$-**Ens**. Tot astfel o diagramă

$$\begin{array}{ccc} A' & \to & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \to & B \end{array}$$

este carteziană (în $\mathcal{C}$) dacă și numai dacă, pentru orice obiect X în $\mathcal{C}$, diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\ (X, A') & \to & \mathrm{Hom}\ (X, B') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}\ (X, A) & \to & \mathrm{Hom}\ (X, B) \end{array}$$

este carteziană în $\mathfrak{U}$-**Ens**.

Dual avem interpretări ale limitei inductive, conucleului și sumei fibrate folosind functorul contravariant $h_X = \mathrm{Hom}\ (., X)$.

TEOREMA 9.3. *$\mathfrak{U}$-limitele inductive există în categoriile* $\mathfrak{U}$-**Ens** *și* $\mathfrak{U}$-**Ab** (*dar functorul γ nu comută în general cu $\mathfrak{U}$-limitele inductive*).

Demonstrație. Suma directă în categoria $\mathfrak{U}$-**Ens** a fost definită în § 1.

În vederea definiției conucleului în categoria $\mathfrak{U}$-**Ens** vom face o paranteză privind noțiunea de graf de echivalență.

Un *graf de echivalență* pe o mulțime X este o submulțime R a produsului direct $X \times X$ astfel încît

1° $(x, x) \in R$ pentru orice $x \in X$,

2° dacă $(x, y) \in R$, atunci $(y, x) \in R$,

3° dacă (x, y) și $(y, z) \in R$, atunci $(x, z) \in R$.

De exemplu, dacă $f : X \to Y$ este o aplicație de mulțimi, atunci perechile $(x, y) \in X \times X$ cu $f(x) = f(y)$ formează un graf de echivalență pe X pe care-l vom nota R_f și-l vom numi *graful de echivalență indus de f*.

Evident, intersecția oricărei familii $(R_i)_{i \in I}$ de grafuri de echivalență pe X este un graf de echivalență pe X (I o mulțime). Rezultă că, dată o submulțime M a lui $X \times X$, există un cel mai mic graf de echivalență care conține pe M; acesta se numește graful de *echivalență generat* de M. Firește, mulțimea vidă se consideră graf de echivalență pe orice mulțime X.

Dacă R este un graf de echivalență pe X, se notează X/R mulțimea claselor de echivalență modulo R; prin definiție două elemente x, y din X aparțin aceleiași clase de echivalență modulo R dacă și numai dacă $(x, y) \in R$. Mulțimea X/R se numește mulțimea cît a lui X prin graful de echivalență R.

Întrucît, evident, clasele de echivalență modulo R, deci elementele lui X/R, sînt submulțimi mutual disjuncte ale lui X care realizează o partiție a lui X, avem o aplicație *surjectivă*

$$p : X \to X/R,$$

numită *aplicație canonică*, definită inambiguu prin $p(x) =$ clasa de echivalență modulo R care conține pe x.

Evident, $R_p = R$, i.e. graful de echivalență indus de p este egal cu R. Apoi pentru orice mulțime Y și orice aplicație $f : X \to Y$ astfel încît $R \subset R_f$, i.e. astfel încît $f(x) = f(y)$ cînd $(x, y) \in R$, există și este unică o aplicație $g : X/R \to Y$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & X/R \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & Y & \end{array}$$

i.e. astfel încît $f = gp$; anume dacă $z \in X/R$, atunci $g(z) = f(x)$, unde x este un element arbitrar în $p^{-1}(z)$.

După această paranteză, să considerăm o diagramă

$$F : A \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} B$$

în categoria $\mathfrak{U}$-**Ens**. Fie B relația de echivalență pe B generată de perechile $(u(a), v(a))$ cu $a \in A$. Vom arăta că diagrama

$$A \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} B \to B/R$$

este exactă, i.e. aplicația canonică p este un conucleu al diagramei F.

Într-adevăr, fie $f : B \to X$ o aplicație astfel încît $fu = fv$. Atunci $f(u(a)) = f(v(a))$ pentru orice $a \in A$, deci $R \subset R_f$, deci există și este unică o aplicație

$$g : B/R \to X$$

astfel încît $f = gp$.

Din duala teoremei 9.1 rezultă că $\mathfrak{U}$-limitele inductive există în $\mathfrak{U}$-**Ens**. Mai precis că, pentru orice $\mathfrak{U}$-categorie mică J și orice functor $F : J \to \mathfrak{U}$-**Ens**, $A = \varinjlim F$ este mulțimea cît

$$A = X/R,$$

unde

$$X = \coprod_{i \in \mathrm{Ob}(J)} F(i)$$

iar R este relația de echivalență generată de perechile (x_i, x_j) cu $x_i \in F(i)$ și $x_j \in F(j)$ și cu proprietatea că există $u : i \to j$ în J astfel încît $x_j = F(u)(x_i)$.

Să trecem la categoria $\mathfrak{U}$-**Ab**. Dacă $(A_i)_{i \in J}$ este o familie de obiecte în $\mathfrak{U}$-**Ab** cu $J \in \mathfrak{U}$, atunci suma directă $A' = \sum_{i \in \mathrm{Ob}(J)} A_i$ este subgrupul produsului direct $A = \prod_{i \in \mathrm{Ob}(J)} A_i$ format din elementele $x = (x_i)_{i \in \mathrm{Ob}(J)}$ cu proprietatea că $x_i = 0$ cu excepția unui număr finit de indici. Injecțiile canonice $\varepsilon_j : A_j \to A'$ se definesc prin $\varepsilon_j(a_j) = x$ cu $x_j = a_j$ și $x_i = 0$ pentru $i \neq j$.

Din această construcție se vede că functorul γ nu comută în general cu suma directă.

Dimpotrivă, γ comută cu conucleul. Într-adevăr, să presupunem că în diagrama F considerată mai sus A și B sînt grupuri abeliene, iar u și v omomorfisme de grupuri. Atunci, dacă $z_1 = p(b_1)$ și $z_2 = p(b_2)$, definim $z_1 + z_2 = p(b_1 + b_2)$. Se verifică ușor că această definiție a adunării în B/R este inambiguă, că B/R este grup abelian, iar p un omomorfism de grupuri și, în sfîrșit, că p este un conucleu al diagramei F în categoria $\mathfrak{U}$-**Ab**.

Din duala teoremei 9.1 rezultă că $\mathfrak{U}$-limitele inductive există în $\mathfrak{U}$-**Ab**, ceea ce termină demonstrația teoremei 9.2.

Din teoremele 9.2 și 9.3 și din corolarul la propoziția 8.1 se deduce imediat următorul

COROLAR. *Pentru orice categorie I, $\mathfrak{U}$-limitele proiective și inductive există în categoriile* $(\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens})^I = \mathrm{Hom}\,(I, \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens})$ *și* $(\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab})^I = \mathrm{Hom}\,(I, \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab})$.

În particular, categoriile $(\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens})^I$ și $(\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab})^I$ au obiect final și obiect inițial, produs direct și sumă directă etc., și toate se calculează pe componente.

§ 10. Exactitate

Fiind dat un morfism $A \xrightarrow{u} B$ într-o categorie $\mathcal{C}$ putem considera (dacă există) diagrama carteziană

$$\begin{array}{ccc} A \times_B A & \xrightarrow{p_2} & A \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

DEFINIȚIE. Se spune că u este un *epimorfism efectiv* dacă produsul fibrat $A \times_B A$ există și diagrama

$$A \times_B A \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{u} B$$

este exactă. De asemenea, se spune că u este *epimorfism efectiv universal* dacă, pentru orice morfism $B' \to B$, produsul fibrat $A \times_B B'$ există și proiecția canonică $A \times_B B' \to B'$ este un epimorfism efectiv. Noțiunile duale: *monomorfism efectiv*, *monomorfism efectiv universal*.

De exemplu, în categoria $\mathfrak{U}$-**Ens** orice epimorfism este efectiv universal. Într-adevăr, dacă $A \xrightarrow{u} B$ este un epimorfism de mulțimi, $R = A \times_B A$ este graful de echivalență pe A indus de u, iar mulțimea B este canonic izomorfă cu mulțimea cît A/R etc.

De asemenea în $\mathfrak{U}$-**Ens** orice monomorfism este efectiv universal.

PROPOZIȚIA 10.1. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu produse fibrate. Un epimorfism* $A \overset{u}{\to} B$ *este efectiv dacă și numai dacă există o diagramă exactă de forma*

$$R \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{u} B.$$

Demonstrație. Numai suficiența cere demonstrație. Vom presupune că diagrama exactă din enunț există. Întrucît $\mathcal{C}$ are produse fibrate, diagrama

$$A \times_B A \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{u} B$$

există. Întrucît $u\alpha = u\beta$, există $\theta : R \to A \times_B A$ astfel încît $\alpha = p_1\theta$ și $\beta = p_2\theta$. Se deduce imediat că diagrama precedentă este exactă.

DEFINIȚIE. Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se zice *exact la dreapta* dacă pentru orice epimorfism efectiv $A \to B$ diagrama

$$F(A \times_B A) \rightrightarrows F(A) \to F(B)$$

este exactă. Noțiunea duală : *functor exact la stînga.* Un functor se zice *exact* dacă este simultan exact la dreapta și la stînga.

Din propoziția 10.1 rezultă imediat următorul

COROLAR. *Cînd $\mathcal{C}'$ are produse fibrate și $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este exact la dreapta, F (epimorfism efectiv) = epimorfism efectiv.*

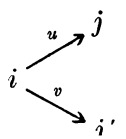
Exactitatea la stînga înseamnă comutativitate cu nucleul pentru o clasă specială de diagrame.

O condiție mai tare decît exactitatea la stînga este, deci, comutativitatea cu limitele proiective finite.

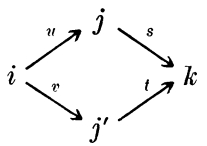
Orice functor care are un adjunct la stînga comută cu limitele proiective arbitrare în virtutea corolarului la propoziția 8.3 și duai. În particular, dacă J-limitele inductive există în $\mathcal{C}$ functorul $\varinjlim_J$ comută cu limitele inductive. Vom arăta că există o clasă importantă de categorii J care au proprietatea că $\varinjlim_J$ comută cu limitele proiective finite (și în particular este un functor exact) pentru $\mathcal{C} = \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens}$ sau $\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}$.

DEFINIȚIE. O categorie I se zice *pseudofiltrantă* dacă satisface axiomele următoare :

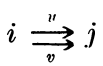
PS1) Orice diagramă



poate fi scufundată într-o diagramă comutativă

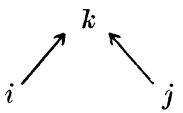


PS2) Pentru orice diagramă



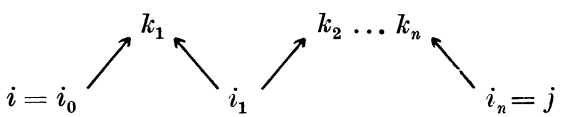
există un morfism $w : j \to k$ astfel încît $wu = wv$.

LEMA 10.1. *O categorie pseudofiltrantă I este conexă dacă și numai dacă, pentru orice cuplu (i, j) de obiecte în I, există o diagramă*



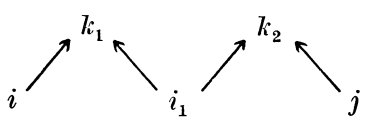
Demonstrație. Numai necesitatea cere demonstrație. În realitate vom folosi numai conexiunea și o formă mai slabă a lui PS1).

Întrucit I este conexă există o diagramă

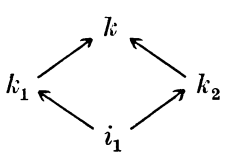


Avem de arătat că există o astfel de diagramă cu $n = 1$. Prin inducție după n, totul revine la a arăta că, dacă există o diagramă cu $n = 2$, atunci există și una cu $n = 1$.

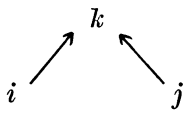
Să presupunem deci că există o diagramă



Din PS1) rezultă că există o diagramă

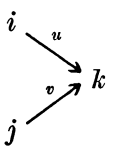


deci avem o diagramă



cu $n = 1$, ceea ce termină demonstrația lemei.

LEMA 10.2. *Fie J o $\mathfrak{U}$-categorie mică pseudofiltrantă conexă, $F : J \to \mathfrak{U}$-**Ens** un functor, $A = \varinjlim F$ și R mulțimea perechilor (x_i, x_j) cu $x_i \in F(i)$, $x_j \in F(j)$ și cu proprietatea că există o diagramă*



în J astfel încît $F(u)(x_i) = F(v)(x_j)$. Atunci :

1) *R este un graf de echivalență pe mulțimea $X = \coprod_{i \in \mathrm{Ob}(J)} F(i)$ și*

$$A = X/R.$$

2) *Dacă $x, x' \in A$, atunci x și x' au reprezentanți de același indice, i.e. există $k \in \mathrm{Ob}(J)$, un reprezentant $x_k \in F(k)$ al lui x și un reprezentant $x'_k \in F(k)$ al lui x'.*

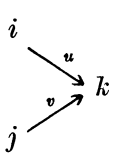
3) *x_i și $x'_i \in F(i)$ reprezintă același element în A dacă și numai dacă există $u : i \to j$ în J astfel încît $F(u)(x_i) = F(u)(x'_i)$.*

Demonstrație. 1) Fie R' graful de echivalență pe X generat de perechile (x_i, x_k) cu $x_i \in F(i)$ și cu proprietatea că există $u : i \to k$ în J astfel încît $x_k = F(u)(x_i)$. Din demonstrația teoremei 9.2 știm că

$$A = X/R'$$

Vom arăta că, în condițiile actuale, $R = R'$. Evident, R conține generatorii lui R' și $R \subset R'$. Rămîne de arătat că R este un graf de echivalență. Evident R satisface primele două axiome ale unui graf de echivalență. Faptul că R satisface și a treia axiomă rezultă imediat din PS1).

2) Fie $x_i \in F(i)$ un reprezentant al lui x și $x'_j \in F(j)$ un reprezentant al lui x'. Există o diagramă



în J. Fie $x_k = F(u)(x_i)$ și $x'_k = F(v)(x_j)$. Atunci x_k reprezintă pe x și x'_k reprezintă pe x'.

3) Există mai întîi o diagramă

$$i \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} k$$

astfel încît $G(\alpha)(x_i) = G(\beta)(x_i')$. Apoi, în virtutea lui PS2), există $\gamma : k \to j$ astfel încît $\gamma\alpha = \gamma\beta$ etc.

Observaţie. Aserţiunea din 2) se poate generaliza astfel : Fie J o $\mathfrak{U}$-categorie mică pseudofiltrantă conexă, $F_1, \ldots, F_n$ un şir finit de functori de la J în $\mathfrak{U}$-**Ens**, $A_1 = \varinjlim F_1, \ldots, A_n = \varinjlim F_n$, $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$. Atunci există reprezentanţi de acelaşi indice $k \in \mathrm{Ob}(J)$ pentru $x_1, \ldots, x_n$. În lemă a fost considerat cazul $n = 2$ şi $F_1 = F_2$.

Teorema 10.1. *Pentru orice $\mathfrak{U}$-categorie mică pseudofiltrantă conexă J, functorul*

$$\varinjlim_J : (\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens})^J \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens}$$

comută cu limitele proiective finite.

Demonstraţie. Fie e un obiect final în $\mathfrak{U}$-**Ens**, deci o mulţime cu un singur element. Este evident că functorul $c_e : J \to \mathfrak{U}$-**Ens** este un obiect final în ($\mathfrak{U}$-**Ens**). Reamintim că, pentru $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $c_A(i) = A$ şi $c_A(u) = 1_A$ pentru orice obiect i şi orice morfism u în J.

Întrucît J este conexă, c este deplin fidel, deci $\varinjlim_J c_A = A$, în particular $\varinjlim_J c_e = e$. Astfel $\varinjlim_J$ comută cu obiectul final.

Rămîne să mai arătăm că $\varinjlim_J$ comută cu produsul fibrat.

Să considerăm o diagramă carteziană

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\beta} & H \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ G & \xrightarrow{g} & F \end{array}$$

în ($\mathfrak{U}$-**Ens**)^J. Aplicînd functorul $\varinjlim_J$, obţinem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccc} \overline{P} & \xrightarrow{\bar\beta} & \overline{H} \\ {\scriptstyle\bar\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar h} \\ \overline{G} & \xrightarrow{\bar g} & \overline{F} \end{array}$$

în $\mathfrak{U}$-**Ens**. Avem de arătat că această ultimă diagramă este carteziană.

Notăm că $\bar{g}$ este aplicația, unic determinată, care face comutative diagramele

$$\begin{array}{ccc} G(i) & \xrightarrow{g_i} & F(i) \\ {\scriptstyle \eta_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_i} \\ \bar{G} & \xrightarrow{\bar{g}} & \bar{F} \end{array}$$

pentru toți $i \in \mathrm{Ob}(J)$, unde g_i sînt componentele lui g, iar ξ_i și η_i componentele morfismelor canonice, deci $\xi_i(x_i) =$ clasa lui x etc. O definiție similară pentru $\bar{h}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$.

Fie $(y, z) \in \bar{G} \times \bar{H}$ astfel încît $\bar{g}(y) = \bar{h}(z) = x$ (să zicem). Fie $y_i \in G(i)$ un reprezentant al lui y, i.e. un element astfel încît $\eta_i(y_i) = y$, și fie $z_j \in H(j)$ un reprezentant al lui z. Din definiția lui $\bar{g}$ rezultă că $x_i = g_i(y_i)$ reprezintă pe $x = \bar{g}(y)$. Tot astfel $x_j = h_j(z_j)$ reprezintă pe $x = \bar{h}(z)$. Există deci o diagramă

$$\begin{array}{ccc} i & \overset{u}{\searrow} & \\ & & k \\ j & \underset{v}{\nearrow} & \end{array}$$

astfel încît $F(u)(x_i) = F(v)(x_j) = x_k$ (să zicem).

Fie $y_k = G(u)(y_i)$ și $z_k = H(v)(z_j)$. Atunci y_k reprezintă pe y și z_k pe z. Avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} G(i) & \xrightarrow{g_i} & F(i) \\ {\scriptstyle G(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(u)} \\ G(k) & \xrightarrow{g_k} & F(k) \end{array}$$

de unde rezultă că $g_k(y_k) = x_k$. Similar, $h_k(z_k) = x_k$.

Pe de altă parte, produsul fibrat în categoria $(\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens})^J$ se calculează pe componente, deci diagrama

$$\begin{array}{ccc} P(k) & \xrightarrow{\beta_k} & H(k) \\ {\scriptstyle \alpha_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_k} \\ G(k) & \xrightarrow{g_k} & F(k) \end{array}$$

este carteziană. Deci există $t_k \in P(k)$ astfel încît $\alpha_k(t_k) = y_k$ şi $\beta_k(t_k) = z_k$. Fie t clasa lui t_k. După definiţia lui $\bar{\alpha}$, avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} P(k) & \xrightarrow{\alpha_k} & G(k) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_k} \\ \overline{P} & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \overline{G} \end{array}$$

de unde rezultă că $\bar{\alpha}(t) = y$. Similar $\bar{\beta}(t) = z$.

Fie acum $t, t' \in P$ astfel încît $\alpha(t) = \alpha(t') = y$ şi $\beta(t) = \beta(t') = z$. Există $i \in \mathrm{Ob}(J)$, un reprezentant $t_i \in P(i)$ pentru t şi un reprezentant $t_i' \in P(i)$ pentru t'. Fie $y_i = \alpha_i(t_i)$, $y_i' = \alpha_i(t_i')$, $z_i = \beta_i(t_i)$, $z_i' = \beta_i(t_i')$. Atunci y_i şi y_i' reprezintă pe y, iar z_i şi z_i' pe z. După lema 10.2 există $\lambda : i \to j$ şi $\mu : i \to k$ în J astfel încît $G(\lambda)(y_i) = G(\lambda)(y_i')$ şi $H(\mu)(z_i) = H(\mu)(z_i')$. Din PS1) rezultă că există o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & {\scriptstyle\lambda}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle\lambda'} & \\ i & & & & l \\ & {\scriptstyle\mu}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle\mu'} & \\ & & k & & \end{array}$$

deci $\lambda'\lambda - \mu'\mu = u$ (să zicem). Rezultă $G(u)(y_i) = G(u)(y_i') = y_k$ (să zicem) şi $H(u)(z_i) = H(u)(z_i') = z_k$ (să zicem).

Fie $t_k = P(u)(t_i)$ şi $t_k' = P(u)(t_i')$. Atunci t_k reprezintă pe t şi t_k' pe t'. Avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} P(i) & \xrightarrow{P(u)} & P(k) \\ {\scriptstyle\alpha_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_k} \\ G(i) & \xrightarrow{G(u)} & G(k) \end{array}$$

de unde rezultă că $\alpha_k(t_k) = y_k = \alpha_k(t_k')$. Similar, $\beta_k(t_k) = \beta_k(t_k')$.

Dar diagrama

$$\begin{array}{ccc} P(k) & \xrightarrow{\beta_k} & H(k) \\ {\scriptstyle\alpha_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_k} \\ G(k) & \xrightarrow{g_k} & F(k) \end{array}$$

este carteziană, deci $t_k = t_k'$, deci $t = t'$, ceea ce termină demonstraţia.

COROLAR. *Cînd J este o $\mathfrak{U}$-categorie mică pseudofiltrantă conexă, functorul*

$$\varinjlim_J : (\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens})^J \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens}$$

este exact.

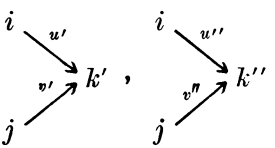
TEOREMA 10.2. *Pentru J o $\mathfrak{U}$-categorie mică pseudofiltrantă conexă, functorul* $\varinjlim_J$ *comută cu functorul* $\gamma : \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab} \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens}$.

Demonstrație. Fie $F : J \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}$ un functor, $A = \varinjlim F$ în $\mathfrak{U}$-**Ens** și $\xi_i : F(i) \to A$ componentele morfismului canonic (corect ar trebui să scriem $A = \varinjlim \gamma F$).

Vom introduce pe F o structură de grup abelian.

Fie $x, y \in A$. Există $i \in \mathrm{Ob}(J)$, un reprezentant $x_i \in F(i)$ pentru x și un reprezentant $y_i \in F(i)$ pentru y. Vom defini $x + y$ ca fiind clasa lui $x_i + y_i$.

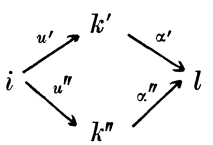
Vom arăta că această adunare este inambiguă. Fie $x_j, y_j \in F(j)$ un alt cuplu de reprezentanți pentru x, y. Există diagrame



astfel încît

$$F(u')(x_i) = F(v')(x_j) \text{ și } F(u'')(y_i) = F(v'')(y_j).$$

Din PS1) rezultă că există o diagramă comutativă



Din PS2) rezultă că există $\beta : l \to k$ astfel încît $\beta\alpha' v' = \beta\alpha'' v'' = v$ (să zicem). Fie $u = \beta\alpha' u' = \beta\alpha'' u''$. Avem

$$F(u)(x_i) = F(v)(x_j) \text{ și } F(u)(y_i) = F(v)(y_i)$$

Întrucît $F(u)$ și $F(v)$ sînt omomorfisme de grupuri, rezultă

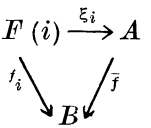
$$F(u)(x_i + y_i) = F(v)(x_j + y_j),$$

ceea ce atestă că adunarea este inambiguă.

Evident, această adunare definește o structură de grup abelian pe A și evident $\xi_i : F(i) \to A$ sînt omomorfisme de grupuri.

Vom arăta că (A, ξ) este o limită inductivă a lui F în $\mathfrak{U}$-**Ab**. Fie B un grup abelian și $f : F \to c_B$ un morfism functorial cu componente

$f_i : F(i) \to B$ omomorfisme de grupuri. Există și este unică o aplicație $f : A \to B$ astfel încît diagramele



sînt comutative pentru toți $i \in \mathrm{Ob}(J)$. Din definiția adunării în A și din faptul că f_i sînt omomofisme rezultă că f este omomorfism.

Observație. Se poate vedea ușor că este adevărat rezultatul mai precis că (A, ξ) este o limită inductivă a lui F în $\mathfrak{U}$-**Ab** dacă și numai dacă $(\gamma(A), \gamma(\xi))$ este o limită inductivă a lui F în $\mathfrak{U}$-**Ens**.

COROLAR. *Cînd J este o $\mathfrak{U}$-categorie mică pseudofiltrantă conexă, functorul*

$$\varinjlim_J : (\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab})^J \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}$$

este exact.

DEFINIȚIE. Fie $\mathcal{C}$ o categorie. Vom spune că *J-limitele inductive în $\mathcal{C}$ există și comută cu limitele proiective finite* dacă functorul

$$\varinjlim_J : \mathcal{C}^J \to \mathcal{C}$$

este definit peste tot și comută cu limitele proiective finite. Vom spune că *$\mathfrak{U}$-limitele inductive pseudofiltrante conexe există și comută cu limitele proiective finite* dacă, pentru orice $\mathfrak{U}$-categorie mică pseudofiltrantă conexă J, functorul $\varinjlim_J$ este definit peste tot și comută cu limitele proiective finite.

Astfel, din cele precedente rezultă că $\mathfrak{U}$-limitele proiective pseudofiltrante conexe în categoriile $\mathfrak{U}$-**Ens** și $\mathfrak{U}$-**Ab** comută cu limitele proiective finite.

Similar se poate vedea că $\mathfrak{U}$-limitele inductive pseudofiltrante conexe în $\mathfrak{U}$-**M**, $\mathfrak{U}$-**G**, $\mathfrak{U}$-**A** există și comută cu limitele proiective finite.

PROPOZIȚIA 10.2 *Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie cu limite proiective finite și dacă J-limitele inductive în $\mathcal{C}$ există și comută cu limitele proiective finite, atunci, pentru orice categorie I, J-limitele inductive în $\mathcal{C}^I$ există și comută cu limitele proiective finite.*

Demonstrație. Avem de arătat numai că, în ipotezele propoziției, functorul

$$\varinjlim_J : (\mathcal{C}^I)^J \to \mathcal{C}^I$$

comută cu obiectul final și produsele fibrate.

Fie de exemplu $t : J \to \mathcal{C}^I$ un obiect final în categoria Hom $(J, \mathcal{C}^I)$. Dacă θ este izomorfismul de categorii din corolarul la lema 5.1, atunci $s = \theta(t)$ este obiect final în categoria Hom $(I, \mathcal{C}^J)$. Vom aplica corolarul la propoziția 8.1. Întrucît $\mathcal{C}$ are obiect final, $\mathcal{C}^J$ are obiect final. Rezultă că, pentru orice $i \in \mathrm{Ob}(I)$, $\mathrm{pr}_i\ t = s_i$ este obiect final în $\mathcal{C}^J$. Din ipoteza propoziției rezultă că

$$\mathrm{pr}_i (\varinjlim_J t) = \varinjlim_J \mathrm{pr}_i\, t$$

este obiect final în $\mathcal{C}$ pentru orice $i \in \mathrm{Ob}(I)$, deci $\varinjlim_J t$ este obiect final în $\mathcal{C}^I$.

Similar se demonstrează comutativitatea cu produsul fibrat.

Din cele precedente rezultă că, pentru orice categorie I, $\mathfrak{U}$-limitele inductive pseudofiltrante conexe în $(\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens})^I$ și $(\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab})^I$ comută cu limitele proiective finite.

§ 11. Categorii aditive

DEFINIȚIE. *O categorie aditivă* (resp. *preaditivă*) este o categorie $\mathcal{C}$ împreună cu o funcție care asociază cu orice cuplu (A,B) de obiecte în $\mathcal{C}$ o structură de grup abelian pe mulțimea Hom (A, B), supuse la următoarele axiome (resp. la axiomele 1) și 2) de mai jos).

1) Pentru orice triplet (A, B, C) de obiecte în $\mathcal{C}$, compunerea morfismelor

$$\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$$

este biliniară, i.e. $u(v_1 + v_2) = uv_1 + uv_2$ și $(u_1 + u_2)v = u_1v + u_2v$.

2) $\mathcal{C}$ are un obiect 0 astfel încît Hom $(0, 0)$ este grupul zero.

3) Pentru orice cuplu (A, B) de obiecte în $\mathcal{C}$, produsul direct $A \times B$ există.

Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie preaditivă, vom nota ambiguu prin 0 elementul zero în oricare din grupurile abeliene Hom (A, B). Rezultă că $vu = 0$ cînd $u = 0$ sau cînd $v = 0$.

Din 2) rezultă că $1_0 = 0$. Apoi dacă u este un morfism de sursă 0, atunci $u = 1_0\, u = 0u = 0$, deci pentru orice obiect X în $\mathcal{C}$, Hom $(X, 0)$ este grupul zero, i.e. 0 este un obiect final în $\mathcal{C}$. Similar, 0 este un obiect inițial în $\mathcal{C}$. Astfel 0 este un *obiect zero* în $\mathcal{C}$. În particular, 0 este unic determinat pînă la un izomorfism.

Evident, noțiunea de categorie preaditivă este *autoduală* : $\mathcal{C}$ este preaditivă dacă și numai dacă $\mathcal{C}^\circ$ este preaditivă.

Dacă $\mathcal{C}$ este o $\mathfrak{U}$-categorie aditivă, functorul Hom poate fi și va fi considerat ca luînd valori în categoria $\mathfrak{U}$-**Ab**. Este aici un abuz : în realitate avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\circ} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{Hom}} & \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab} \\ & {\scriptstyle \text{Hom}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \gamma} & \\ & \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens} & \end{array}$$

unde γ este functorul de supraiacență

PROPOZIȚIA 11.1. *Într-o categorie preaditivă, condițiile următoare sînt echivalente* :

1) *Tripletul* $(A, p_1 : A \to A_1, p_2 : A \to A_2)$ *este un produs direct al cuplului* (A_1, A_2).

2) *Există morfisme* $i_1 : A_1 \to A$ *și* $i_2 : A_2 \to A$ *astfel încît* $p_1 i_1 = 1_{A_1}$, $p_2 i_2 = 1_{A_2}$ *și* $i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_A$ *(în acest caz avem în plus* $p_1 i_2 = 0$ *și* $p_2 i_1 = 0$).

Demonstrație. Să demonstrăm mai întîi paranteza din 2). Din primele două egalități din 2) rezultă că p_1 și p_2 sînt epimorfisme (chiar stricte) Apoi

$$p_1 = p_1 (i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_1 + p_1 i_2 p_2,$$

deci $p_1 i_2 p_2 = 0$, deci $p_1 i_2 = 0$ (întrucît p_2 este epimorfism). Similar $p_2 i_1 = 0$.

1) $\Rightarrow$ 2). Vom admite 1). Fie $i_1 : A_1 \to A$ morfismul de componente 1_{A_1}, 0 (i.e. unicul morfism satisfăcînd $p_1 i_1 = 1_{A_1}$ și $p_2 i_1 = 0$) și $i_2 : A_2 \to A$ morfismul de componente 0, 1_{A_2} (i.e. unicul morfism satisfăcînd $p_1 i_2 = 0$ și $p_2 i_2 = 1_{A_2}$). Atunci $i_1 p_1 + i_2 p_2 \in \text{Hom}\ (A, A)$ și componentele sale sînt

$$p_1 (i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_1 \text{ și } p_2 (i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_2$$

egale cu componentele lui 1_A, deci $i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_A$.

2) $\Rightarrow$ 1). Vom admite 2). Fie $f_1 : X \to A_1$ și $f_2 : X \to A_2$. Vom arăta că există și este unic un morfism $f : X \to A$ astfel încît $p_1 f = f_1$ și $p_2 f = f_2$. Definim $f = i_1 f_1 + i_2 f_2$. Rezultă $p_1 f = f_1$ și $p_2 f = f_2$. Invers, dacă f este astfel încît $p_1 f = f_1$ și $p_2 f = f_2$,atunci

$$i_1 f_1 + i_2 f_2 = i_1 p_1 f + i_2 p_2 f = (i_1 p_1 + i_2 p_2) f = f,$$

ceea ce termină demonstrația.

Propoziția duală este

PROPOZIȚIA 11.1′ *Într-o categorie preaditivă, condițiile următoare sînt echivalente* :

1) *Tripletul* $(B, j_1 : A_1 \to B, \ j_2 : A_2 \to B)$ *este o sumă directă a cuplului* (A_1, A_2).

2) *Există morfisme* $q_1 : B \to A_1$ și $q_2 : B \to A_2$ *astfel încît* $q_1 j_1 = 1_{A_1}$, $q_2 j_2 = 1_{A_2}$ și $j_1 q_1 + j_2 q_2 = 1_B$ (*în acest caz avem în plus* $q_2 j_1 = 0$ și $q_2 j_2 = 0$)

În situația din propoziția 11.1 vom spune că A este un *produs direct* cu *proiecții canonice* p_1 și p_2 și *injecții canonice* i_1 și i_2 al cuplului (A_1, A_2). În situația din propoziția 11.1′ vom spune că B este *o sumă directă* de *injecții canonice* j_1 și j_2 și *proiecții canonice* q_1 și q_2 a cuplului (A_1, A_2).

Din propozițiile 11.1 și 11.1′ rezultă că (A, i_1, i_2) este o sumă directă a cuplului (A_1, A_2), deci morfismul $u : A \to B$ satisfăcînd $ui_1 = j_1$ și $ui_2 = j_2$ este un izomorfism. Avem

$$u = (j_1 q_1 + j_2 q_2) u (i_1 p_1 + i_2 p_2) = j_1 p_1 + j_2 p_2.$$

Dual, avem $u^{-1} = i_1 q_1 + i_2 q_2$. Vom spune că u este *izomorfismul canonic* între produsul (A, p_1, p_2) și suma directă (B, j_1, j_2) ale cuplului (A_1, A_2).

Într-o categorie preaditivă $\mathcal{C}$, *suma directă* aleasă a unui cuplu A, B) de obiecte în $\mathcal{C}$ se notează $A + B$ sau $A \oplus B$. De asemenea suma directă a unei familii $(A_i)_{i \in I}$ de obiecte în $\mathcal{C}$ se notează $\sum_{i \in I} A_i$ sau $\bigoplus_{i \in I} A_i$.

Corolar. *Într-o categorie aditivă* $\mathcal{C}$, *pentru orice cuplu* (A, B) *de obiecte în* $\mathcal{C}$, *suma directă* $A + B$ *există și este canonic izomorfă cu produsul direct* $A \times B$.

În particular, *noțiunea de categorie aditivă este autoduală.*

Dacă $A \xrightarrow{u} B$ este un morfism într-o categorie aditivă $\mathcal{C}$, un nucleu al (resp. nucleul) diagramei

$$A \underset{0}{\overset{u}{\rightrightarrows}} B$$

se numește *un nucleu* al (resp. *nucleul*) morfismului u.

Rezultă că $A' \xrightarrow{i} A$ este un nucleu al lui u dacă și numai dacă $ui = 0$ și pentru orice morfism f de capăt A satisfăcînd $uf = 0$, există și este unic un morfism f' de capăt A' astfel încît $f = if'$.

Nucleul unui morfism $A \xrightarrow{u} B$, dacă există, se notează Ker u.

Atunci Ker este un functor de la subcategoria plină a lui Fl $(\mathcal{C})$ formată din morfismele u pentru care Ker u există cu valori în categoria $\mathcal{C}$.

Definiție. Într-o categorie aditivă, un șir $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{u} B$ se zice *exact la stînga* dacă i este un nucleu al lui u.

Evident, o diagramă

$$A' \xrightarrow{i} A \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} B$$

este exactă dacă și numai dacă șirul

$$0 \to A' \to A \xrightarrow{u-v} B$$

este exact la stînga.

Noțiuni duale: *conucleu* al unui morfism u, Coker u, *șir exact la dreapta*.

Evident, într-o categorie aditivă, u este monomorfism dacă și numai dacă $0 = \mathrm{Ker}\ u$ și epimorfism dacă și numai dacă $0 = \mathrm{Coker}\ u$.

DEFINIȚIE. Un șir $\ldots \to X_{i-1} \to X_i \to X_{i+1} \to \ldots$ de obiecte și morfisme într-o categorie aditivă se numește *complex* dacă are cel puțin trei obiecte (deci cel puțin două morfisme) și dacă compusul oricăror două morfisme consecutive în șir este zero.

De exemplu, un șir exact la stînga și un șir exact la dreapta sînt complexe.

DEFINIȚIE. Un șir $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} A'' \to 0$ într-o categorie aditivă se zice *exact* dacă i este un nucleu al lui q și q un conucleu al lui i (i.e. dacă șirul $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} A''$ este exact la stînga, iar șirul $A' \to A \to A'' \to 0$ este exact la dreapta).

Noțiunile de complex și șir exact sînt *autoduale*. Orice șir exact este un complex.

DEFINIȚIE. Vom spune despre un șir $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} A'' \to 0$ că *despică* sau că este un *șir despicat* sau că este un *șir direct* dacă există morfisme $p : A \to A'$ și $j : A'' \to A$ astfel încît $pi = 1_{A'}$, $qj = 1_{A''}$, și $ip + jq = 1_A$ (deci de asemenea $pj = 0$ și $qi = 0$), i.e. dacă A este o sumă directă de injecții canonice i, j și proiecții canonice p, q.

În condițiile din definiția precedentă vom spune de asemenea că diagrama

$$A' \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} A \underset{q}{\overset{j}{\rightleftarrows}} A''$$

este o *reprezentare a lui A ca sumă directă a* (sau ca *produs direct* al) cuplului (A', A'').

Noțiunea de șir despicat este autoduală.

PROPOZIȚIA 11.2. *Într-o categorie aditivă, condițiile următoare despre un șir* $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} A'' \to 0$ *sînt echivalente*:

1) *Șirul despică.*

2) *Șirul este exact și i are un invers la stînga.*

3) *Șirul este exact și q are un invers la dreapta.*

Demonstrație. Evident 1) $\Rightarrow$ 2).

2) $\Rightarrow$ 1). Avem $(1 - ip)\, i = i - i(pi) = i - i = 0$, deci există j astfel încît $1 = ip + jq$. Avem $qjq = q(1 - ip) = q - (qi)\, p = 0$ întrucît $qi = 0$, deci $qj = 1$ întrucît q este epimorfism.

Astfel 1) $\Leftrightarrow$ 2). Prin dualitate 1) $\Leftrightarrow$ 3).

Din lema 9.1 rezultă că o categorie aditivă are nuclee dacă și numai dacă are produse fibrate, și dual.

PROPOZIȚIA 11.3. *Într-o categorie aditivă cu nuclee, condițiile următoare sînt echivalente*:

1) $u : A \to B$ *este un epimorfism efectiv.*

2) *Șirul* $0 \to A' \xrightarrow{\varepsilon} A \xrightarrow{u} B \to 0$ *este exact, unde* $\varepsilon = \operatorname{Ker} u$.

3) *Există un morfism* $v : C \to A$ *astfel încît* $u = \operatorname{Coker} v$.

Demonstrație. Din propoziția 10.1 rezultă 1) $\Leftrightarrow$ 3).

Vom demonstra că 1) $\Leftrightarrow$ 2).

Întrucît $\mathcal{C}$ are nuclee, produsul fibrat

$$\begin{array}{ccc} A \times_B A & \xrightarrow{p_2} & A \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

există; de asemenea $\varepsilon = \operatorname{Ker} u$ există. Apoi întrucît $u\varepsilon = 0 = uo$, există un morfism $\lambda : A' \to A \times_B A$ astfel încît $p_1\lambda = \varepsilon$ și $p_2\lambda = 0$. De asemenea, întrucît $up_1 = up_2$, deci $u(p_1 - p_2) = 0$, există $\mu : A \times_B A \to A'$ astfel încît $p_1 - p_2 = \varepsilon\mu$. Avem $\varepsilon\mu\lambda = (p_1 - p_2)\lambda = \varepsilon$, deci $\mu\lambda = 1$ întrucît ε este monomorfism.

Astfel avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccc} A \times_B A & \xrightarrow{p_1 - p_2} & A & \xrightarrow{u} & B \\ {\scriptstyle \lambda}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle \varepsilon} & & & \\ A' & & & & \end{array}$$

cu λ avînd un invers la stînga. Rezultă că diagrama

$$A \times_B A \xrightarrow{p_1 - p_2} A \xrightarrow{u} B \to 0$$

este exactă la dreapta dacă și numai dacă diagrama

$$0 \to A' \xrightarrow{\varepsilon} A \xrightarrow{u} B \to 0$$

este exactă, ceea ce termină demonstrația.

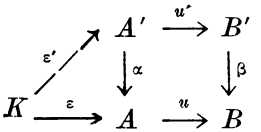
PROPOZIȚIA 11.4. *Într-o categorie aditivă, dacă pătratul*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{u'} & B' \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

este cartezian, atunci pentru $v : B \to C$ și $\varepsilon : K \to A'$, $u = \operatorname{Ker} v$ *implică* $u' = \operatorname{Ker} v\beta$, iar $\varepsilon = \operatorname{Ker} u'$ *implică* $\alpha\varepsilon = \operatorname{Ker} u$ (*în particular* u' *monomorfism implică* u *monomorfism*).

Demonstrația este trivială.

PROPOZIȚIA 11.5. *Într-o categorie aditivă* $\mathcal{C}$, *fie*



o diagramă comutativă astfel încît :

1) $\varepsilon = \operatorname{Ker} u$ *și* $\varepsilon' = \operatorname{Ker} u'$,

2) u' *este epimorfism efectiv universal.*

În aceste condiții, pătratul din dreapta al diagramei este cartezian.

Demonstrație. Fie B'' un obiect în $\mathcal{C}$ și $f : B'' \to A$, $g : B'' \to B'$ morfisme astfel încît $uf = \beta g$. Avem de arătat că există și este unic un morfism $\theta : B'' \to A'$ astfel încît

$$\alpha\theta = f \text{ și } u'\theta = g.$$

Mai întîi vom demonstra unicitatea lui θ.

Totul revine la a arăta că, dacă $\lambda : B'' \to A'$ este un morfism astfel încît $\alpha\lambda = 0$ și $u'\lambda = 0$, atunci $\lambda = 0$. Or, întrucît $\varepsilon = \operatorname{Ker} u'$, din $u'\lambda = 0$ rezultă că există $\gamma : B'' \to K$ astfel încît $\lambda = \varepsilon'\gamma$. Avem $\varepsilon\gamma = \alpha\varepsilon'\gamma = \alpha\lambda = 0$, deci $\gamma = 0$ (întrucît ε este un monomorfism), deci $\lambda = \varepsilon'\gamma = 0$.

Astfel unicitatea lui θ este stabilită (și anume fără intervenția condiției 2)).

Pentru a demonstra existența lui θ vom proceda în modul următor.

Vom considera mai întîi cazul particular cînd $B'' = B'$ și $g = 1_{B'}$. În acest caz avem $uf = \beta$ și avem de arătat că există $\theta : B' \to A'$ astfel încît $\alpha\theta = f$ și $u'\theta = 1$.

Or, $u(\alpha - fu') = u\alpha - ufu' = u\alpha - \beta u' = 0$, deci, întrucît $\varepsilon = \operatorname{Ker} u$, există $s : A' \to K$ astfel încît

$$\alpha - fu' = \varepsilon s.$$

Rezultă că avem

$$\varepsilon s\varepsilon' = (\alpha - fu')\varepsilon' = \alpha\varepsilon' - fu'\varepsilon' = \varepsilon$$

(întrucît $u'\varepsilon' = 0$), deci

$$s\varepsilon' = 1$$

(întrucît ε este monomorfism).

Pe de altă parte, u' fiind epimorfism efectiv, șirul

$$0 \to K \xrightarrow{\varepsilon'} A \xrightarrow{u'} B' \to 0$$

este exact. Cum ε' are un invers la stînga, din propoziția 11.2 rezultă că acest șir este direct, deci există $\theta : B' \to A'$ astfel încît

$$\varepsilon' s + \theta u' = 1 \text{ și } u'\theta = 1.$$

De aici rezultă că

$$\alpha\theta u' = \alpha(1 - \varepsilon' s) = \alpha - \alpha\varepsilon' s = \alpha - \varepsilon s = fu',$$

deci

$$\alpha\theta = f$$

întrucît u' este epimorfism.

Astfel este stabilită existența lui θ în cazul particular cînd $g = 1_{B'}$. În demonstrația acestui caz particular am folosit numai condiția 1) și faptul că u' este epimorfism efectiv.

Trecem la cazul general.

Întrucît u' este epimorfism efectiv universal, există un pătrat cartezian

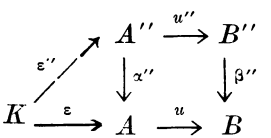
$$\begin{array}{ccc} A'' & \xrightarrow{u''} & B'' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' \end{array}$$

cu u'' epimorfism efectiv. Utilizînd propoziția 7.1 se vede imediat că u'' este epimorfism efectiv universal. În particular, u'' este *quarabil*, i.e. pentru orice morfism $X \to B''$, produsul cartezian $A'' \times_{B''} X$ există. Să luăm în particular $X = 0$. Avem un pătrat cartezian

$$\begin{array}{ccc} K'' & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle \varepsilon''}\downarrow & & \downarrow \\ A'' & \xrightarrow{u''} & B'' \end{array}$$

Folosind proprietatea universală a produsului cartezian, se verifică imediat că ε'' este un nucleu al lui u''. (Am arătat astfel că, într-o categorie aditivă, orice morfism quarabil are un nucleu). Din propoziția 11.4 rezultă imediat că $h\varepsilon''$ este un nucleu al lui u', deci este canonic izomorf cu ε'. De aceea putem presupune că avem $K'' = K$ și $h\varepsilon'' = \varepsilon'$.

Astfel avem o diagramă comutativă.



cu $\varepsilon = \operatorname{Ker} u$, $\varepsilon'' = \operatorname{Ker} u''$ și u'' epimorfism efectiv universal, unde $\alpha'' = \alpha h$ și $\beta'' = \beta g$. În plus avem

$$uf = \beta''.$$

Din cazul particular tratat mai sus rezultă că există un morfism $\theta'' : B'' \to A''$ astfel încît $\alpha''\theta'' = f$ și $u''\theta'' = 1$. Fie $\theta = h\theta''$. Avem $\alpha\theta = \alpha h\theta'' = \alpha''\theta'' = f$. De asemenea, $u'\theta = u'h\theta'' = gu''\theta'' = g$, ceea ce termină demonstrația propoziției 1.5.

DEFINIȚIE. Dacă $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ sînt categorii aditive, un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se zice *aditiv* dacă

$$F(u + v) = F(u) + F(v)$$

pentru orice cuplu de morfisme u, v (în $\mathcal{C}$) cu aceeași sursă și același capăt.

Din propoziția 11.1 rezultă că, pentru $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ functor aditiv, $F(A_1 + A_2) = F(A_1) + F(A_2)$. Mai precis, dacă A este o sumă directă a cuplului (A_1, A_2) cu injecții canonice i_1, i_2 și proiecții canonice p_1, p_2, atunci $F(A)$ este o sumă directă a cuplului $(F(A_1), F(A_2))$ cu injecții canonice $F(i_1)$, $F(i_2)$ și proiecții canonice $F(p_1)$, $F(p_2)$. Rezultă că, pentru F mereu aditiv, dacă șirul

$$0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} A'' \to 0$$

despică în $\mathcal{C}$, atunci șirul

$$0 \to F(A') \to F(A) \to F(A'') \to 0$$

despică în $\mathcal{C}'$.

De asemenea, pentru $\mathcal{C}$ categorie cu nuclee, un functor aditiv $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este exact la stînga dacă și numai dacă, pentru orice șir exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ în $\mathcal{C}$ șirul $0 \to F(A') \to F(A) \to F(A'')$ este exact la stînga în $\mathcal{C}'$. Aceasta rezultă din definiția exactității la stînga și din demonstrația propoziției 11.3, întrucît λ are invers la stînga. Enunț dual pentru exactitatea la dreapta.

În sfîrșit, un functor aditiv F este exact dacă și numai dacă, pentru orice șir exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ în $\mathcal{C}$, șirul $0 \to F(A') \to F(A) \to F(A'') \to 0$ este exact în $\mathcal{C}'$.

§ 12. Categorii abeliene

DEFINIȚIE. O categorie aditivă $\mathcal{C}$ se zice *abeliană* dacă satisface următoarele două axiome :

AB1) Orice morfism are un nucleu și un conucleu.

AB2) Toate monomorfismele și toate epimorfismele sînt efective.

În particular, toate monomorfismele și toate epimorfismele în $\mathcal{C}$ sînt stricte.

Noțiunea de categorie abeliană este *autoduală*: $\mathcal{C}$ este abeliană dacă și numai dacă $\mathcal{C}^\circ$ este abeliană. Categoria $\mathfrak{U}$-**Ab** este abeliană.

Orice categorie abeliană are produse fibrate și sume fibrate.

Din propoziția 11.3 rezultă că AB2), în prezența lui AB1), revine la faptul că, pentru orice monomorfism $A' \xrightarrow{i} A$ și orice epimorfism $A \xrightarrow{p} A''$, șirurile $0 \to A' \xrightarrow{i} A \to \operatorname{Coker} i \to 0$ și $0 \to \operatorname{Ker} p \to A \xrightarrow{p} A'' \to 0$ sînt exacte.

Rezultă că aplicația $i \rightsquigarrow \operatorname{Coker} i$ este o bijecție între mulțimea subobiectelor $A' \xrightarrow{i} A$ ale lui A și mulțimea obiectelor cît $A \xrightarrow{p} A''$ ale lui A, inversa acestei aplicații fiind $p \rightsquigarrow \operatorname{Ker} p$ (dacă $A' \to A$ este un subobiect al lui A se mai notează $\operatorname{Coker} i = A/A'$).

În particular, pentru orice morfism u în $\mathcal{C}$, $\operatorname{Ker}\operatorname{Coker}\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u$ și $\operatorname{Coker}\operatorname{Ker}\operatorname{Coker} u = \operatorname{Coker} u$.

PROPOZIȚIA 12.1. *Într-o categorie abeliană, orice morfism $A \to B$ are o imagine și o coimagine și avem*

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}\operatorname{Coker} u \text{ și } \operatorname{Coim} u = \operatorname{Coker}\operatorname{Ker} u.$$

Demonstrație. Fie $B \xrightarrow{v} B''$ un conucleu al lui u și $B' \xrightarrow{i} B$ nucleul lui v. Întrucît $vu = 0$, există și este unic un morfism $A \xrightarrow{p} B'$ astfel încît $u = ip$.

Vom arăta că p este epimorfism.

Fie f un morfism de sursă B' astfel încît $fp = 0$ și fie $K \xrightarrow{\varepsilon} B'$ un nucleu al lui f. Întrucît $fp = 0$, există și este unic un morfism $A \xrightarrow{p_1} K$ astfel încît $p = \varepsilon p_1$, deci $u = i\varepsilon p_1$, iar $i\varepsilon$ este un monomorfism.

Deoarece v este un conucleu al lui u și întrucît $vi = 0$, deci $vi\varepsilon = 0$, se vede imediat că v este un conucleu al lui $i\varepsilon$. Întrucît v este epimorfism din AB2) rezultă că șirul

$$0 \to K \xrightarrow{i\varepsilon} B \xrightarrow{v} B'' \to 0$$

este exact, i.e. $i\varepsilon$ este un nucleu al lui v ca și i, deci $i\varepsilon = i\theta$ cu θ izomorfism, deci $\varepsilon = \theta$ este izomorfism, deci $f = 0$.

Astfel p este epimorfism, deci $i = \operatorname{Im} u$, i.e. $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}\operatorname{Coker} u$.

Restul este dualitate.

COROLARUL 1. *Într-o categorie abeliană, toate morfismele sînt stricte.*

Demonstrație. După propoziția precedentă, orice morfism u factorizează în $u = ip$ cu i monomorfism și p epimorfism. Din AB2) rezultă că i și p sînt stricte.

DEFINIȚIE. Un morfism $u : A \to B$ într-o categorie oarecare se zice *efectiv* dacă $u = ip$ cu i monomorfism efectiv și p epimorfism efectiv.

COROLARUL 2. *Cînd $\mathcal{C}$ este o categorie aditivă satisfăcînd AB1), $\mathcal{C}$ este abeliană dacă și numai dacă toate morfismele lui $\mathcal{C}$ sînt efective.*

Demonstrație. Necesitatea rezultă din corolarul precedent și din AB2). Suficiența este imediată.

PROPOZIȚIA 12.2. *Într-o categorie abeliană toate monomorfismele și toate epimorfismele sînt efective universale.*

Demonstrație. Să considerăm o diagramă cartezianăă

$$\begin{array}{ccc} B\times_A A' & \xrightarrow{u'} & A' \\ {\scriptstyle v'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ B & \xrightarrow{u} & A \end{array}$$

cu u epimorfism. Avem de arătat că u' este epimorfism.

După demonstrația lemei 9.1 avem diagrama

$$\begin{array}{ccccc} B\times_A A' & \xrightarrow{\varepsilon} & B\times A' & \xrightarrow{p_2} & A' \\ & & {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ & & B & \xrightarrow{u} & A \end{array}$$

unde p_1 și p_2 sînt proiecțiile canonice ale produsului direct, $\varepsilon = \mathrm{Ker}\ (up_1 - vp_2)$, $u' = p_2\varepsilon$ și $v' = p_1\varepsilon$.

După propoziția 11.1 există morfisme $i_1 : B \to B \times A$ și $i_2 : A' \to B \times A'$ astfel încît $p_1 i_1 = 1$, $p_1 i_2 = 0$, $p_2 i_1 = 0$, $p_2 i_2 = 1$ și $i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1$.

Fie $\varphi = up_1 - vp_2$. Rezultă $\varphi i_1 = u =$ epimorfism, deci φ este epimorfism, deci șirul

$$0 \to B\times_A A' \xrightarrow{\varepsilon} B \times A' \xrightarrow{\varphi} A \to 0$$

este exact.

Fie acum f un morfism de sursă A' astfel încît $fu' = 0$ i.e. $(fp_2)\varepsilon = 0$. Rezultă că există un morfism g de sursă A astfel încît $fp_2 = g\varphi$. Avem $gu = g\varphi i_1 = fp_2 i_1 = 0$, deci $g = 0$ (întrucît u este epimorfism), deci $fp_2 = g\varphi = 0$, deci $f = 0$ (întrucît p_2 este epimorfism).

Astfel u' este epimorfism.

Restul este dualitate.

DEFINIȚIE. Într-o categorie abeliană un șir $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ se zice *exact* dacă $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{Ker}\ v$.

Aceasta înseamnă $\mathrm{Ker}\ \mathrm{Coker}\ u = \mathrm{Ker}\ v$ și este echivalent cu $\mathrm{Coker}\ u = \mathrm{Coim}\ v$.

Un șir oarecare $\ldots \to X_{i-1} \to X_i \to X_{i+1} \to \ldots$ într-o categorie abeliană se zice *exact* dacă are cel puțin două morfisme și dacă orice porțiune a sa formată din două morfisme consecutive este un șir exact.

De exemplu, într-o categorie abeliană un șir $0 \to A' \to A \to B$ este exact dacă și numai dacă este exact la stînga.

Orice șir exact este un complex.

PROPOZIȚIA 12.3. *Pentru $\mathcal{C}$ abeliană, $\mathcal{C}'$ additivă și $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ aditiv, condițiile următoare sînt echivalente :*

1) *F este exact la stînga.*

2) *F comută cu nucleul.*

3) *F comută cu produsul fibrat.*

Demonstrație 1) $\Rightarrow$ 2). Fie $0 \to A' \to A \to B$ un șir exact în $\mathcal{C}$. Avem $u = \varepsilon p$ cu ε monomorfism (= monomorfism efectiv) și p epimorfism (= epimorfism efectiv), deci ε este o imagine și p o coimagine a lui u. Din propoziția 12.1 rezultă că șirul

$$0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \to 0$$

este exact. Din 1) rezultă că $F(i)$ este un nucleu al lui $F(p)$ și că $F(\varepsilon)$ este un monomorfism. Se deduce că $F(i)$ este un nucleu al lui $F(u)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Aceasta rezultă din construcția produsului fibrat dată în demonstrația lemei 9.1.

3) $\Rightarrow$ 1). Aceasta rezultă din construcția nucleului cu ajutorul produsului fibrat dată în demonstrația lemei 9.1.

În cele ce urmează vom stabili trei leme de exactitate.

Ne vom situa într-o categorie abeliană dată.

LEMA 12.1. *Dacă în diagrama comutativă*

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma \\ A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \end{array}$$

pătratul din stînga este cartezian, linia de jos exactă și γ monomorfism, atunci linia de sus este exactă.

Demonstrație. Fie $K' \xrightarrow{\varepsilon'} B'$ nucleul lui v' și $K \xrightarrow{\varepsilon} B$ nucleul lui v. Există în mod unic morfisme $A' \xrightarrow{p'} K'$ și $A \xrightarrow{p} K$ astfel încît $u' = \varepsilon' p'$ și $u = \varepsilon p$; în plus p este epimorfism întrucît șirul $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ este exact.

Apoi există și este unic un morfism $K' \xrightarrow{\varphi} K$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \xrightarrow{p'} & K' & \xrightarrow{\varepsilon'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\varphi & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma \\ A & \xrightarrow{p} & K & \xrightarrow{\varepsilon} & B & \xrightarrow{v} & C \end{array}$$

După propoziția 7.2, pătratul de la mijloc este cartezian (întrucît γ este monomorfism) iar după propoziția 7.1 pătratul din stînga este cartezian. Din propoziția precedentă rezultă că p' este epimorfism, deci $\varepsilon' = \operatorname{Im} u'$, i.e. șirul $A' \xrightarrow{u'} B' \xrightarrow{v'} C'$ este exact.

LEMA 12.2. *Fie dată diagrama comutativă*

$$\begin{array}{ccccc} A' & \to & A & \to & A'' \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} \\ 0 \to B' & \to & B & \to & B'' \end{array}$$

cu linii exacte. Atunci șirul indus

$$\operatorname{Ker} f' \to \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} f''$$

este exact.

Demonstrație. Avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Ker} f' & \to & \operatorname{Ker} f & \to & \operatorname{Ker} f'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \end{array}$$

cu linia de jos exactă și cu pătratul din stînga cartezian în virtutea propoziției 7.2 (întrucît $B' \to B$ este monomorfism).

Din lema precedentă rezultă că linia de sus este exactă.

Observație. Dacă în plus $A' \to A$ este monomorfism, atunci evident $\operatorname{Ker} f' \to \operatorname{Ker} f$ este monomorfism, deci șirul $0 \to \operatorname{Ker} f' \to \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} f''$ este exact, dar acest fapt înseamnă că functorul Ker este exact la stînga și este adevărat în categorii arbitrare.

LEMA 12.3. *Fie dată o diagramă comutativă*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle \beta'} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma'} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha''} & & \downarrow{\scriptstyle \beta''} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma''} & & \\ 0 & \to & A'' & \xrightarrow{u''} & B'' & \xrightarrow{v''} & C'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

cu toate liniile și primele două coloane exacte. Atunci ultima coloană este exactă.

Demonstrație. Întrucît Coker este exact la dreapta, șirul $C' \xrightarrow{\gamma'} C \xrightarrow{\gamma''} C'' \to 0$ este exact. De aceea totul se reduce la a arăta că, în condițiile lemei, γ' este monomorfism.

Să observăm mai întîi că aserțiunea noastră este sigur adevărată în cazul $A = 0$. Într-adevăr, în acest caz α' este izomorfism, în particular epimorfism. Din duala la propoziția 7.2 rezultă că pătratul

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{v'} & C' \\ \downarrow{\scriptstyle \beta'} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma'} \\ B & \xrightarrow{v} & C \end{array}$$

este cocartezian, iar din propoziția 12.2 rezultă că γ' este monomorfism (întrucît β' este monomorfism).

Să revenim la cazul general. Fie $B \xrightarrow{\varphi} D$ un conucleu al lui $u\alpha' = \beta' u'$. Avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \beta'} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{u\alpha'} & B & \xrightarrow{\varphi} & D & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta''} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \\ 0 & \to & 0 & \to & B'' & \xrightarrow{1} & B'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

unde ultima coloană este o coloană de nuclee, deci j este unicul morfism satisfăcînd $\varphi\beta' = jv'$ și q unicul morfism satisfăcînd $\beta'' = q\varphi$. În această diagramă toate liniile și primele două coloane sînt exacte. Din observația precedentă rezultă că șirul

$$0 \to C' \xrightarrow{j} D \xrightarrow{q} B'' \to 0$$

este exact.

Schimbînd liniile cu coloanele, rezultă că avem de asemenea șirul exact.

$$0 \to A'' \xrightarrow{i} D \xrightarrow{p} C \to 0$$

unde i este unicul morfism satisfăcînd $\varphi u = i\alpha''$ și p unicul morfism satisfăcînd $v = p\varphi$. Întrucît v este epimorfism, p este de asemenea epimorfism.

Avem $q\,i\,\alpha'' = q\varphi u = \beta'' u = u''\alpha''$, deci $qi = u''$ (întrucît α'' este epimorfism). Similar $pj = \gamma'$. De asemenea, $v''q\varphi = v''\beta = \gamma'' v = \gamma'' p\varphi$, deci $v''q = \gamma'' p$ (întrucît φ este epimorfism).

Astfel avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \\ & & C' & \xrightarrow{1} & C' \\ & & \downarrow j & & \downarrow \gamma' \\ 0 & \to A'' \xrightarrow{i} & D & \xrightarrow{p} & C \\ & 1\downarrow & \downarrow q & & \downarrow \gamma'' \\ 0 & \to A'' \xrightarrow{u''} & B'' & \xrightarrow{v''} & C'' \end{array}$$

cu ultimele două linii și coloana de la mijloc exacte și cu p epimorfism. Din propoziția 11.5 rezultă că pătratul

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{p} & C \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma''} \\ B'' & \xrightarrow{v''} & C'' \end{array}$$

este cartezian, iar din propoziția 11.4 rezultă că $\gamma' = \mathrm{Ker}\ \gamma''$, ceea ce termină demonstrația.

Observație. Demonstrația precedentă a lemei 12.3 se extinde imediat la orice categorie aditivă $\mathcal{C}$ satisfăcînd axioma AB1) și axioma următoare (mai slabă ca AB2)) : orice epimorfism efectiv este universal, și dual. Asemenea categorii se pot numi *categorii preabeliene.* Ca exemple de categorii preabeliene semnalăm : categoria modulelor filtrate (peste un inel filtrat), categoria modulelor topologice (peste un inel topologic), categoria spațiilor vectoriale topologice local convexe (peste un corp valuat complet nediscret) și altele.

§ 13. Categorii cantoriene și functori de completare

DEFINIȚIE. Vom numi *categorie cantoriană* orice categorie $\mathcal{C}$ care satisface axiomele următoare :

C1) $\mathcal{C}$ are limite proiective finite și limite inductive finite.

C2) Toate monomorfismele și toate epimorfismele în $\mathcal{C}$ sînt efective universale.

Din corolarul la teorema 9.1 rezultă că C2) revine la faptul că $\mathcal{C}$ are obiect final și obiect inițial, produse fibrate și sume fibrate. Rezultă că pentru categorii aditive, C1) este echivalent cu AB1). Apoi, după propoziția 12.2, pentru categorii aditive satisfăcînd AB1), C2) este echivalent cu AB2). Astfel, o categorie aditivă este cantoriană dacă și numai dacă este abeliană.

Categoria $\mathfrak{U}$-**Ens** este cantoriană.

PROPOZIȚIA 13.1. *Dacă* $\mathcal{C}$ *este o categorie cantoriană, orice morfism* $A \xrightarrow{u} B$ *are imagine și coimagine și avem*

$$\text{Im } u = \text{Ker } (B \rightrightarrows B +_A B) \text{ și Coim } u = \text{Coker } (A \times_A A \rightrightarrows A).$$

Demonstrație. Vom demonstra mai general că, dacă $\mathcal{C}$ are sume fibrate și dacă toate monomorfismele stricte în $\mathcal{C}$ sînt efective, atunci orice morfism $A \xrightarrow{u} B$ are o imagine și avem

$$\text{Im } u = \text{Ker } (B \rightrightarrows B +_A B).$$

Demonstrația este similară cu cea a propoziției 12.1.

Fie $B' \xrightarrow{i} B$ nucleul diagramei

$$B \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B +_A B$$

Firește, aici α și β sînt injecțiile canonice ale sumei fibrate, deci avem diagrama cocarteziană

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ B & \xrightarrow{\alpha} & B+_A B \end{array}$$

Avem $\alpha i = \beta i$. Apoi întrucît $\alpha u = \beta u$, din definiția nucleului rezultă că există și este unic un morfism $p : A \to B'$ astfel încît $u = ip$. Vom arăta că p este epimorfism.

Fie X un obiect în $\mathcal{C}$ și $f, g \in \text{Hom } (B', X)$ astfel încît $fp = gp$. Avem de arătat că $f = g$. Fie $K \xrightarrow{\varepsilon} B'$ nucleul diagramei

$$B' \underset{f}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X$$

Întrucît $fp = gp$, există și este unic un morfism $q : A \to K$ astfel încît $p = \varepsilon q$. Rezultă că $u = i\varepsilon q$. Pe de altă parte se vede ușor că diagrama

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{i\varepsilon} & B \\ {\scriptstyle i\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ B & \xrightarrow{\alpha} & B+_A B \end{array}$$

este de asemenea cocarteziană. Dar i și ε, fiind nuclee, sînt monomorfisme stricte, deci $i\varepsilon$ este monomorfism strict. Din ipoteza făcută asupra lui $\mathcal{C}$ rezultă că $i\varepsilon$ este monomorfism efectiv, deci $i\varepsilon$ este un nucleu al diagramei

$$B \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B +_A B$$

ca și i. Rezultă că ε este izomorfism, deci $f = g$, deci p este epimorfism, deci ε este imaginea lui u, q.e.d.

COROLAR. *Într-o categorie cantoriană, orice morfism u se factorizează în $u = ip$ cu i monomorfism și p epimorfism.*

Interesul noțiunii de categorie cantoriană rezultă din două teoreme de permanență, dintre care prima este

TEOREMA 13.1. *Dacă $\mathcal{C}$ este cantoriană, atunci, pentru orice categorie I, categoria $\mathcal{C}^I = \mathrm{Hom}\,(I, \mathcal{C})$ este cantoriană.*

Demonstrație. Permanența lui C1) rezultă din corolarul la propoziția 8.1 și din dualul său. Tot de acolo rezultă că, pentru $\mathcal{C}$ satisfăcînd C1), un morfism $u : F \to G$ în $\mathcal{C}^I$ este monomorfism efectiv (resp. epimorfism efectiv) dacă și numai dacă $u(i) : F(i) \to G(i)$ este monomorfism efectiv (resp. epimorfism efectiv) pentru toți $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$.

Să presupunem $\mathcal{C}$ cantoriană și fie $u : F \to G$ un morfism în $\mathcal{C}^I$. Pentru orice $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$, fie $G'(i) \xrightarrow{\varepsilon(i)} G(i)$ imaginea lui $u(i)$ și $p(i) : F(i) \to G'(i)$ unicul epimorfism satisfăcînd $u(i) = \varepsilon(i)p(i)$. Dacă $i \to j$ este un morfism în I, din definiția imaginii rezultă că avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccc} F(i) & \xrightarrow{p(i)} & G'(i) & \xrightarrow{\varepsilon(i)} & G(i) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F(j) & \xrightarrow{p(j)} & G'(j) & \xrightarrow{\varepsilon(j)} & G(j) \end{array}$$

Rezultă că avem un functor $G' : I \to \mathcal{C}$ și morfisme functoriale $\varepsilon : G' \to G$ și $p : F \to G'$.

Întrucît $\mathcal{C}$ este cantoriană, $\varepsilon(i)$ este monomorfism efectiv și $p(i)$ epimorfism efectiv pentru orice $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$. Din cele precedente rezultă că ε este monomorfism efectiv și p epimorfism efectiv. Astfel toate morfismele în $\mathcal{C}^I$ sînt efective, în particular monomorfismele și epimorfismele.

Fie acum

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{u'} & G' \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \xrightarrow{u} & G \end{array}$$

un pătrat cartezian în $\mathcal{C}^I$ cu u epimorfism (deci epimorfism efectiv) Din corolarul la propoziția 8.1 rezultă că pătratele

$$\begin{array}{ccc} F'(i) & \to & G'(i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(i) & \to & G(i) \end{array}$$

sînt carteziene pentru toți $i \in \mathrm{Ob}(I)$. Întrucît u este epimorfism efectiv, $u(i)$ este epimorfism (= epimorfism efectiv) în $\mathcal{C}$ pentru orice $i \in \mathrm{Ob}(I)$. Întrucît $\mathcal{C}$ este cantoriană, $u'(i)$ este epimorfism efectiv în $\mathcal{C}$ pentru orice $i \in \mathrm{Ob}(I)$, deci u' este epimorfism efectiv în $\mathcal{C}^I$.

Astfel toate epimorfismele în $\mathcal{C}^I$ sînt efective universale. Dual, toate monomorfismele în $\mathcal{C}^I$ sînt efective universale, și teorema este complet demonstrată.

COROLARUL 1. *Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie cantoriană și I o categorie, produsul fibrat, produsul direct finit, nucleul, imaginea (și functorii duali) în $\mathcal{C}^I$ se calculează pe componente.*

COROLARUL 2. *Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie abeliană, atunci pentru orice categorie I, categoria $\mathcal{C}^I = \mathrm{Hom}\,(I, \mathcal{C})$ este abeliană.*

Demonstrație. Adunarea morfismelor în $\mathcal{C}^I$ se face pe componente deci astfel încît functorii $\mathrm{pr}_i : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ să fie aditivi. Restul rezultă din teorema 13.1.

DEFINIȚIE. Vom numi *functor de completare* orice functor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ care are un adjunct la dreapta $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ satisfăcînd $Ti = 1$. (Noțiunea duală : *functor de normalizare*).

În situația din definiție, i este deplin fidel și induce un izomorfism între categoria $\mathcal{C}'$ și subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată din obiectele de forma $i(X')$ cu X' în $\mathcal{C}'$.

Rezultă că, în definiția unui functor de completare, putem presupune întotdeauna că $\mathcal{C}'$ este o subcategorie plină a lui $\mathcal{C}$ și că i este incluziunea lui $\mathcal{C}'$. Cu această presupunere, un functor de completare $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este simplu un adjunct la stînga al incluziunii $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$. Aceasta înseamnă că, pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$ avem un morfism $\eta_A : A \to T(A)$ avînd proprietatea următoare : pentru orice obiect X în $\mathcal{C}'$ și orice morfism $f : A \to X$ există și este unic un morfism $g = T(f)$ astfel încît diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & X & \end{array}$$

În particular, pentru X în $\mathcal{C}'$ și $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}\,(T(A), X)$, $g_1\eta_A = g_2\eta_A$ implică $g_1 = g_2$. Firește, pentru A în $\mathcal{C}'$ se ia $T(A) = A$ și $\eta_A = 1_A$.

DEFINIȚIE. Dacă $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este un functor de completare, un obiect A în $\mathcal{C}$ se zice *complet* cînd η_A este izomorfism (și *separat* cînd η_A este monomorfism strict).

Să observăm că, dacă η_A are un invers la stînga, atunci η_A este izomorfism, deci A este complet. Într-adevăr, dacă $f\eta_A = 1$, atunci $(\eta_A f)\eta_A = \eta_A(f\eta_A) = \eta_A$, deci $\eta_A f = 1$.

Să mai observăm că A este complet dacă și numai dacă A este izomorf cu un obiect din $\mathcal{C}'$. Într-adevăr, dacă, în diagrama precedentă, f este izomorfism, atunci $g = T(f)$ este izomorfism, deci γ_{iA} este izomorfism, i.e. A este complet. Inversa este trivială.

Rezultă că, dacă $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este un functor de completare (și $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ adjunctul său la dreapta), atunci i induce o echivalență între $\mathcal{C}'$ și subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată din obiectele complete.

PROPOZIȚIA 13.2. *Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor de completare.*

1) *Dacă $F : J \to \mathcal{C}$ este un functor astfel încît $\varinjlim F$ există, atunci $\varinjlim TF$ există și avem*

$$\varinjlim TF = T(\varinjlim F),$$

i.e. T comută cu limita inductivă.

2) *Pentru $F : J \longrightarrow \mathcal{C}'$, $\varprojlim F'$ există dacă și numai dacă $\varprojlim iF'$ există și atunci avem*

$$i(\varprojlim F') = \varprojlim iF'.$$

Demonstrație. Prima asertiune este duala corolarului la propoziția 8.3 (și deci este adevărată fără ipoteza $Ti = 1$).

Să demonstrăm 2). Fie $F = iF'$, deci avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} & J & \\ {\scriptstyle F'}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle F} \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{\ i\ } & \mathcal{C} \end{array}$$

Dacă $\varprojlim F'$ există, atunci din corolarul la propoziția 8.3 rezultă că $\varprojlim F$ există și avem egalitatea din enunț (din nou fără ipoteza $Ti = 1$). Mai rămîne să arătăm că dacă $\varprojlim F$ există, atunci $\varprojlim F'$ există (în ipoteza $Ti = 1$).

Vom presupune că $\mathcal{C}'$ este o subcategorie a lui $\mathcal{C}$ și i incluziunea lui $\mathcal{C}'$. Fie $A = \varprojlim F$ și $\rho : c_A \to F$ morfismul canonic de componente $\rho_j : A \to F(j)$.

Pentru orice $j \in \mathrm{Ob}(J)$, $F(j) = F'(j)$ este un obiect în $\mathcal{C}'$, deci există și este unic un morfism $\overline{\rho}_j : T(A) \to F(j)$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\ {\scriptstyle \rho_j}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \overline{\rho}_j} \\ & F'(j) & \end{array}$$

Se vede imediat că $\bar{\rho}_j$ sînt componentele unui morfism functorial $\bar{\rho} : c_{T(A)} \to F'$. Rezultă că există și este unic un morfism $f : T(A) \to A$ astfel încît $\bar{\rho}_j = \rho_j f$ pentru toți $j \in \mathrm{Ob}\,(J)$. Avem $\rho_j f \eta_A = \bar{\rho}_j \eta_A = \rho_j$, deci $f\eta_A = 1$, deci η_A este în mod necesar un izomorfism. Rezultă că $T(A) = \varprojlim F'$ cu morfismul canonic $\bar{\rho}$.

COROLARUL 1. *Dacă* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *este un functor de completare și J-limitele proiective (inductive) există în* $\mathcal{C}$, *atunci J-limitele proiective (inductive) există în* $\mathcal{C}'$.

Demonstrație. Existența J-limitelor inductive în $\mathcal{C}'$ rezultă din 1) luînd $F = iF'$, deci $TF = TiF' = F'$, iar existența J-limitelor proiective în $\mathcal{C}'$ rezultă din 2).

Cînd F este functorul vid de capăt $\mathcal{C}$, $F' = TF$ este functorul vid de capăt $\mathcal{C}'$ și $F = iF'$. Din propoziția 13.2 rezultă că $e' = \varprojlim F'$ există dacă și numai dacă $e = \varprojlim F$ există și în acest caz $i(e') = e$, deci $T(e) = e'$.

Astfel este adevărat

COROLARUL 2. *Cînd* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *este un functor de completare, e este obiect final în* $\mathcal{C}$ *dacă și numai dacă* $e' = T(e)$ *este obiect final în* $\mathcal{C}'$ *și atunci e este un obiect complet.*

În particular, orice functor de completare comută cu obiectul final. Rezultă că, dacă $\mathcal{C}$ are limite proiective finite, un functor de completare $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ comută cu limitele proiective finite dacă și numai dacă comută cu produsul fibrat.

A doua teoremă de permanență pentru categorii cantoriene este

TEOREMA 13.2. *Dacă* $\mathcal{C}$ *este o categorie cantoriană și* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor de completare care comută cu produsul fibrat, atunci* $\mathcal{C}'$ *este o categorie cantoriană.*

Demonstrație. Permanența axiomei C1) rezultă din corolarul 1 de mai sus.

În rest vom face uz numai de faptul că $\mathcal{C}$ este cantoriană și T comută cu limitele proiective finite și limitele inductive finite.

În particular, cînd v este epimorfism efectiv (resp. monomorfism efectiv), $T(v)$ este epimorfism efectiv (resp. monomorfism efectiv).

Fie u un morfism în $\mathcal{C}'$ și $v = i(u)$. Atunci $v = \varepsilon p$ cu p epimorfism efectiv și ε monomorfism efectiv. Rezultă că $u = Ti(u) = T(v) = T(\varepsilon)\,T(p)$ cu $T(p)$ epimorfism efectiv și $T(\varepsilon)$ monomorfism efectiv. Astfel toate morfismele în $\mathcal{C}'$ sînt efective, în particular, monomorfismele și epimorfismele (iar bijecțiile sînt izomorfisme).

Să considerăm acum o diagramă carteziană în $(\mathcal{C}')$

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{u'} & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

cu u epimorfism (= epimorfism efectiv). Întrucît $\mathcal{C}$ este cantoriană, avem $i(u) = \varepsilon p$ cu i monomorfism efectiv și p epimorfism efectiv (în $\mathcal{C}$). Vom construi o diagramă comutativă (în $\mathcal{C}$)

$$\begin{array}{ccccc} D' & \xrightarrow{p'} & C' & \xrightarrow{\varepsilon'} & i(B') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ i(A) & \xrightarrow{p} & C & \xrightarrow{\varepsilon} & i(B) \end{array}$$

în care cele două pătrate adiacente sînt carteziene. Rezultă că p' este epimorfism efectiv și ε' monomorfism efectiv în $\mathcal{C}$, deci $T(p')$ este epimorfism efectiv și $T(\varepsilon')$ monomorfism efectiv în $\mathcal{C}'$.

Apoi diagrama

$$\begin{array}{ccc} T(C') & \xrightarrow{T(\varepsilon')} & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(C) & \xrightarrow{T(\varepsilon)} & B \end{array}$$

este cartezianǎ și $T(\varepsilon)$ monomorfism efectiv. Dar $u = T(\varepsilon)T(p)$ este epimorfism efectiv prin ipoteză, deci $T(\varepsilon)$ este o bijecție efectivă, deci un izomorfism. Rezultă că $T(\varepsilon')$ este izomorfism, deci $T(\varepsilon')\ T(p')$ este epimorfism efectiv.

În sfîrșit, diagrama

$$\begin{array}{ccc} T(D') & \xrightarrow{T(\varepsilon')T(p')} & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

este carteziană, deci este izomorfă cu diagrama carteziană considerată inițial, deci u' este epimorfism efectiv ca și $T(\varepsilon')T(p')$.

Astfel toate epimorfismele în $\mathcal{C}'$ sînt efective universale. Dual, toate monomorfismele în $\mathcal{C}'$ sînt efective universale.

COROLARUL 1. *Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie abeliană și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor de completare care comută cu produsul fibrat, atunci $\mathcal{C}'$ este o categorie abeliană.*

Demonstrație. Introducem pe $\mathcal{C}'$ unica structură de categorie preadditivă care face din i un functor aditiv. Existența obiectului zero este asigurată atunci de C1). Restul rezultă din teorema precedentă.

COROLARUL 2. *În condițiile teoremei* 13.2 *(în particular în condițiile corolarului precedent), functorul T comută cu functorii* Im *și* Coim.

Demonstrație. Se ține seama că $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ sînt cantoriene și se aplică propozițiile 13.1 și 13.2.

PROPOZIȚIA 13.3. *Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor de completare care comută cu limitele proiective finite. Pentru J o categorie dată, dacă $\mathcal{C}$ are proprie-*

tatea că J-limitele inductive există în $\mathcal{C}$ și comută cu limitele proiective finite, atunci $\mathcal{C}'$ are aceeași proprietate.

Demonstrație. Presupunem că $\mathcal{C}$ are proprietatea din enunț. Existența J-limitelor inductive în $\mathcal{C}'$ rezultă din corolarul 1 la propoziția 13.2.

Să demonstrăm, ca exemplu, că functorul

$$\varinjlim_J : \mathcal{C}'^J \to \mathcal{C}'$$

comută cu produsul fibrat. Fie

$$\begin{array}{ccc} F' & \longrightarrow & G' \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \longrightarrow & G \end{array}$$

o diagramă carteziană în $\mathcal{C}'^I$. Întrucît i^* (= compunerea cu i la stînga) este un adjunct la dreapta al lui T^* (= compunerea cu T la stînga), diagrama

$$\begin{array}{ccc} iF' & \longrightarrow & iG' \\ \downarrow & & \downarrow \\ iF & \longrightarrow & iG \end{array}$$

este carteziană în $\mathcal{C}^J$. Din ipoteza asupra lui $\mathcal{C}$ rezultă că diagrama

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim iF' & \longrightarrow & \varinjlim iG' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim iF & \longrightarrow & \varinjlim iG \end{array}$$

este carteziană în $\mathcal{C}$. Din ipoteza asupra lui T rezultă că diagrama

$$\begin{array}{ccc} T(\varinjlim iF') & \longrightarrow & T(\varinjlim iG') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(\varinjlim iF) & \longrightarrow & T(\varinjlim iG) \end{array}$$

este carteziană în $\mathcal{C}'$. Întrucît $Ti = 1$, din propoziția 13.2 rezultă că diagrama precedentă coincide cu diagrama

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim F' & \longrightarrow & \varinjlim G' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim F & \longrightarrow & \varinjlim G \end{array}$$

ceea ce atestă că functorul $\varinjlim : \mathcal{C}'^J \to \mathcal{C}'$ comută cu produsul fibrat.

Capitolul II

Teoria fasciculelor

§ 1. Prefascicule

Fie $\mathfrak{U}$ un univers fixat.

Vom nota $\mathfrak{U}$-**Cat** categoria avînd ca obiecte $\mathfrak{U}$-categoriile mici și ca morfisme functorii. Întrucît orice functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se identifică cu aplicația

$$\mathrm{Fl}\,(\mathcal{C}) \to \mathrm{Fl}\,(\mathcal{C}')$$

indusă de F, se vede ușor că $\mathfrak{U}$-**Cat** este o $\mathfrak{U}$-categorie. Evident, $\mathfrak{U}$-**Ens** este subcategoria plină a lui $\mathfrak{U}$-**Cat** care are ca obiecte categoriile discrete.

Vom considera categoria $\mathfrak{U}$-**Top**. Reamintim că obiectele acestei categorii sînt spațiile topologice ale căror mulțimi subiacente aparțin unversului $\mathfrak{U}$, iar morfismele acestei categorii sînt aplicațiile continue.

În absența mențiunii exprese a contrariului, prin *spațiu topologic* vom înțelege un obiect în $\mathfrak{U}$-**Top**.

Avem un functor contravariant

$$\tau : (\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Top})^\circ \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Cat}$$

definit cum urmează. Pentru orice spațiu topologic X, $\tau(X)$ este *topologia* lui X, i.e. categoria (sau mulțimea ordonată) în care obiectele sînt mulțimile deschise ale lui X iar morfismele sînt incluziunile. Cînd X este un obiect în $\mathfrak{U}$-**Top**, evident $\tau(X)$ este o $\mathfrak{U}$-categorie mică, deci un obiect în $\mathfrak{U}$-**Cat**. Vom scrie, *prin abuz*, $U \in \tau(X)$ în loc de $U \in \mathrm{Ob}\,(\tau(X))$.

Să considerăm acum o aplicație continuă

$$\psi : X \to Y.$$

Vom defini functorul

$$\tau(\psi) : \tau(Y) \to \tau(X)$$

prin

$$\tau(\psi)(V) = \psi^{-1}(V)$$

pentru orice $V \in \tau(Y)$. Dacă $V' \subset V$, atunci $\psi^{-1}(V) \subset \psi^{-1}(V)$ etc., deci $\tau(f)$ este într-adevăr un functor.

DEFINIȚIE. Fie X un spațiu topologic și $\mathcal{C}$ o $\mathfrak{U}$-categorie. Se numește *prefascicul* pe X cu valori în $\mathcal{C}$ (sau simplu prefascicul pe X cînd nici o ambiguitate nu este posibilă) orice functor contravariant

$$F : \tau(X)^\circ \to \mathcal{C}.$$

Astfel un prefascicul F este o funcție care asociază cu orice mulțime deschisă U în X un obiect $F(X)$ în $\mathcal{C}$ și cu orice cuplu de mulțimi deschise U, V în X satisfăcînd $V \subset U$ un morfism $\rho_V^U : F(U) \to F(V)$, *numit morfism de restricție* de la U la V, astfel încît condițiile următoare să fie îndeplinite :

1) $\rho_U^U = 1_{F(U)}$ pentru orice U.

2) $\rho_W^U = \rho_W^V \rho_V^U$ pentru orice triplet de mulțimi deschise U, V, W în X satisfăcînd $W \subset V \subset U$.

Să observăm că notația folosită pentru morfismele de restricție este ambiguă întrucît ea nu distinge între diverse prefascicule.

Prefasciculele pe X cu valori în $\mathcal{C}$ sînt deci obiectele categoriei

$$\mathfrak{A}(X, \mathcal{C}) = \mathrm{Hom}\ (\tau(X)^\circ, \mathcal{C})$$

(prima parte a egalității este o definiție). Morfismele acestei categorii se numesc *morfisme de prefascicule*. Un morfism de prefascicule

$$\theta : F' \to F$$

este deci o familie

$$\theta = (\theta_U)_{U \in \tau(X)}$$

de morfisme

$$\theta_U : F'(U) \to F(U)$$

cu proprietatea că, pentru orice cuplu de mulțimi deschise U, V în X satisfăcînd $V \subset U$, diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} F'(U) & \xrightarrow{\theta_U} & F(U) \\ {\scriptstyle \rho_V^U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_V^U} \\ F'(V) & \xrightarrow{\theta_V} & F(V) \end{array}$$

i.e.

$$\theta_V \rho_V^U = \rho_V^U \theta_U.$$

Întrucît $\tau(X)$ este o $\mathfrak{U}$-categorie mică și $\mathcal{C}$ o $\mathfrak{U}$-categorie, $\mathfrak{A}(X, \mathcal{C})$ este o $\mathfrak{U}$-categorie.

Fie F un prefascicul pe X și U o mulțime deschisă în X. Vom defini un prefascicul G pe U astfel :

$$G(V) = F(U)$$

pentru orice mulțime deschisă $V \subset U$. Apoi dacă $V' \subset V \subset U$, morfismul de restricție de la V la V' al lui G este egal cu morfismul de restricție de la V la V' al lui F. Acest prefascicul G se numește restricția lui F la U și se notează $G = F \mid U$.

Să presupunem acum că $\mathcal{C}$ este una din categoriile $\mathfrak{U}$-**Ens**, $\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A**. Din capitolul 1 rezultă că $\mathfrak{U}$-limitele proiective există în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C}) = \mathrm{Hom}(\tau(X)^\circ, \mathcal{C})$; în plus, pentru orice $\mathfrak{U}$-categorie mică J, orice functor

$$F : J \to \mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$$

și orice mulțime deschisă U în X,

$$(\varprojlim F)(U) = \varprojlim F(U)$$

i. e. $\varprojlim F$ se calculează pe componente. De asemenea, $\mathfrak{U}$-limitele inductive pseudofiltrante conexe există în categoria $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$, comută cu limitele proiective finite și se calculează pe componente.

Cînd $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Ens** (resp. $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Ab**), categoria $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ este cantoriană (resp. abeliană); în plus $\mathfrak{U}$-limitele inductive în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ există și se calculează pe componente.

§ 2. Fascicule

DEFINIȚIE. Fie X un spațiu topologic și U o mulțime deschisă în X. Se numește *acoperire* (uneori : *acoperire deschisă*) a lui U orice familie $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ de mulțimi deschise în X astfel încît $I \in \mathfrak{U}$ și astfel încît $U = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Cu alte cuvinte, o acoperire α a lui U este o aplicație

$$\alpha : I \to \mathrm{Ob}\ (\tau(X))$$

astfel încît $I \in \mathfrak{U}$ și astfel încît

$$\bigcup_{i \in I} \alpha(i) = U.$$

Cu orice acoperire

$$\alpha : I \to \mathrm{Ob}\ (\tau(X))$$

a lui U, se asociază o acoperire

$$\beta : \alpha(I) \longrightarrow \mathrm{Ob}\ (\tau(X))$$

a lui U cu $\beta(U) = U$ pentru orice $U \in \alpha(I)$, unde $\alpha(I)$ este imaginea mulțimii I prin aplicația α. Această acoperire β se numește *imaginea* lui α și se notează $\beta = \mathrm{Im}\alpha$.

Pentru orice mulțime deschisă U avem o acoperire a lui U formată din unicul element U. Pentru $U = \varnothing$, aplicația vidă

$$\varnothing \to \mathrm{Ob}\ (\tau(X))$$

este o acoperire a lui U numită *acoperirea vidă*.

DEFINIȚIE. Fie X un spațiu topologic și $\mathcal{C}$ o $\mathfrak{U}$-categorie. Se numește *fascicul* pe X orice prefascicul $F : \tau(X)^\circ \to \mathcal{C}$ având proprietatea că, pentru orice mulțime deschisă U în X, orice acoperire $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ a lui U și orice obiect T în $\mathcal{C}$, diagrama

$$\mathrm{Hom}\,(T, F(U)) \xrightarrow{\varepsilon_T} \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}\ (T, F(U_i)) \underset{\psi_T}{\overset{\varphi_T}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathrm{Hom}\ (T, F(U_i \cap U_j))$$

este exactă în $\mathfrak{U}$-**Ens**, unde ε_T este aplicația

$$f \longmapsto (\rho^U_{U_i} f)_{i \in I}$$

iar φ_T și ψ_T sînt aplicațiile

$$(f_i)_{i \in I} \longmapsto (\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j} f_i)_{(i,j) \in I \times I} \quad \text{și} \quad (f_i)_{i \in I} \longmapsto (\rho^{U_j}_{U_i \cap U_j} f_j)_{(i,j) \in I \times I}$$

Fasciculele pe X cu valori în $\mathcal{C}$ formează o subcategorie plină a lui $\mathfrak{A}(X, \mathcal{C})$ pe care o vom nota $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$. Morfismele în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ se numesc *morfisme de fascicule*.

Evident, cînd F este un fascicul pe X, $F \mid U$ este un fascicul pe U pentru orice mulțime deschisă U în X.

Prefasciculele (fasciculele) cu valori în $\mathfrak{U}$-**Ens**, $\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A** etc. se mai numesc prefascicule (fascicule) de mulțimi, grupuri abeliene etc.

PROPOZIȚIA 2.1. *Dacă F este un fascicul pe X cu valori în $\mathcal{C}$, atunci $F(\varnothing)$ este obiect final în $\mathcal{C}$.*

Demonstrație. Pentru $U = \varnothing$ și α acoperirea vidă a lui U, ultimii doi termeni ai diagramei din definiția precedentă sînt mulțimi cu un singur element. Din exactitate rezultă că primul termen este tot o mulțime cu un singur element, ceea ce atestă că obiectul $F(\varnothing)$ este final în $\mathcal{C}$.

Fie $\mathcal{C}$ o $\mathfrak{U}$-categorie cu obiect final e și fie $A \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$. Pentru orice spațiu topologic X, vom nota *ambiguu* prin c_A prefasciculul pe X definit prin $c_A(U) = A$ pentru orice U. Evident, c_A este *un fascicul dacă și numai dacă $A = e$ și evident c_e este un obiect final în categoria $\mathfrak{A}(X, \mathcal{C})$ și în categoria $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$*.

COROLAR. *Condițiile următoare sînt echivalente*:

1) *Există un fascicul pe X cu valori în $\mathcal{C}$.*

2) *$\mathcal{C}$ are un obiect final.*

Demonstrație. Din propoziția precedentă rezultă că 1) implică 2). Invers, dacă $\mathcal{C}$ are un obiect final e, c_e este un fascicul pe X cu valori în $\mathcal{C}$.

Să revenim la definiția fasciculelor. Evident, $\varphi_T \varepsilon_T = \psi_T \varepsilon_T$ pentru orice prefascicul F. Rezultă că un prefascicul F este un fascicul dacă și

numai dacă pentru orice acoperire $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ a lui U, orice obiect T în $\mathcal{C}$ şi orice familie $(f_i)_{i \in I}$ de morfisme $f_i : T \to F(U_i)$ satisfăcînd

$$\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j} f_i = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j} f_j$$

pentru toţi $(i, j) \in I \times I$, există şi este unic un morfism $f : T \to F(U)$ astfel încît

$$\rho^{U}_{U_i} f = f_i$$

pentru toţi $i \in I$.

Evident, această condiţie este îndeplinită pentru acoperirea α dacă şi numai dacă este indeplinită pentru acoperirea $\beta = \mathrm{Im}\alpha$. În particular, în definiţia fasciculelor, putem lua numai acoperiri indexate pe submulţimi ale lui Ob $(\tau(X))$. Rezultă că definiţia fasciculului nu depinde de alegerea universului $\mathfrak{U}$ cu proprietatea că X este un obiect în $\mathfrak{U}$-**Top** şi $\mathcal{C}$ o $\mathfrak{U}$-categorie.

Cînd $\mathfrak{U}$-produsele directe există în $\mathcal{C}$, atunci, după definiţia produselor directe, diagrama din definiţia fasciculelor este izomorfă cu diagrama

$$\mathrm{Hom}\,(T, F(U)) \to \mathrm{Hom}\,(T, \prod F(U_i)) \rightrightarrows \mathrm{Hom}\,(T, \prod F(U_i \cap U_j)).$$

Or această ultimă diagramă este exactă în $\mathfrak{U}$-**Ens** dacă şi numai dacă diagrama

$$F(U) \xrightarrow{\varepsilon} \prod F(U_i) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} \prod F(U_i \cap U_j)$$

este exactă în $\mathcal{C}$, unde ε este morfismul de componente

$$\rho^{U}_{U_i} : F(U) \to F(U_i),$$

φ morfismul de componente

$$\prod F(U_i) \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} F(U_i) \xrightarrow{\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}} F(U_i \cap U_j)$$

iar ψ morfismul de componente

$$\prod F(U_i) \xrightarrow{\mathrm{pr}_j} F(U_j) \xrightarrow{\rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}} F(U_i \cap U_j).$$

Aici pr_i sînt proiecţiile canonice ale produsului direct $\prod F(U_i)$.

Astfel este adevărată

PROPOZIŢIA 2.2. *Cînd $\mathfrak{U}$-produsele directe există în $\mathcal{C}$, condiţiile următoare pentru un prefascicul $F : \tau(X)^\circ \to \mathcal{C}$ sînt echivalente :*

1) *F este fascicul.*

2) *Pentru orice $U \in \tau(X)$ şi orice acoperire $(U_i)_{i \in I}$ a lui U, diagrama*

$$F(U) \xrightarrow{\varepsilon} \prod F(U_i) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} \prod F(U_i \cap U_j)$$

este exactă în $\mathcal{C}$.

COROLARUL 1. *F este fascicul pe X cu valori în $\mathcal{C}$ dacă și numai dacă, pentru orice obiect T în $\mathcal{C}$, compusul*

$$\tau(X)^\circ \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}(T,.)} \mathfrak{U}\text{-Ens}$$

este fascicul pe X cu valori în $\mathfrak{U}$-**Ens**.

COROLARUL 2. *Dacă $\mathcal{C}$ este una din categoriile* $\mathfrak{U}$-**Ens** $\mathfrak{U}$-**M**, $\mathfrak{U}$-**G**, $\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A**, *condițiile următoare asupra unui prefascicul $F : \tau(X)^\circ \to \mathcal{C}$ sînt echivalente :*

1) *F este fascicul*

2) *Pentru orice $U \in \tau(X)$, orice acoperire $(U_i)_{i \in I}$ a lui U și orice familie $(f_i)_{i \in I}$ de elemente $f_i \in F(U_i)$ cu proprietatea că*

$$\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(f_i) = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(f_j)$$

pentru orice $(i, j) \in I \times I$, există și este unic un element $f \in F(U)$ astfel încît

$$\rho^{U}_{U_i}(f) = f_i$$

pentru toți $i \in I$.

În particular, în condițiile corolarului 2, dacă F este un fascicul și dacă, pentru $f, g \in F(U)$, există o acoperire $(U_i)_{i \in I}$ a lui U cu proprietatea că $\rho^{U}_{U_i}(f) = \rho^{U}_{U_i}(g)$ pentru toți $i \in I$, atunci $f = g$.

§ 3. Fibre

În acest paragraf vom presupune că $\mathfrak{U}$-categoria $\mathcal{C}$ este astfel încît $\mathfrak{U}$-limitele proiective pseudofiltrante conexe există în $\mathcal{C}$.

Pentru orice $x \in X$, vom nota $\mathfrak{V}_x$ submulțimea ordonată ($=$ subcategoria plină) a lui $\tau(X)$ formată din mulțimile deschise U care conțin pe x. Evident, $\mathfrak{V}_x$ *este o categorie pseudofiltrantă conexă.*

DEFINIȚIE. Fie $x \in X$. Dacă $P : \tau(X)^\circ \to \mathcal{C}$ este un prefascicul, obiectul

$$P_x = \varinjlim_{U \in \mathfrak{V}_x} P(U)$$

se numește fibră a lui P în x. De asemenea, dacă $\theta : P' \to P$ este un morfism de prefascicule pe X, morfismul

$$\theta_x = \varinjlim_{U \in \mathfrak{V}_x} \theta(U)$$

se numește fibră a lui θ în x.

După definiția limitei inductive, avem morfisme canonice

$$\rho_x^U : P(U) \to P_x, \quad U \in \mathfrak{V}_x,$$

cu proprietatea că

$$\rho_x^U = \rho_x^V \rho_V^U$$

pentru orice cuplu (U, V) de mulțimi U, $V \in \mathfrak{V}_x$ astfel încît $V \subset U$, iar $\theta_x : P'_x \to P_x$ este unicul morfism care face comutative diagramele

$$\begin{array}{ccc} P'(U) & \xrightarrow{\rho_x^U} & P'_x \\ {\scriptstyle \theta_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_x} \\ P(U) & \xrightarrow{\rho_x^U} & P_x \end{array}$$

pentru toți $U \in \mathfrak{V}_x$.

DEFINIȚIE. Fie P un prefascicul pe X cu valori în $\mathcal{C}$. Se numește *suport* al lui P mulțimea

$$\operatorname{Supp} P = \{x \in X \mid P_x \text{ nu este obiect final în } \mathcal{C}\}.$$

În general, mulțimea $\operatorname{Supp} P$ nu este închisă.

DEFINIȚIE. Fie P un prefascicul (pe X cu valori în $\mathcal{C}$). Dacă $\mathcal{C}$ este una din categoriile $\mathfrak{U}$-**Ens**, $\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A** etc., elementele lui $P(U)$ se numesc *secțiuni* ale lui P peste U iar elementele lui P_x se numesc *germeni* ai lui P în x.

În condițiile din definiție, dacă $s \in P(U)$ și $V \subset U$, vom scrie uneori $s \mid V$ în loc de $\rho_V^U(s)$ și vom numi $s \mid V$ *restricția* lui s la V. Dacă $s \in P(U)$ și $x \in U$, vom scrie uneori s_x în loc de $\rho_x^U(s)$ și vom numi s_x *germenul* definit de s în x.

În sfîrșit, dacă $\theta : P' \to P$ este un morfism de prefascicule, vom scrie uneori $\theta(s)$ în loc de $\theta_U(s)$ și $\theta(g)$ în loc de $\theta_x(g)$ pentru orice secțiune $s \in P'(U)$ și orice germen $g \in P'_x$.

PROPOZIȚIA 3.1. *Fie $\mathcal{C}$ una din categoriile* $\mathfrak{U}$-**Ens**, $\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A**, *$x \in X$, P un prefascicul pe X cu valori în $\mathcal{C}$ și s, $t \in P(X)$ astfel încît $s_x = t_x$. Atunci există o vecinătate deschisă U a lui x astfel încît*

$$s \mid U = t \mid U.$$

Demonstrație. După lema I.10.2 *)

COROLAR. *Fie $\mathcal{C}$ una din categoriile* $\mathfrak{U}$-**Ens**, $\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A**, *$\theta : P' \to P$ un morfism de prefascicule (pe X cu valori în $\mathcal{C}$), $x \in X$ și s, $t \in P'(X)$ astfel încît $\theta_x(s_x) = \theta_x(t_x)$. Atunci există o vecinătate deschisă U a lui x astfel încît*

$$\theta_U(s \mid U) = \theta_U(t \mid U).$$

*) Prin lema I.10.2 se înțelege lema 10.2 din Cap. I.

Demonstrație. Avem

$$\theta_x(s_x) = (\theta_X(s))_x \text{ și } \theta_x(t_x) = (\theta_X(t))_x.$$

Din ipoteza corolarului și din propoziția 3.1 rezultă că există o vecinătate deschisă U a lui x astfel încît

$$\theta_X(s) \mid U = \theta_X(t) \mid U.$$

Dar avem

$$\theta_X(s) \mid U = \theta_U(s \mid U) \text{ și } \theta_X(t) \mid U = \theta_U(t \mid U),$$

ceea ce termină demonstrația corolarului.

PROPOZIȚIA 3.2. *Fie $\mathcal{C}$ una din categoriile* **U-Ens**, **U-Ab**, **U-A**, *F un fascicul pe X cu valori în $\mathcal{C}$, U o mulțime deschisă în X și s, $t \in F(U)$ astfel încît $s_x = t_x$ pentru orice $x \in U$. Atunci $s = t$.*

Demonstrație. Din propoziția precedentă rezultă că există o acoperire deschisă $(U_i)_{i \in I}$ a lui U astfel încît $s \mid U_i = t \mid U_i$ pentru toți $i \in I$. Întrucît F este fascicul, din corolarul 2 la propoziția 2.2 rezultă că $s = t$.

TEOREMA 3.1. *Fie $\mathcal{C}$ una din categoriile* **U-Ens**, **U-Ab**, **U-A**, *P un prefascicul, F un fascicul (pe X cu valori în $\mathcal{C}$) și $(\theta_x)_{x \in X}$ o familie de morfisme (în $\mathcal{C}$)*

$$\theta_x : P_x \to F_x$$

cu proprietatea că, pentru orice $x \in X$ și orice $g \in P_x$, există o vecinătate deschisă W a lui x, o secțiune $s \in P(W)$ și o secțiune $t \in F(W)$ astfel încît

$$s_x = g \text{ și } \theta_z(s_z) = t_z$$

pentru orice $z \in W$. Atunci există și este unic un morfism de prefascicule

$$\theta : P \to F$$

cu fibre θ_x pentru toți $x \in X$. Acest morfism θ se definește astfel: pentru orice mulțime deschisă U în X și orice secțiune $s \in U$, $t = \theta_U(s) \in F(U)$ este unicul element satisfăcînd

$$\theta_x(s_x) = t_x$$

pentru toți $x \in U$.

Demonstrație. Să presupunem că θ există. Atunci, pentru orice mulțime deschisă U în X și orice secțiune $s \in P(U)$, $t = \theta_U(s) \in F(U)$ este unicul element astfel încît

$$\theta_x(s_x) = t_x$$

pentru toți $x \in U$.

Într-adevăr, elementul $\theta_U(s)$ satisface aceste egalități întrucît diagramele

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} P(U) & \xrightarrow{\theta_U} & F(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_x & \xrightarrow{\theta_x} & F_x \end{array}$$

sînt comutative pentru toți $x \in U$. Pe de altă parte, dacă un element $s \in F(U)$ satisface egalitățile precedente, atunci $t = \theta_U(s)$, în virtutea propoziției precedente.

În particular, θ este unic.

Să demonstrăm acum că θ există. Fie U o mulțime deschisă în X și $s \in P(U)$. Atunci există și este unic un element $t \in F(U)$ astfel încît

$$\theta_x(s_x) = t_x$$

pentru toți $x \in U$. Unicitatea lui t rezultă din propoziția precedentă. Pe de altă parte, din ipoteza teoremei rezultă că există o acoperire deschisă $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ a lui U și pentru fiecare $\alpha \in A$ o secțiune $t_\alpha \in F(W_\alpha)$ astfel încît

$$\theta_z(s_z) = (t_\alpha)_z$$

pentru toți $z \in W_\alpha$. Rezultă că

$$(t_\alpha)_z = \theta_z(s_z) = (t_\beta)_z$$

pentru toți $z \in W_\alpha \cap W_\beta$. Întrucît F este fascicul, rezultă mai întîi (în virtutea propoziției precedente) că

$$t_\alpha | W_\alpha \cap W_\beta = t_\beta | W_\alpha \cap W_\beta$$

pentru orice cuplu $(\alpha, \beta) \in A \times A$, apoi că există o secțiune $t \in F(U)$ astfel încît

$$t | W_\alpha = t_\alpha$$

pentru toți $\alpha \in A$. Pentru orice $x \in U$, există $\alpha \in A$ astfel încît $x \in W_\alpha$, deci

$$\theta_x(s_x) = (t_\alpha)_x = t_x,$$

ceea ce demonstrează existența lui t.

Vom defini atunci

$$\theta_U(s) = t.$$

Din proprietatea de unicitate a lui t și din faptul că fiecare θ_x este un morfism în $\mathcal{C}$, rezultă că fiecare θ_U este un morfism în $\mathcal{C}$ și că familia

$$\theta = (\theta_U)_{U \in \tau(X)}$$

este un morfism de prefascicule de la P în F. Din definiția lui θ_U rezultă că diagramele (1) sînt comutative, i.e. θ_x este fibra lui θ în x, ceea ce termină demonstrația teoremei.

COROLARUL 1. *Fie* $\mathcal{C}$ *una din categoriile* $\mathfrak{U}$-**Ens**, $\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A**, P *un prefascicul,* F *un fascicul și* $u, v \in \mathrm{Hom}\,(P, F)$ *astfel încît* $u_x = v_x$ *pentru toți* $x \in X$. *Atunci* $u = v$.

COROLARUL 2. *Fie* $\mathcal{C}$ *una din categoriile* $\mathfrak{U}$-**Ens**, $\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A**. *Condițiile următoare pentru un morfism* $\theta : F' \to F$ *în categoria* $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ *sînt echivalente:*

1) θ *este izomorfism.*

2) *Pentru orice* $x \in X$, $\theta_x : F'_x \to F_x$ *este izomorfism.*

Demonstrație. Într-adevăr, 1) implică 2) întrucît limita inductivă este un functor. Invers, dacă orice θ_x este izomorfism, familia $(\theta_x^{-1})_{x \in X}$ de morfisme $\theta_x^{-1} : F_x \to F'_x$ satisface condiția teoremei 3.1 etc.

§ 4. Imagini directe

Fie $\mathcal{C}$ o $\mathfrak{U}$-categorie, X și Y spații topologice (obiecte în $\mathfrak{U}$-**Top**) și $\psi : X \to Y$ o aplicație continuă.

Considerăm functorul

$$\tau(\psi) : \tau(Y) \to \tau(X)$$

și dualul său

$$\tau(\psi)^\circ : \tau(Y)^\circ \to \tau(X)^\circ.$$

Compunerea cu $\tau(\psi)^\circ$ la dreapta definește un functor

$$\mathfrak{F}(X, \mathcal{C}) \to \mathfrak{F}(Y, \mathcal{C})$$

care se numește *functorul imagine directă* asociată cu ψ și se notează ψ_* sau simplu $\dot{\psi}$.

Mai precis, pentru orice prefascicul $F : \tau(X)^\circ \to \mathcal{C}$, $\dot{\psi}(F) = F\tau(\psi)^\circ$ este un prefascicul $\dot{\psi}(F) : \tau(Y)^\circ \to \mathcal{C}$. Acest prefascicul $\dot{\psi}(F)$ se numește *imaginea directă* a lui F prin $\dot{\psi}$. Avem

$$\dot{\psi}(F)(V) = F(\dot{\psi}^{-1}(V))$$

pentru orice mulțime deschisă V în Y.

De asemenea, pentru orice morfism $\theta : F' \to F$ în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$, $\dot{\psi}(\theta) = \theta\tau(\psi)^\circ$ este un morfism

$$\dot{\psi}(\theta) : \dot{\psi}(F') \to \dot{\psi}(F)$$

în $\mathfrak{F}(Y, \mathcal{C})$. Acest morfism $\dot{\psi}(\theta)$ se numește *imaginea directă* a lui θ prin $\dot{\psi}$. Avem

$$\dot{\psi}(\theta)_V = \theta_{\psi^{-1}(V)}$$

pentru orice mulțime deschisă V în Y.

Cînd F este fascicul, $\psi(F)$ este de asemenea fascicul. Astfel functorul imagine directă induce un functor

$$\mathfrak{F}(X, \mathcal{C}) \to \mathfrak{F}(Y, \mathcal{C}).$$

Din definiţie rezultă imediat că imaginea directă de prefascicule sau fascicule este *tranzitivă*: Dacă $X \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\psi'} Z$ sînt aplicaţii continue (morfisme în **U-Top**), atunci

$$(\psi' \psi)(F) = \psi'(\psi(F))$$

şi

$$(\psi' \psi)(\theta) = \psi'(\psi(\theta))$$

pentru orice obiect F şi orice morfism θ în categoria $\mathfrak{L}(X, \mathcal{C})$. De exemplu,

$$(\psi' \psi)(F) = F\,\tau(\psi' \psi)^\circ = F\,\tau(\psi)^\circ\ \tau(\psi')^\circ$$
$$= \psi(F)\ \tau(\psi')^\circ = \psi'(\psi(F)).$$

De asemenea, se vede imediat că, pentru orice mulţime deschisă V în Y şi orice fascicul F pe X,

$$\psi(F \mid \psi^{-1}(V)) = \psi(F) \mid V.$$

Să presupunem acum că U-limitele inductive pseudofiltrante conexe există în $\mathcal{C}$. Fie F un prefascicul pe X, $x \in X$ şi $y = \psi(x)$. Fibrele F_x şi $\psi(F)_y$ există şi avem

$$F_x = \varinjlim_{U \in \mathfrak{V}_x} F(U) \quad \text{şi} \quad \psi(F)_y = \varinjlim_{V \in \mathfrak{V}_y} F(\psi^{-1}(V))$$

Rezultă că există şi este unic un morfism

$$\psi_x : \psi(F)_y \to F_x$$

astfel încît, pentru orice $V \in \mathfrak{V}_y$, diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(\psi^{-1}(V)) = \psi(F)(V) & \xrightarrow{\rho_y^V} & \psi(F)_y \\ & {\scriptstyle \rho_x^{\psi^{-1}(V)}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \psi_x} & \\ & F_x & \end{array}$$

este comutativă, i.e. astfel încît

$$\psi_x \rho_y^V = \rho_x^{\psi^{-1}(V)}.$$

De exemplu, cînd $\mathcal{C}$ este una din categoriile **U-Ens**, **U-Ab**, **U-A**, din diagrama precedentă rezultă că, pentru orice $s \in F(\psi^{-1}(V))$, avem

$$\psi_x(s_y) = s_x$$

pentru $y = \psi(x)$.

Morfismul ψ_x *este functorial în* F : dacă $\theta : F' \to F$ este un morfism în categoria $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$, diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} \psi(F')_y & \xrightarrow{\psi_x} & F'_x \\ {\scriptstyle \psi(\theta)_y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_x} \\ \psi(F)_y & \xrightarrow{\psi_x} & F_x \end{array}$$

Într-adevăr, să considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \psi(F')(V) & \xrightarrow{\rho_y^V} & \psi(F')_y & \xrightarrow{\psi_x} & F'_x \\ {\scriptstyle \psi(\theta)V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi(\theta)_y} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_x} \\ \psi(F)(V) & \xrightarrow{\rho_y^V} & \psi(F)_y & \xrightarrow{\psi_x} & F_x \end{array}$$

Din definiția lui $\psi(\theta)_y$ rezultă că pătratul din stînga este comutativ. Din cele precedente și din definiția lui θ_x rezultă că dreptunghiul este comutativ. Urmează că avem

$$\psi_x \, \psi(\theta)_y \, \rho_y^V = \theta_x \, \psi_x \, \rho_y^V$$

pentru orice $V \in \mathfrak{V}_y$, de unde

$$\psi_x \, \psi(\theta)_y = \theta_x \, \psi_x$$

întrucît ρ_y^V sînt morfismele canonice ale limitei inductive.

Notăm că, în general, ψ_x nu este nici monomorfism, nici epimorfism. Dar cînd ψ este *monomorfism strict*, ψ_x este *izomorfism*. Într-adevăr, se vede ușor că ψ este monomorfism strict în $\mathfrak{U}$-**Top** dacă și numai dacă aplicația $X \to \psi(X)$ indusă de ψ este omeomorfism. Rezultă că, dacă ψ este monomorfism strict, mulțimile $\psi^{-1}(V)$ cu $V \in \mathfrak{V}_y$ formează un sistem fundamental de vecinătăți ale lui x. Din acestă ultimă proprietate rezultă imediat că avem

$$F_x = \varinjlim_{V \in \mathfrak{V}_y} F(\psi^{-1}(V))$$

cu morfisme canonice

$$\rho_x^{\psi^{-1}(V)} = \psi_y \, \rho_y^V,$$

deci ψ_x este în mod necesar izomorfism.

Propoziția 4.1. *Fie* $\mathcal{C}$ *una din categoriile* $\mathfrak{U}$-**Ens**, $\mathfrak{U}$-**M**, $\mathfrak{U}$-**G**, $\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A**. *Atunci, pentru orice fascicul* F *pe* X,

$$\operatorname{Supp} \psi(F) \subset \overline{\psi(S)},$$

unde

$$S = \operatorname{Supp} F.$$

Demonstrație. Să observăm mai întîi că, în condițiile din enunț, dacă U este o mulțime deschisă în X astfel încît F este obiect final în $\mathcal{C}$

pentru orice $x \in U$, atunci $F(U)$ este obiect final în $\mathcal{C}$. Într-adevăr, $\mathcal{C}$ fiind una din categoriile considerate în enunț, un obiect e în $\mathcal{C}$ este final dacă și numai dacă mulțimea subiacentă lui e conține un singur element. Rezultă că, dacă F_x este obiect final în $\mathcal{C}$ pentru orice $x \in U$ și dacă $s,\ t \in F(U)$, atunci $s_x = t_x$ pentru orice $x \in U$, deci $s = t$ în virtutea propoziției 3.1.

Fie acum $y \in Y - \overline{\psi(S)}$. Există $V \in \mathfrak{V}_y$ astfel încît

$$V \cap \psi(S) = \varnothing$$

deci

$$\psi^{-1}(V) \cap S = \varnothing.$$

Din observația precedentă rezultă că, pentru orice $V' \in \mathfrak{V}_y$ astfel încît $V' \subset V$, $\psi(F)(V) = F(\psi^{-1}(V))$ este obiect final în $\mathcal{C}$, deci $\psi(F)_y$ este obiect final în $\mathcal{C}$, i.e. y nu aparține mulțimii Supp $\psi(F)$, ceea ce termină demonstrația propoziției 4.1.

§ 5. ψ-morfisme

DEFINIȚIE. Fie F un prefascicul pe X, G un prefascicul pe Y și $\psi : X \to Y$ o aplicație continuă. Se numește ψ-morfism de la G în F orice morfism $\theta : G \to \psi(F)$ de prefascicule pe Y.

Deci un ψ-morfism $\theta : G \to F$ este o familie

$$\theta = (\theta_V)_{V \in \tau(Y)}$$

de morfisme

$$\theta_V : G(V) \to F(\psi^{-1}(V))$$

în $\mathcal{C}$ astfel încît, pentru orice cuplu de mulțimi deschise V, V' în Y satisfăcînd $V' \subset V$, diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} G(V) & \xrightarrow{\theta_V} & F(\psi^{-1}(V)) \\ {\scriptstyle \rho^{V}_{V'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{\psi^{-1}(V)}_{\psi^{-1}(V')}} \\ G(V') & \xrightarrow{\theta_{V'}} & F(\psi^{-1}(V')) \end{array}$$

i.e.

$$\rho^{\psi^{-1}(V)}_{\psi^{-1}(V')}\,\theta_V = \theta_{V'}\,\rho^{V}_{V'}. \tag{1}$$

Pentru orice cuplu (U, V) astfel încît $U \in \tau(X)$, $V \in \tau(Y)$ și $\psi(U) \subset V$, avem atunci un morfism

$$\theta_{U,V} = \rho^{\psi^{-1}(V)}_{U}\,\theta_V \tag{2}$$

deci

$$\theta_{U,V} : G(V) \xrightarrow{\theta_V} F(\psi^{-1}(V)) \xrightarrow{\rho^{\psi^{-1}(V)}_{U}} F(U).$$

Dacă (U, V) și (U', V') sînt două astfel de cupluri și dacă $U' \subset U$ și $V' \subset V$, atunci, evident, diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} F(\psi^{-1}(V)) & \xrightarrow{\rho_U^{\psi^{-1}(V)}} & F(U) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{\psi^{-1}(V')}^{\psi^{-1}(V)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{U'}^{U}} \\ F(\psi^{-1}(V')) & \xrightarrow{\rho_{U'}^{\psi^{-1}(V')}} & F(U') \end{array}$$

Din (1) și (2) rezultă că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} G(V) & \xrightarrow{\theta_{U,V}} & F(U) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{V'}^{V}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{U'}^{U}} \\ G(V') & \xrightarrow{\theta_{U',V'}} & F(U') \end{array}$$

i.e.

$$\rho_{U'}^{U}\, \theta_{U,V} = \theta_{U',V'}\, \rho_{V'}^{V}. \tag{3}$$

Este ușor de văzut că aplicația

$$\theta \rightsquigarrow (\theta_{U,V})$$

definită prin formulele (2) este o bijecție între mulțimea ψ-morfismelor θ de la G în F și mulțimea familiilor $(\theta_{U,V})$ de morfisme $\theta_{U,V} : G(V) \to F(U)$ satisfăcînd condițiile (3); inversa acestei aplicații se obține prin formulele

$$\theta_V = \theta_{\psi^{-1}(V),V}.$$

Astfel, ψ-morfismele θ de la G în F se identifică prin această bijecție cu familiile de morfisme $\theta_{U,V} : G(V) \to F(U)$ satisfăcînd condițiile (3).

Notăm că, dacă $\theta' : G' \to G$ este un morfism de prefascicule pe X și $\theta : G \to \psi(F)$ un ψ-morfism, atunci

$$\theta\theta' : G' \to \psi(F)$$

este un ψ-morfism. De asemenea, dacă $\theta'' : F \to F''$ este un morfism de prefascicule pe Y și $\theta : G \to \psi(F)$ un ψ-morfism, atunci

$$\psi(\theta'')\ \theta : G \to \psi(F'')$$

este un ψ-morfism.

Să presupunem acum că $\mathfrak{A}$-limitele inductive pseudofiltrante conexe există în $\mathcal{C}$. Fie $\theta : G \to \psi(F)$ un ψ-morfism și $x \in X$. Atunci există și este unic un morfism

$$\theta_x : G_{\psi(x)} \to F_x$$

cu proprietatea că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} G(V) & \xrightarrow{\rho^{V}_{\psi(x)}} & G_{\psi(x)} \\ {\scriptstyle \theta_{U,V}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_x} \\ F(U) & \longrightarrow & F_x \end{array}$$

pentru orice cuplu (U, V) astfel încît $U \in \tau(U)$, $V \in \tau(Y)$ şi $\psi(U) \subset V$.

Într-adevăr, morfismul

$$\theta^{V}_{x} = \rho^{U}_{x}\,\theta_{U,V} = \rho^{U}_{x}\,\rho^{\psi^{-1}(V)}_{U}\theta_{V} = \rho^{\psi^{-1}(V)}_{x}\theta_{V}$$

depinde numai de V. Apoi este clar că, pentru $V' \subset V$, avem

$$\theta^{V}_{x} = \theta^{V'}_{x}\,\rho^{V}_{V'}.$$

Existenţa şi unicitatea lui θ_x rezultă atunci din definiţia limitei inductive.

În particular, θ_x este unicul morfism care face comutative diagramele

$$\begin{array}{ccc} G(V) & \xrightarrow{\rho^{V}_{\psi(x)}} & G_{\psi(x)} \\ {\scriptstyle \theta_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_x} \\ F(\psi^{-1}(V)) & \xrightarrow{\rho^{\psi^{-1}(V)}_{x}} & F_x \end{array}$$

pentru toate vecinătăţile deschise V ale lui $\psi(x)$.

Pe de altă parte, pentru orice cuplu (U, V) astfel încît $U \in \tau(X)$, $V \in \tau(Y)$ şi $\psi(U) \subset V$, diagrama

$$\begin{array}{ccccc} G(V) & \xrightarrow{\theta_V} & F(\psi^{-1}(V)) & \xrightarrow{\rho^{\psi^{-1}(V)}_{U}} & F(U) \\ {\scriptstyle \rho^{V}_{y}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{\psi^{-1}(V)}_{y}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{U}_{x}} \\ G_y & \xrightarrow{\theta_y} & \psi(F)_y & \xrightarrow{\psi_x} & F_x \end{array}$$

este comutativă, unde $y = \psi(x)$. Rezultă că avem

$$\theta_x = \psi_x\,\theta_{\psi(x)},$$

i.e. θ_x este morfismul compus

$$\theta_x : G_{\psi(x)} \xrightarrow{\theta_{\psi(x)}} \psi(F)_{\psi(x)} \xrightarrow{\psi_x} F_x.$$

§ 6. Imagini inverse

În §4 am asociat cu orice aplicație continuă $\varphi : X \to Y$ un functor

$$\varphi : \mathfrak{L}(X, \mathcal{C}) \to \mathfrak{L}(Y, \mathcal{C})$$

pe care l-am numit *functorul imagine directă*. Acest functor induce, prin restricție la subcategoria $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$, un functor

$$\mathfrak{F}(X, \mathcal{C}) \to \mathfrak{L}(Y, \mathcal{C}).$$

DEFINIȚIE. Adjunctul la stînga al functorului $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C}) \to \mathfrak{L}(Y, \mathcal{C})$ se numește *functorul imagine inversă* asociat cu φ și se notează φ^{-1}.

Fie G un prefascicul pe Y. Din definiția adjunctului la stînga rezultă că functorul φ^{-1} este definit în G dacă și numai dacă există un cuplu $(\varphi^{-1}(G), \xi_G)$ format dintr-un fascicul $\varphi^{-1}(G)$ pe X și un *morfism canonic*

$$\xi_G : G \to \varphi(\varphi^{-1}(G))$$

cu următoarea proprietate universală : Pentru orice fascicul F pe X, aplicația (functorială în F)

$$\mathrm{Hom}\,(\varphi^{-1}(G), F) \to \mathrm{Hom}\,(G, \varphi(F))$$

definită prin

$$v \rightsquigarrow v^{\flat} = \varphi(v)\,\xi_G$$

este bijectivă, i.e. pentru orice φ-morfism u de la G în F, există și este unic un morfism

$$u^{\#} : \varphi^{-1}(G) \to F$$

astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\xi_G} & \varphi(\varphi^{-1}(G)) \\ & {\scriptstyle u}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \varphi(u^{\#})} & \\ & \varphi(F) & \end{array}$$

deci astfel încît

$$u = \varphi(u^{\#})\,\xi_G .$$

De exemplu, dacă e este un obiect final în $\mathcal{C}$, φ^{-1} este definit în c_e. În acest caz vom lua $\varphi^{-1}(c_e) = c_e$ și $\xi_{c_e} = 1_{c_e}$.

Dacă functorul φ^{-1} este definit în G, vom spune că $\varphi^{-1}(G)$ este *imaginea inversă* a lui G prin φ și că ξ_G este *morfismul* canonic al imaginii inverse.

Dacă ψ^{-1} este definit în G_1 şi G_2 şi dacă $\theta : G_1 \to G_2$ este un morfism de prefascicule, atunci $\psi^{-1}(\theta) : \psi^{-1}(G_1) \to \psi^{-1}(G_2)$ este definit şi este unicul morfism care face comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\xi_{G_1}} & \psi(\psi^{-1}(G_1)) \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi(\psi^{-1}(\theta))} \\ G_2 & \xrightarrow{\xi_{G_1}} & \psi(\psi^{-1}(G_2)) \end{array}$$

Să presupunem că $\mathcal{C}$ este astfel încît $\psi^{-1}(G)$ este definit pentru orice prefascicul G pe Y. Din teoria functorilor adjuncţi rezultă atunci că aplicaţia bijectivă

$$\mathrm{Hom}\,(\psi^{-1}(G), F) \to \mathrm{Hom}\,(G, \psi(F))$$

definită prin $v \sim\!\!\to \psi(v)\ \xi_G$ este functorială şi în G şi că inversa ei este aplicaţia

$$u \sim\!\!\to u^{\#} = \eta_F\, \psi^{-1}(u),$$

unde

$$\eta_F : \psi^{-1}(\psi(F)) \to F$$

este morfismul

$$\eta_F = (1_{\psi(F)})^{\#},$$

i.e. η_F este unicul morfism astfel încît

$$\psi(\eta_F)\ \xi_G = 1_{\psi(F)}.$$

Să mai observăm că imaginea inversă de prefascicule este *tranzitivă*. Într-adevăr, fie $\psi' : Y \to Z$ o altă aplicaţie continuă de spaţii topologice şi H un prefascicul pe Z astfel încît functorul ψ'^{-1} este definit în H. Din propoziţia I.6.3 rezultă atunci că functorul $(\psi'\ \psi)^{-1}$ este definit în H dacă şi numai dacă functorul ψ^{-1} este definit în $\psi'^{-1}(H)$ şi în acest caz avem

$$(\psi'\ \psi)^{-1}(H) = \psi^{-1}(\psi'^{-1}(H)).$$

Teorema 6.1. *Cînd $\mathcal{C}$ este una din categoriile* **U-Ens**, **U-Ab**, **U-A** *functorul ψ^{-1} este definit peste tot, i.e. orice prefascicul G pe Y are o imagine inversă.*

Demonstraţie. Fie G un prefascicul pe Y. Vom defini fasciculul

$$G' = \psi^{-1}(G)$$

după cum urmează. Pentru orice mulţime deschisă U în X, $G'(U)$ este mulţimea aplicaţiilor

$$s' : U \to \bigcup_{x \in U} G_{\psi(x)}$$

cu proprietatea că există o acoperire $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ a lui U şi pentru orice $\alpha \in A$ o mulţime deschisă $V_\alpha \supset \psi(W_\alpha)$ şi o secţiune $s_\alpha \in G(V_\alpha)$ astfel încît

$$s'(x) = (s_\alpha)_{\psi(x)}$$

pentru orice $x \in W_\alpha$. În particular, $s'(x) \in G_{\psi(x)}$ pentru orice $x \in W_\alpha$. Cînd $\mathcal{C}$ este categoria $\mathfrak{U}$-**Ab** sau $\mathfrak{U}$-**A**, operațiile în $G'(U)$ se definesc pe componente; de exemplu, pentru $s_1', s_2' \in G'(U)$, $s_1' + s_2'$ este aplicația definită prin $(s_1' + s_2')(x) = s_1'(x) + s_2'(x)$ etc. Evident, $G'(U)$ este atunci un obiect în $\mathcal{C}$.

Dacă $U_1 \subset U_2$, vom defini aplicația

$$\rho_{U_1}^{U_2} : G'(U_2) \to G'(U_1)$$

prin

$$\rho_{U_1}^{U_2}(s') = s' \mid U_1.$$

Evident, $\rho_{U_1}^{U_2}$ este un morfism în $\mathcal{C}$, și evident G' este un prefascicul pe X cu valori în $\mathcal{C}$.

Să arătăm că G' este un fascicul. Fie $(U_i)_{i \in I}$ o acoperire a lui U și $(s_i')_{i \in I}$ o familie de secțiuni $s_i' \in G'(U_i)$ astfel încît

$$s_i' = s_j' \text{ pe } U_i \cap U_j,$$

i.e. astfel încît

$$s_i'(x) = s_j'(x)$$

pentru $x \in U_i \cap U_j$. Rezultă că există și este unic $s' \in G'(U)$ satisfăcînd

$$s'(x) = s_i'(x)$$

pentru $x \in U$, ceea ce atestă că G' este fascicul.

Să definim acum morfismul canonic

$$\xi = \xi_G : G \to \dot{\psi}(G').$$

Fie V o mulțime deschisă în Y. Pentru orice secțiune $s \in G(V)$ vom defini

$$s' = \xi_V(s)$$

prin

$$s'(x) = s_{\psi(x)}$$

pentru orice $x \in V$. Evident, aplicația $\xi_V : G(V) \to G'(\dot{\psi}^{-1}(V))$ astfel definită este un morfism în $\mathcal{C}$. Apoi dacă $V_1 \subset V_2$ avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccc} G(V_1) & \xrightarrow{\xi_{V_1}} & G'(\dot{\psi}^{-1}(V_1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(V_2) & \xrightarrow{\xi_{V_2}} & G'(\dot{\psi}^{-1}(V_2)) \end{array}$$

care arată că familia

$$\xi = (\xi_V)_{V \in \tau(Y)}$$

este un $\dot{\psi}$ morfism.

Pentru orice $x \in X$, *aplicația*

$$\xi_x : G_{\psi(x)} \to G'_x$$

este surjectivă. Într-adevăr, fie $g' \in G'_x$. Din definiția lui G' rezultă că există o vecinătate deschisă W a lui x, o vecinătate deschisă $V \supset \dot{\psi}(W)$ a lui $\dot{\psi}(x)$, o secțiune $s' \in G'(W)$ și o secțiune $s \in G(V)$ astfel încît

$$s'_x = g' \text{ și } s'(z) = s_{\psi(z)}$$

pentru toți $z \in W$ (deci $\xi_{W,V}(s) = s'$). Fie

$$g = s_{\psi(x)}.$$

Din definiția lui ξ și din diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} G(V) & \xrightarrow{\rho^V_{\psi(x)}} & G_{\psi(x)} \\ {\scriptstyle \xi_{W,V}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_x} \\ G'(W) & \xrightarrow{\rho^W_x} & G'_x \end{array}$$

rezultă că

$$\xi_x(g) = g',$$

ceea ce atestă că aplicația ξ_x este surjectivă.

Rămîne să stabilim proprietatea universală a cuplului (G', ξ). Fie F un fascicul și $u : G \to \dot{\psi}(F)$ un $\dot{\psi}$-morfism. Trebuie să arătăm că există și este unic un morfism $\theta = u^{\#} : G' \to F$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\xi} & \dot{\psi}(G') \\ & {\scriptstyle u}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \psi(\theta)} & \\ & \dot{\psi}(F) & \end{array} \tag{1}$$

Mai întîi unicitatea lui θ. Dacă diagrama precedentă este comutativă, atunci

$$u_x = \theta_x \, \xi_x$$

pentru orice $x \in X$, cum se vede folosind diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccc} G(V) & \xrightarrow{\xi_V} & G'(\dot{\psi}^{-1}(V)) & \xrightarrow{\theta_{\dot{\psi}^{-1}(V)}} & F(\dot{\psi}^{-1}(V)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G_{\psi(x)} & \xrightarrow{\xi_x} & G'_x & \xrightarrow{\theta_x} & F_x \end{array}$$

unde V este orice mulțime deschisă în Y conținînd pe $\dot{\psi}(x)$.

Întrucît ξ_x este epimorfism, θ_x este unic. Întrucît F este fascicul, θ este unic (după corolarul la teorema 3.1).

Să demonstrăm existența lui θ. Fie $x \in X$. Vom defini o aplicație

$$\theta_x : G'_x \to F_x$$

după cum urmează. Fie $g' \in G'_x$. Există o vecinătate deschisă W a lui x, o vecinătate deschisă $V \supset \psi(W)$ a lui $\psi(x)$, o secțiune $s' \in G'(W)$ și o secțiune $s \in G(V)$ astfel încît

$$s'_x = g' \text{ și } \xi_{W,V}(s) = s'.$$

Avem o secțiune

$$t = u_{W,V}(s) \in F(W).$$

Vom defini

$$\theta_x(g') = t_x.$$

Se vede fără nici o greutate mai întîi că elementul $\theta_x(g') \in F_x$ astfel definit nu depinde de alegerea lui W, V, s' și s, apoi că aplicația θ_x astfel definită este un morfism în $\mathcal{C}$. Evident, familia $(\theta_x)_{x \in X}$ satisface condiția din enunțul teoremei 3.1. Deci există un morfism

$$\theta : G' \to F$$

avînd fibrele θ_x pentru toți $x \in X$. Pentru orice mulțime deschisă U în X și orice secțiune $s' \in G'(U)$, $t = \theta_U(s') \in F(U)$ este unicul element astfel încît

$$\theta_x(s'_x) = t_x$$

pentru toți $x \in U$. Vom arăta că diagrama (1) este comutativă, deci că, pentru orice mulțime deschisă V în Y, diagrama

$$\begin{array}{ccc} G(V) & \xrightarrow{\xi_V} & G'(\psi^{-1}(V)) \\ & {\scriptstyle u_V}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \theta_{\psi^{-1}(V)}} & \\ & F(\psi^{-1}(V)) & \end{array}$$

Fie $s \in G(V)$, $s' = \xi_V(s) \in G'(\psi^{-1}(V))$ și $t = u_V(s)$. Din definiția lui θ_x rezultă că avem

$$\theta_x(s'_x) = t_x$$

pentru toți $x \in \psi^{-1}(V)$, i.e.

$$\theta_{\psi^{-1}(V)}(s') = t,$$

ceea ce termină demonstrația teoremei 6.1.

PROPOZIȚIA 6.1. *În condițiile teoremei* 6.1,

$$\xi_x : G_{\psi(x)} \to \dot{\psi}^{-1}(G)_x$$

este izomorfism (functorial în G).

Demonstrație. Știm că aplicația ξ_x este surjectivă. Mai rămîne să arătăm că este și injectivă.

Fie $g_1, g_2 \in G_{\psi(x)}$ astfel încît

$$\xi_x(g_1) = \xi_x(g_2).$$

Există o vecinătate deschisă V a lui $\dot{\psi}(x)$ și secțiuni $s_1, s_2 \in G(V)$ astfel încît

$$(s_1)_{\psi(x)} = g_1 \text{ și } (s_2)_{\psi(x)} = g_2.$$

Fie $s_1' = \xi_V(s_1)$ și $s_2' = \xi_V(s_2)$. Avem

$$(s_1')_x = (s_2')_x,$$

deci există o vecinătate deschisă $W \subset \dot{\psi}^{-1}(V)$ a lui x astfel încît

$$s_1' \mid W = s_2' \mid W.$$

Din definiția lui ξ_V rezultă că

$$(s_1)_{\psi(z)} = (s_2)_{\psi(z)}$$

pentru orice $z \in W$. În particular

$$(s_1)_{\psi(x)} = (s_2)_{\psi(x)},$$

i.e.

$$g_1 = g_2,$$

deci ξ_x este izomorfism. Faptul că acest izomorfism este functorial în G este imediat (se ține seama de faptul că ξ_G este functorial în G).

COROLAR. *Pentru* $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Ens** *și* $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Ab**, *functorul imagine inversă*

$$\dot{\psi}^{-1} : \mathfrak{T}(Y, \mathcal{C}) \to \mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$$

comută cu limitele proiective finite.

Demonstrație. Dacă e este un obiect final în $\mathcal{C}$, avem $\dot{\psi}^{-1}(c_e) = c_e$ și $\xi_{c_e} = 1_{c_e}$, deci ψ^{-1} comută cu obiectul final. Rămîne să arătăm că $\dot{\psi}^{-1}$ comută cu produsul fibrat.

Să considerăm un pătrat cartezian

$$\begin{array}{ccc} Q' & \longrightarrow & P' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q & \longrightarrow & P \end{array}$$

în categoria $\mathfrak{P}(Y, \mathcal{C})$. Întrucît ll-limitele inductive pseudofiltrante conexe în $\mathfrak{P}(Y, \mathcal{C})$ comută cu produsele fibrate, pătratele următoare sînt carteziene (în $\mathcal{C}$)

$$\begin{array}{ccc} Q'_y & \longrightarrow & P'_y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_y & \longrightarrow & P_y \end{array}$$

pentru toți $y \in Y$. Din propoziția precedentă rezultă că pătratele

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(Q')_x & \longrightarrow & \psi^{-1}(P')_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi^{-1}(Q)_x & \longrightarrow & \psi^{-1}(P)_x \end{array}$$

sînt carteziene în $\mathcal{C}$ pentru toți $x \in X$. Se va arăta mai jos (propoziția 7.2) că în aceste condiții pătratul

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(Q') & \longrightarrow & \psi^{-1}(P') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi^{-1}(Q) & \longrightarrow & \psi^{-1}(P) \end{array}$$

este cartezian în categoria $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$, ceea ce va termina demonstrația corolarului.

Notăm că ψ^{-1}, fiind un adjunct la stînga, comută cu ll-limitele inductive. În particular ψ^{-1} *este un functor exact.*

§ 7. Functorul R°

Fie X un spațiu topologic și $\mathcal{C}$ o categorie.

Pentru $\psi = 1_X$, restricția la categoria $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ a functorului imagine directă asociat cu ψ este functorul de incluziune

$$i : \mathfrak{F}(X, \mathcal{C}) \to \mathfrak{P}(X, \mathcal{C}).$$

Vom nota prin R° functorul imagine inversă asociat cu identitatea lui X, i.e. $R^\circ = \psi^{-1}$ pentru $\psi = 1_X$. Acest functor este deci un adjunct la stînga al lui i, definit în general numai pe o subcategorie plină a lui $\mathfrak{P}(X, \mathcal{C})$.

Fie P un prefascicul (pe X cu valori în $\mathcal{C}$). Din definiția functorului imagine inversă rezultă că R° este definit în P dacă și numai dacă există un cuplu $(R^\circ(P), \xi)$ format dintr-un fascicul $R^\circ(P)$ și un morfism de prefascicule

$$\xi_P : P \to R^\circ(P)$$

cu următoarea proprietate universală : pentru orice fascicul F (pe X cu valori în $\mathcal{C}$) și orice morfism de prefascicule

$$u : P \to F$$

există și este unic un morfism de fascicule

$$u^{\#} : R^{\circ}(P) \to F$$

astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & R^{\circ}(P) \\ & {\scriptstyle u}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle u^{\#}} & \\ & F & \end{array}$$

Dacă R° este definit în P și în P' și dacă $\theta : P' \to P$ este un morfism de prefascicule, atunci $R^{\circ}(\theta)$ este unicul morfism care face comutativă diagrama următoare

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{\xi_{P'}} & R^{\circ}(P) \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R^{\circ}(\theta)} \\ P & \xrightarrow{\xi_{P}} & R^{\circ}(P) \end{array}$$

Functorul R° este totdeauna definit în F pentru F fascicul. Într-adevăr, în acest caz se poate lua și se va lua $R^{\circ}(F) = F$ și $\xi_F = 1_F$. Deci compunerea $R^{\circ}i$ are sens și avem $R^{\circ}i = 1$.

Rezultă că, dacă R este definit peste tot pe categoria $\mathfrak{L}(X, \mathcal{C})$, atunci R° este un *functor de completare*. În virtutea teoremei 6.1, acesta este cazul cînd $\mathcal{C}$ este una din categoriile $\mathfrak{U}$-**Ens**, $\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A**.

Din propoziția I.13.2 rezultă nemijlocit

PROPOZIȚIA 7.1. *Fie $\mathcal{C}$ o $\mathfrak{U}$-categorie astfel încît functorul R° este definit peste tot și J o categorie.*

1) *Dacă $\Psi : J \to \mathfrak{L}(X, \mathcal{C})$ este un functor astfel încît* $\varinjlim \Psi$ *există, atunci* $\varinjlim R^{\circ}\Psi$ *există și avem*

$$\varinjlim R^{\circ}\Psi = R^{\circ}(\varinjlim \Psi)$$

i.e. R° comută cu limita inductivă.

2) *Pentru $\Phi : J \to \mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ un functor,* $\varprojlim \Phi$ *există dacă și numai dacă* $\varprojlim i\,\Phi$ *există și atunci avem*

$$i(\varprojlim \Phi) = \varprojlim i\,\Phi.$$

Astfel, după 2), pentru $\Phi : J \to \mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$, dacă $F = \varprojlim \Phi$ în $\mathfrak{L}(X, \mathcal{C})$, atunci F este un fascicul etc. În schimb, dacă $P = \varinjlim \Phi$ în

$\mathfrak{A}(X, \mathcal{C})$, atunci P în general nu este fascicul, dar, după 1), avem $R^\circ(P) = \varinjlim \Phi$ în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$.

COROLAR. *Pentru* $\mathcal{C} =$ **U-Ens** *sau* $\mathcal{C} =$ **U-Ab**, U*-limitele proiective și inductive există în categoria* $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$.

Demonstrație. Știm că U-limitele proiective și inductive există în $\mathfrak{A}(X, \mathcal{C})$ etc.

DEFINIȚIE. Fie P un prefascicul (pe X cu valori în $\mathcal{C}$). Dacă functorul R° este definit în P, atunci vom spune că $R^\circ(P)$ este *fasciculul asociat* lui P. Un fascicul F se zice *simplu* dacă există un obiect A în $\mathcal{C}$ astfel încît $F \approx R^\circ(c_A)$.

Evident, pentru $F = R^\circ(c_A)$, $F_x = A$ pentru orice $x \in X$. De aceea se mai spune că $R^\circ(c_A)$ este fasciculul simplu (pe X) de fibră A.

DEFINIȚIE. Fie $\mathcal{C}$ una din categoriile U-**Ens**, U-**Ab**, U-**A**. Un prefascicul P (pe X cu valori în $\mathcal{C}$) se zice *separat* dacă există un fascicul G astfel încît $P \subset G$, i.e. astfel încît $P(U) \subset G(U)$ în $\mathcal{C}$ pentru orice mulțime deschisă U în X.

În acest caz se poate calcula $F = R^\circ(P)$ considerînd un soi de *închidere* a lui P în G. În mod precis, pentru orice mulțime deschisă U în X, fie $F(U)$ mulțimea tuturor secțiunilor $s \in G(U)$ cu proprietatea că există o acoperire $(U_i)_{i \in I}$ a lui U (depinzînd de s) astfel încît $s \mid U_i \in P(U_i)$ pentru toți $i \in I$. Evident, $F(U)$ este un subobiect al lui $G(U)$ în categoria $\mathcal{C}$, și evident, F astfel definit este un fascicul pe X cu valori în $\mathcal{C}$ și avem $P \subset F \subset G$. Vom defini morfismul

$$\xi_P : P \to F$$

ca fiind incluziunea. Este ușor de văzut atunci că perechea $(R^\circ(P) = F, \xi_P)$ are proprietatea universală din definiția lui R°.

Rezultă că, $\mathcal{C}$ fiind mereu una din categoriile U-**Ens**, U-**Ab**, U-**A**, un prefascicul P este separat dacă și numai dacă $\xi_P : P \to R^\circ(P)$ este un monomorfism.

De exemplu, pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, prefasciculul constant c_A este separat. Într-adevăr, fasciculul $F = R^\circ(c_A)$ se poate calcula astfel: pentru orice mulțime deschisă U în X, $F(U)$ este mulțimea tuturor aplicațiilor *local constante* $s : U \to A$ (într-un sens evident) etc.

PROPOZIȚIA 7.2. *Pentru* $\mathcal{C} =$ **U-Ens** *sau* $\mathcal{C} =$ **U-Ab**, *un pătrat*

$$\pi : \quad \begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{u'} & F' \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ G & \xrightarrow{u} & F \end{array}$$

în categoria $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ *este cartezian (cocartezian) dacă și numai dacă, pentru orice* $x \in X$, *pătratul*

$$\pi_x : \quad \begin{array}{ccc} G'_x & \xrightarrow{u'_x} & F'_x \\ {\scriptstyle \beta_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_x} \\ G_x & \xrightarrow{u_x} & F_x \end{array}$$

este cartezian (cocartezian) în $\mathcal{C}$.

Demonstrație. Vom demonstra propoziția pentru cartezian.

Necesitatea. Să presupunem π cartezian în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$. Functorul de incluziune $i : \mathfrak{F}(X, \mathcal{C}) \to \mathfrak{L}(X, \mathcal{C})$ comută cu limitele proiective întrucît el are un adjunct la stînga și anume pe R°. În particular, pătratul π este cartezian de asemenea în categoria $\mathfrak{L}(X, \mathcal{C})$. Or, știm că $\mathfrak{U}$-limitele inductive pseudofiltrante conexe în $\mathfrak{L}(X, \mathcal{C})$ comută cu limitele proiective finite. Rezultă în particular că pătratele π_x sînt carteziene în $\mathcal{C}$. (În cazul cocartezian, necesitatea este trivială întrucît limitele inductive comută cu sumele fibrate).

Suficiența. Să presupunem că pătratele π_x sînt toate carteziene. Din corolarul precedent rezultă că avem, în categoria $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$, un pătrat cartezian

$$\begin{array}{ccc} G \times_F F' & \xrightarrow{p_2} & F' \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ G & \xrightarrow{u} & F \end{array}$$

Rezultă că există și este unic un morfism $\theta : G' \to G \times_F F'$ astfel încît

$$\beta = p_1 \theta \text{ și } u' = p_2 \theta.$$

Întrucît condiția din enunț este necesară, pentru orice $x \in X$, pătratul

$$\begin{array}{ccc} (G \times_F F')_x & \xrightarrow{(p_2)_x} & F'_x \\ {\scriptstyle (p_1)_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_x} \\ G_x & \xrightarrow{u_x} & F_x \end{array}$$

este cartezian, deci θ_x este izomorfism. Din corolarul 2 la teorema 3.1 rezultă că θ este izomorfism.

Cu această lemă demonstrația corolarului la propoziția 6.1 este completă. În particular, pentru $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Ens** sau $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Ab**, functorul de completare $R^\circ : \mathfrak{L}(X, \mathcal{C}) \to \mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ comută cu limitele proiective finite. Din teoria functorilor de completare rezultă că are loc

TEOREMA 7.1. *Categoria* $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ *este cantoriană pentru* $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Ens** *și abeliană pentru* $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Ab**. *În ambele cazuri* $\mathfrak{U}$*-limitele proiective și*

inductive există în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$, *iar* $\mathfrak{U}$*-limitele inductive pseudofiltrante conexe comută cu limitele proiective finite și cu functorul de supraiacență*

$$\gamma : \mathfrak{F}(X, \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}) \to \mathfrak{F}(X, \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens}).$$

Din propoziția 7.2 rezultă că avem un izomorfism canonic

$$(G \times_F F')_x \approx G_x \times_{F_x} F'_x.$$

În particular, pentru $F = c_e$, avem un izomorfism canonic

$$(G \times F')_x \approx G_x \times F'_x.$$

De asemenea, dacă

$$D : F \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} G$$

este o diagramă în categoria $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ și dacă, pentru orice $x \in X$,

$$D_x : F_x \underset{v_x}{\overset{u_x}{\rightrightarrows}} G_x,$$

avem izomorfisme canonice

$$(\operatorname{Ker} D)_x \approx \operatorname{Ker} D_x \text{ și } (\operatorname{Coker} D)_x \approx \operatorname{Coker} D_x.$$

În particular, un morfism $\theta : F' \to F$ în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ este monomorfism (epimorfism) dacă și numai dacă, pentru orice $x \in X$, $\theta_x : F'_x \to F_x$ este monomorfism (epimorfism) în $\mathcal{C}$. Rezultă că, pentru orice morfism $u : F \to G$ în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$, avem izomorfisme canonice

$$(\operatorname{Im} u)_x \approx \operatorname{Im} u_x \text{ și } (\operatorname{Coim} u)_x \approx \operatorname{Coim} u_x.$$

În cazul $\mathcal{C} = \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}$, un șir

$$F' \to F \to F''$$

în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ este exact dacă și numai dacă, pentru orice $x \in X$, șirul

$$F'_x \to F_x \to F''_x$$

este exact în $\mathcal{C}$. În particular, pentru orice morfism $u : F \to G$ în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ avem izomorfisme canonice

$$(\operatorname{Ker} u)_x \approx \operatorname{Ker} u_x \text{ și } (\operatorname{Coker} u)_x \approx \operatorname{Coker} u_x.$$

Observație. Pentru $\mathcal{C} = \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens}$ sau $\mathcal{C} = \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}$, un morfism $\theta : F \to G$ în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ este monomorfism în $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ dacă și numai dacă θ este monomorfism în $\mathfrak{A}(X, \mathcal{C})$. Într-adevăr, suficiența condiției este trivială, ar necesitatea rezultă din faptul că functorul de incluziune

$$i : \mathfrak{F}(X, \mathcal{C}) \to \mathfrak{A}(X, \mathcal{C}),$$

fiind un adjunct la dreapta, este exact la stînga. Notăm că asertiunea corespunzătoare pentru epimorfisme nu este adevărată. Se poate afirma doar că sînt echivalente condițiile următoare :

1) θ este epimorfism.

2) Pentru orice mulțime deschisă U în X și orice secțiune $t \in G(U)$ există o acoperire $(U_i)_{i \in I}$ a lui U și secțiuni $s_i \in F(U_i)$ astfel încît $\theta_{U_i}(s_i) = t \mid U_i$.

Pentru demonstrație, se observă că fiecare din condițiile 1) și 2) este echivalentă cu faptul că, pentru orice $x \in X$, $\theta_x : F_x \to G_x$ este epimorfism.

§ 8. Module pe un spațiu inelat

DEFINIȚIE. Se numește *spațiu inelat* un spațiu topologic X înzestrat cu un fascicul de inele comutative care se numește *fasciculul structural* al lui X și se notează $\mathcal{O}_X$.

Se obișnuiește să se noteze prin aceeași literă un spațiu inelat și spațiul topologic subiacent (presupus mereu obiect în categoria $\mathfrak{U}$-**Top**).

Spațiile inelate formează o categorie. Dacă X și Y sînt spații inelate, un morfism de la X în Y este un cuplu $\psi = (\psi_0, \psi_1)$ format dintr-o aplicație continuă $\psi_0 : X \to Y$ și un ψ_0-morfism $\psi_1 : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$. Nu vom studia aici această categorie.

DEFINIȚIE. Fie X un spațiu inelat. Se numește *Premodul* pe X un prefascicul P de grupuri abeliene înzestrat cu un morfism (de prefascicule de grupuri abeliene pe X)

$$\mathcal{O}_X \times P \to P$$

astfel încît, pentru orice mulțime deschisă U în X, aplicația indusă

$$\mathcal{O}_X(U) \times P(U) \to P(U)$$

înzestrează grupul abelian $P(U)$ cu o structură de $\mathcal{O}_X(U)$-modul. Se numește *Modul* pe X un Premodul F astfel încît prefasciculul subiacent lui F este fascicul.

Un Premodul (Modul) pe X este deci un prefascicul (fascicul) de mulțimi P astfel încît, pentru orice mulțime deschisă U în X, mulțimea $P(U)$ este înzestrată cu o structură de $\mathcal{O}_X(U)$-modul, și astfel încît aplicațiile de restricție ρ_V^U sînt omomorfisme de grupuri și

$$\rho_V^U(\lambda s) = \rho_V^U(\lambda)\, \rho_V^U(s)$$

pentru orice secțiune $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$ și orice secțiune $s \in P(U)$. Se obișnuiește să se noteze prin aceeași literă un Premodul (Modul) pe X și prefasciculul (fasciculul) de grupuri abeliene subiacent. Dacă P și Q sînt Premodule pe X, un morfism de prefascicule de mulțimi $\theta : P \to Q$ se numește *morfism*

de Premodule dacă, pentru orice mulțime deschisă U în X, aplicația $\theta_U : P(U) \to Q(U)$ este $\mathcal{O}_X(U)$-liniară. Mulțimea tuturor morfismelor de Premodule de la P în Q se notează $\mathrm{Hom}_X(P, Q)$.

Premodulele pe X formează o categorie, evident aditivă, care se notează

$$\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Premod}\ X.$$

Subcategoria plină a lui $\mathfrak{U}$-**Premod** X care are ca obiecte Modulele pe X se notează

$$\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Mod}\ X.$$

Un morfism în categoria **Mod** X se mai numește *morfism de Module* pe X. Avem un functor canonic de supraiacență

$$\gamma : \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Premod}\ X \to \mathfrak{A}(X,\ \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab})$$

care induce un functor de supraiacență

$$\gamma : \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Mod}\ X \to \mathfrak{F}\ (X,\ \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab})$$

Notăm că, dacă P este un Premodul pe X, în particular un Modul, atunci, pentru orice $x \in X$, fibra P_x este canonic înzestrată cu o structură de $\mathcal{O}_x$-modul.

Propoziția 8.1. *Categoria* $\mathfrak{U}$-**Premod** X *este abeliană.* $\mathfrak{U}$-*limitele proiective și inductive în* $\mathfrak{U}$-**Premod** X *există și comută cu functorul de supraiacență* γ, *iar* $\mathfrak{U}$-*limitele inductive pseudofiltrante conexe comută cu limitele proiective finite.*

Demonstrație. Fie $(P_i)_{i \in I}$ o familie de Premodule pe X cu $I \in \mathfrak{U}$ și fie $P = \prod_{i \in I} P_i$ produsul direct al acestei familii în categoria $\mathfrak{A}(X,\ \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab})$. Pentru orice mulțime deschisă U în X, grupul abelian $P(U) = \prod_{i \in I} P_i(U)$ are o structură de $\mathcal{O}_X(U)$-modul definită astfel: fie λ un element în $\mathcal{O}_X(U)$ și $s = (s_i)_{i \in I}$ un element în $P(U)$; se pune

$$\lambda s = (\lambda s_i)_{i \in I}.$$

Cu această definiție, evident P este un Premodul pe X și evident $P = \prod_{i \in I} P_i$ în categoria $\mathfrak{U}$-**Premod** X.

Fie acum $P' = \sum_{i \in I} P_i$ în categoria $\mathfrak{A}(X,\ \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab})$. Avem $P' \subset P$, i.e. $P'(U) \subset P(U)$ pentru orice mulțime deschisă U în X. În mod precis, $P'(U)$ este submulțimea lui $P(U)$ formată din elementele $s = (s_i)_{i \in I}$ ale lui $P(U)$ care au proprietatea că există o acoperire $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ a lui U (depinzînd de s) astfel încît $s_i | U_\alpha = 0$ aproape peste tot (i.e. cu excepția unui număr finit de indici i). Rezultă că dacă $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$ și $s \in P'(U)$, atunci $\lambda s \in P'(U)$, deci, P' este un Premodul pe X și anume un subobiect al lui P în categoria $\mathfrak{U}$-**Premod** X. Evident, $P' = \sum_{i \in I} P_i$ în categoria $\mathfrak{U}$-**Premod** X.

Astfel $\mathfrak{U}$-produsele directe şi $\mathfrak{U}$-sumele directe în categoria $\mathfrak{U}$-**Premod** X există şi comută cu functorul γ.

Similar se arată că nucleele şi conucleele în această categorie există şi comută cu functorul γ.

Din cele de mai sus şi din teorema I. 9.1 rezultă că $\mathfrak{U}$-limitele proiective şi inductive în categoria $\mathfrak{U}$-**Premod** X există şi comută cu functorul γ.

În particular, categoria $\mathfrak{U}$-**Premod** X satisface axioma AB1). Apoi un şir

$$0 \to P' \to P \to P'' \to 0$$

în $\mathfrak{U}$-**Premod** X este exact în $\mathfrak{U}$-**Premod** X dacă şi numai dacă este exact în $\mathfrak{L}$ (X, $\mathfrak{U}$-**Ab**). Întrucît această ultimă categorie este abeliană, rezultă imediat că $\mathfrak{U}$-**Premod** X satisface şi axioma AB2).

În sfîrşit, $\mathfrak{U}$-limitele inductive pseudo-filtrante conexe comută cu limitele proiective finite în categoria $\mathfrak{L}$ (X, $\mathfrak{U}$-**Ab**), deci în virtutea comutativităţii cu γ, de asemenea în categoria $\mathfrak{U}$-**Premod** X.

TEOREMA 8.1. *Categoria* $\mathfrak{U}$-**Mod** X *este abeliană.* $\mathfrak{U}$*-limitele proiective şi inductive în* $\mathfrak{U}$-**Mod** X *există şi comută cu functorul de supraiacenţă* γ, *iar* $\mathfrak{U}$*-limitele inductive pseudofiltrante conexe comută cu limitele proiective finite.*

Demonstraţie. Să considerăm functorul de incluziune

$$i : \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Mod}\ X \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Premod}\ X.$$

Acest functor are un adjunct la stînga

$$R^\circ : \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Premod}\ X \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Mod}\ X$$

astfel încît $R^\circ\, i = 1$ şi astfel încît R° este exact şi comută cu functorul γ.

Într-adevăr, fie P un premodul pe X. Vom considera P ca obiect în categoria $\mathfrak{L}$ (X, $\mathfrak{U}$-**Ab**) deci ca prefascicul de grupuri abeliene pe X. Fie $F = R^\circ(P)$ fasciculul de grupuri abeliene asociat cu P şi

$$\xi = \xi_P : P \to F$$

morfismul canonic. După propoziţia 6.1, pentru orice $x \in X$,

$$\xi_x : P_x \to F_x$$

este izomorfism (de grupuri abeliene), care induce pe grupul abelian F_x o structură de $\mathcal{O}_X$-modul. Fie U o mulţime deschisă în X, $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$ şi $s \in F(U)$. Există şi este unică o secţiune $t \in F(U)$ astfel încît

$$\lambda_x\, s_x = t_x$$

pentru toţi $x \in U$; vom defini

$$\lambda\, s = t.$$

Cu această definiție, evident, $F = R^\circ(P)$ este un Modul pe X pe care-l vom numi *Modulul asociat* lui P.

Fie acum F un Modul oarecare pe X și $u : P \to F$ un morfism de Premodule. Din proprietatea universală a cuplului $(R^\circ(P), \xi_P)$ rezultă că există și este unic un morfism de fascicule de grupuri abeliene

$$u^\# : R^\circ(P) \to F$$

astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\xi_P} & R^\circ(P) \\ & {\scriptstyle u}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle u^\#} & \\ & F & \end{array}$$

Din definiția structurii de Modul pe X a lui $R^\circ(P)$ rezultă imediat că $u^\#$ este un morfism de Module pe X.

Astfel avem un functor

$$R^\circ : \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Premod}\ X \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Mod}\ X$$

care este un adjunct la stînga al lui i și satisface $R^\circ i = 1$, deci este un functor de completare. În plus, R° comută cu γ, i.e. diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Premod}\ X & \xrightarrow{R^\circ} & \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Mod}\ Y \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ \mathfrak{L}(X, \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}) & \xrightarrow{R^\circ} & \mathfrak{F}(X, \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}) \end{array}$$

este comutativă. Rezultă că R° este exact. Din propoziția precedentă și din corolarul 1 la teorema I.13.2 rezultă că $\mathfrak{U}$-**Mod** X este o categorie abeliană. Din propoziția precedentă și din corolarul la propoziția I.13.2 și propoziția I.13.3 rezultă că $\mathfrak{U}$-limitele proiective și inductive în $\mathfrak{U}$-**Mod** X există, iar $\mathfrak{U}$-limitele inductive pseudofiltrante conexe comută cu limitele proiective finite.

Observație. Evident, avem o propoziție pentru categoriile $\mathfrak{U}$-**Premod** X și $\mathfrak{U}$-**Mod** X similară cu propoziția 7.1 pentru categoriile $\mathfrak{L}(X, \mathcal{C})$ și $\mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$ cu $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Ens** sau $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Ab**. Rezultă, de exemplu, că dacă $(P_i)_{i\in I}$ este o familie de Module pe X cu $I \in \mathfrak{U}$ și dacă P este produsul direct al acestei familii în $\mathfrak{U}$-**Premod** X, atunci P este un Modul. Fie P' suma directă a familiei $(P_i)_{i\in I}$ în categoria $\mathfrak{U}$-**Premod** X. Atunci $R^\circ(P')$ este suma directă a acestei familii în categoria $\mathfrak{U}$-**Mod** X. Știm că $P' \subset P$, deci P' este un prefascicul separat. Rezultă că $R^\circ(P)$ se poate calcula luînd „închiderea" lui P' în P (a se vedea § 7).

§ 9. Fascicule induse

Fie X un spațiu topologic, M un subspațiu al lui X, $i_M : M \to X$ incluziunea lui M, $\mathcal{C}$ o $\mathfrak{U}$-categorie și F un fascicul pe X cu valori în $\mathcal{C}$. Vom presupune că functorul imagine inversă asociat cu i_M(i.e. functorul i_M^{-1}) este definit în F. Știm că acest fapt are loc pentru orice M și orice F cînd $\mathcal{C}$ este una din categoriile $\mathfrak{U}$-**Ens**, $\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A**.

Dacă $M = U$ este o mulțime deschisă în X, avem evident un izomorfism canonic (functorial în F) :

$$F|U \approx i_U^{-1}(F).$$

În cazul general, vom nota prin $F|M$ fasciculul $i_M^{-1}(F)$ și vom spune că $F|M$ este *fasciculul indus* de F pe M sau *restricția* lui F la M. Fie

$$\xi : F \to i_M(F|M)$$

morfismul canonic. Vom pune

$$F(M) = (F|M)(M) \text{ și } \rho_M^X = \xi_M,$$

deci

$$\rho_M^X : F(X) \to F(M);$$

vom spune că ρ_M^X este morfismul de restricție al lui F de la X la M.

Dacă $\mathcal{C}$ este una din categoriile $\mathfrak{U}$-**Ens**, $\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A**, elementele lui $F(M)$ se numesc *secțiuni* ale lui F peste M. Astfel este definită noțiunea de secțiune a lui F peste o mulțime arbitrară. Din definiția fasciculului $F|M = i_M^{-1}(F)$ (a se vedea demonstrația teoremei 6.1) rezultă că o secțiune a lui F peste M este o aplicație

$$s : M \to \bigcup_{x \in M} F_x$$

cu proprietatea că, pentru orice $x \in X$, există o vecinătate deschisă W a lui x în X, și o secțiune $t \in F(W)$ astfel încît

$$s(z) = t_z$$

pentru orice $z \in W \cap M$; în particular $s(x) \in F_x$ pentru orice $x \in M$. Dacă $s \in F(X)$, vom scrie $s|M$ în loc de $\rho_M^X(s)$ și vom spune că $s|M$ este restricția lui s la M; avem

$$(s|M)(x) = s_x$$

pentru orice $x \in M$.

Dacă X este un spațiu inelat, orice subspațiu topologic M al lui X se consideră ca spațiu inelat cu fasciculul structural

$$\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_X|M.$$

Dacă F este un Modul pe X, atunci fasciculul indus $F|M$ este canonic înzestrat cu o structură de Modul pe M; vom spune că F este *Modulul indus* de F pe M sau *restricția* lui F la M.

Revenind la cazul general, să presupunem că functorul i_M^{-1} este definit în F și în G și fie $\theta : F \to G$ un morfism de fascicule (pe X cu valori în $\mathcal{C}$). Vom nota prin $\theta|M$ morfismul $i_M^{-1}(\theta)$ și vom spune că $\theta|M$ este *restricția* lui θ la M. Vom pune

$$\theta_M = (\theta|M)_M,$$

deci

$$\theta_M : F(M) \to G(M).$$

Reamintim că $\theta|M = i_M^{-1}(\theta)$ este unicul morfism care face comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\xi} & i_M(F|M) \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_M(\theta|M)} \\ G & \xrightarrow{\xi} & i_M(G|M) \end{array}$$

Întrucît $i_M^{-1}(X) = M$, rezultă în particular că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\rho_M^X} & F(M) \\ {\scriptstyle\theta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta_M} \\ G(X) & \xrightarrow{\rho_M^X} & G(M) \end{array}$$

Amintim că se numește *acoperire închisă* a unui spațiu topologic X orice familie $(M_i)_{i\in I}$ cu $I \in \mathfrak{U}$ formată din mulțimi închise $M_i \subset X$ astfel încît $X = \bigcup_{i\in I} M_i$. O acoperire închisă sau deschisă $(M_i)_{i\in I}$ a lui X se zice *local finită* dacă orice $x \in X$ are o vecinătate U astfel încît $U \cap M_i = \varnothing$ aproape peste tot.

PROPOZIȚIA 9.1. *Fie X un spațiu topologic, F un fascicul de mulțimi pe X, $(M_i)_{i\in I}$ o acoperire închisă local finită a lui X și $(s_i)_{i\in I}$ o familie de secțiuni $s_i \in F(M_i)$ astfel încît $s_i = s_j$ pe $M_i \cap M_j$ pentru orice cuplu $(i, j) \in I \times I$. Atunci există și este unică o secțiune $t \in F(X)$ astfel încît*

$$t|M_i = s_i$$

pentru toți $i \in I$.

Demonstrație. Întrucît fiecare secțiune $s_j \in F(M_i)$ este o aplicație

$$s_i : M_i \to \bigcup_{x\in M_i} F_x,$$

prin $s_i = s_j$ pe $M_i \cap M_j$ se înțelege că $s_i(z) = s_j(z)$ pentru orice $z \in M_i \cap M_j$.

Din ipoteza propoziției rezultă deci că există o aplicație

$$f: X \to \bigcup_{x \in X} F_x$$

astfel încît

$$f|M_i = s_i$$

pentru toți $i \in I$.

Fie $x \in X$. Întrucît mulțimile M_i sînt închise și formează o acoperire local finită a lui X, există o vecinătate deschisă U a lui x și un număr finit de indici $i_1, \ldots, i_p \in I$ astfel încît :

1) $U \cap M_i = \varnothing$ pentru $i \neq i_1, \ldots, i_p$,

2) $x \in M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_p}$.

Din definiția secțiunilor peste o mulțime arbitrară rezultă că există o vecinătate deschisă $W \subset U$ a lui x și secțiuni $t_1, \ldots, t_p \in F(W)$ astfel încît

$$s_{i_k}(z) = (t_k)_z$$

pentru $z \in W \cap M_{i_k}$, $k = 1, \ldots, p$. Din 2) rezultă că

$$s_{i_1}(x) = \ldots = s_{i_p}(x) = f(x),$$

i.e. că

$$(t_1)_x = \ldots = (t_p)_x = f(x),$$

deci, restrîngînd la nevoie vecinătatea W, putem presupune că

$$t_1 = \ldots = t_p = t \quad \text{(să zicem)}.$$

Întrucît $X = \bigcup_{i \in I} M_i$ și întrucît $W \subset U$, din 1) rezultă că

$$W = W \cap M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_p}.$$

Dacă $z \in W$, atunci există $k \in \{1, \ldots, p\}$ astfel încît $z \in W \cap M_{i_k}$, deci

$$f(z) = s_{i_k}(z) = t_z.$$

Există deci o acoperire deschisă $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ a lui X și o familie $(t_\alpha)_{\alpha \in A}$ de secțiuni $t_\alpha \in F(W_\alpha)$ astfel încît

$$f(z) = (t_\alpha)_z$$

pentru orice $z \in W_\alpha$. Întrucît F este fascicul, există o secțiune $t \in F(X)$, evident unică, astfel încît

$$f(x) = t_x$$

pentru orice $x \in X$, deci astfel încît

$$t|M_i = f|M_i = s_i$$

pentru toți $i \in I$, ceea ce termină demonstrația propoziției 9.1.

Fie X un spațiu topologic, iar $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ și $\beta = (V_j)_{j\in J}$ acoperirii deschise ale lui X. Se spune că acoperirea β este *mai fină decît* acoperirea α dacă există o aplicație $\varphi : J \to I$ astfel încît

$$V_j \subset U_{\varphi(j)}$$

pentru orice $j \in J$. Un spațiu topologic se zice *paracompact* dacă este separat și dacă, pentru orice acoperire deschisă α a lui X, există o acoperire deschisă local finită mai fină decît α.

Orice subspațiu închis al unui spațiu paracompact este paracompact. De asemenea, orice spațiu metrizabil este paracompact (teorema lui *Stone*) și orice spațiu paracompact este normal (teorema lui *Dieudonné*). Dacă X este un spațiu normal, pentru orice acoperire deschisă local finită $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ a lui X, există o acoperire deschisă $\beta = (V_i)_{i\in I}$ cu aceeași mulțime de indici I astfel încît $\overline{V}_i \subset U_i$ pentru orice $i \in I$. Pentru demonstrația acestor teoreme se poate consulta tratatul lui Bourbaki [2] și, de asemenea, cu excepția teoremei lui Stone, cartea lui C. Teleman [10].

TEOREMA 9.1. *Fie X un spațiu topologic, F un fascicul de mulțimi pe X, S un subspațiu al lui X avînd un sistem fundamental de vecinătăți paracompacte și $s \in F(S)$. Atunci există o vecinătate deschisă U a lui S și o secțiune $t \in F(U)$ astfel încît $t \mid S = s$.*

Demonstrație. Înlocuind X cu o vecinătate convenabilă a lui S, se poate presupune că X este paracompact și că există o acoperire deschisă local finită $(U_i)_{i\in I}$ a lui X și o familie $(s_i)_{i\in I}$ de secțiuni $s_i \in F(U_i)$ astfel încît

$$s_i = s \text{ pe } S \cap U_i$$

i.e.

$$(s_i)_x = s(x)$$

pentru orice $x \in S \cap U_i$. Rezultă că

$$s_i = s_j \text{ pe } S \cap U_i \cap U_j,$$

i.e.

$$(s_i)_x = (s_j)_x$$

pentru orice $x \in S \cap U_i \cap U_j$. Există o acoperire deschisă $(V_i)_{i\in I}$ a lui X astfel încît $\overline{V}_i \subset U_i$ pentru orice $i \in I$. Fie M mulțimea tuturor punctelor $x \in X$ cu proprietatea că, pentru orice cuplu $(i, j) \in I \times I$ astfel încît $x \in \overline{V}_i \cap \overline{V}_j$,

$$(s_i)_x = (s_j)_x.$$

Evident, $S \subset M$, dar vom arăta că $S \subset \mathring{M}$.

Fie $x \in S$. Există o vecinătate deschisă W a lui x și un număr finit de indici $i_1 \ldots, i_p \in I$ astfel încît

1) $W \cap \overline{V}_i = \varnothing$ pentru $i \neq i_1, \ldots, i_p$,

2) $x \in \overline{V}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{V}_{i_p}$,

3) $W \subset U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}$,

4) $s_{i_1} = \ldots = s_{i_p}$ pe W.

Vom arăta că $W \subset M$.

Într-adevăr, fie $z \in W$ și $(i, j) \in I \times I$ un cuplu astfel încît

$$z \in \overline{V}_i \cap \overline{V}_j.$$

Din 1) rezultă că $i, j \in \{i_1, \ldots, i_p\}$ deci, după 4), $s_i = s_j$ pe W, în particular

$$(s_i)_z = (s_j)_z$$

i.e. $x \in M$.

Astfel $S \subset \mathring{M}$.

Din definiția lui M rezultă că, pentru orice cuplu $(i, j) \in I \times I$,

$$s_i = s_j \text{ pe } M \cap \overline{V}_i \cap \overline{V}_j,$$

și, în particular,

$$s_i = s_j \text{ pe } \mathring{M} \cap V_i \cap V_j.$$

Întrucît $(\mathring{M} \cap V_i)_{i \in I}$ este o acoperire deschisă a lui $\mathring{M}$ și întrucît F este fascicul, există o secțiune $t \in F(\mathring{M})$ astfel încît

$$t | \mathring{M} \cap V_i = s_i | \mathring{M} \cap V_i$$

i.e. astfel încît $t_x = (s_i)_x$ pentru orice $x \in \mathring{M} \cap V_i$, în particular

$$t | S = s$$

ceea ce atestă că concluzia teoremei este adevărată pentru $U = \mathring{M}$.

Corolar. *În condițiile teoremei 9.1,*

$$F(S) = \varinjlim_{U \supset S} F(U),$$

unde U parcurge mulțimea ordonată prin incluziune a părților deschise ale lui X care conțin pe S.

Acest corolar este, evident, echivalent cu teorema 9.1. El se aplică în particular cînd X este paracompact și S un subspațiu închis al lui X (într-adevăr, în aceste condiții, dacă U este o mulțime deschisă conținînd pe S, din normalitate rezultă că există două mulțimi deschise disjuncte V și W astfel încît $S \subset V$ și $X - U \subset W$; din $V \cap W = \varnothing$ rezultă $\overline{V} \subset W = \varnothing$, întrucît V și W sînt deschise, deci $\overline{V} \subset U$; astfel S are un sistem fundamental de vecinătăți închise, deci paracompacte), sau cînd X este metrizabil și S un subspațiu oarecare al lui X (orice subspațiu al unui spațiu metrizabil este un spațiu metrizabil, deci este un spațiu paracompact după teorema lui Stone).

Capitolul III

Coomologie

§ 1. Obiecte injective și proiective

Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană și $\mathfrak{U}$ un univers astfel încît $\mathcal{C}$ este o $\mathfrak{U}$-categorie. Știm că, pentru orice obiect X în $\mathcal{C}$, functorul contravariant

$$h_X = \mathrm{Hom}\ (.,\ X) : \mathcal{C}^\circ \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}$$

este exact la stînga, deci că, pentru orice șir exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ în $\mathcal{C}$, șirul indus

$$0 \to \mathrm{Hom}\ (A'',\ X) \to \mathrm{Hom}\ (A,\ X) \to \mathrm{Hom}\ (A',\ X)$$

este exact în $\mathfrak{U}$-**Ab**.

DEFINIȚIE. Un obiect J în $\mathcal{C}$ se zice *injectiv* dacă functorul contravariant

$$h_J = \mathrm{Hom}\ (.,\ J)$$

este exact, i.e. dacă pentru orice șir exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ în $\mathcal{C}$, șirul indus

$$0 \to \mathrm{Hom}\ (A'',\ J) \to \mathrm{Hom}\ (A,\ J) \to \mathrm{Hom}\ (A',\ J) \to 0$$

este exact.

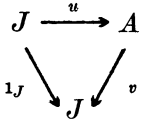
Din cele precedente rezultă că J este injectiv dacă și numai dacă, pentru orice monomorfism $u : A' \to A$, morfismul indus

$$\mathrm{Hom}\ (A,\ J) \to \mathrm{Hom}\ (A',\ J)$$

este epimorfism, deci pentru orice morfism $f' : A' \to J$ există un morfism $f : A \to J$ cu proprietatea că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{u} & A \\ & {\scriptstyle f'}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & J & \end{array}$$

În particular, dacă J este injectiv, orice monomorfism $u : J \to A$ are un invers la stînga, i.e. avem o diagramă comutativă

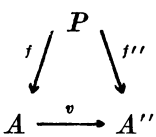


Aceasta mai înseamnă că, dacă J este injectiv, orice şir exact $0 \to J \to A \to A'' \to 0$ este direct.

Dual avem noţiunea de obiect proiectiv. Un obiect P în $\mathcal{C}$ se zice *proiectiv* dacă P este obiect injectiv în categoria duală $\mathcal{C}^\circ$, i.e. dacă functorul covariant

$$\mathrm{Hom}\,(P, .) : \mathcal{C} \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}$$

este exact, i.e. dacă pentru orice epimorfism $v : A \to A''$ şi orice morfism $f'' : P \to A''$ există un morfism $f : P \to A$ astfel încît diagrama următoare este comutativă



Notăm că obiectul 0 este injectiv şi proiectiv.

DEFINIŢIE. O categorie abeliană $\mathcal{C}$ se numeşte *categorie cu suficiente (obiecte) injective* dacă, pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, există un monomorfism $A \to J$ cu J injectiv.

Dual, o categorie abeliană $\mathcal{C}$ se zice *categorie cu suficiente (obiecte) proiective* dacă, pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, există un epimorfism $P \to A$ cu P proiectiv.

Să observăm că noţiunile de obiect injectiv şi categorie cu suficiente injective şi dualele lor nu depind de alegerea universului $\mathfrak{U}$ astfel încît $\mathcal{C}$ este o $\mathfrak{U}$-categorie. Aceasta rezultă imediat din faptul că, dacă $\mathfrak{U}$ şi $\mathfrak{V}$ sînt două universuri astfel încît $\mathcal{C}$ este o $\mathfrak{U}$-categorie şi o $\mathfrak{V}$-categorie, atunci $\mathcal{C}$ este o $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$-categorie, şi din faptul că dacă $\mathfrak{U}$ şi $\mathfrak{V}$ sînt două universuri astfel încît $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V}$, atunci functorul de incluziune

$$\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab} \to \mathfrak{V}\text{-}\mathbf{Ab}$$

este exact şi deplin fidel.

Astfel, putem vorbi de obiecte injective (proiective) într-o categorie abeliană $\mathcal{C}$ fără nici o referire la universul în care ne găsim.

PROPOZIŢIA 1.1. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană şi $X = \prod_{i \in I} X_i$ în $\mathcal{C}$. Obiectul X este injectiv dacă şi numai dacă toate obiectele X_i sînt injective.*

Demonstrație. Vom demonstra mai mult că, dacă $\mathcal{C}$ este o categorie aditivă, atunci, pentru orice morfism $u : A' \to A$ în $\mathcal{C}$, aplicația

$$\mathrm{Hom}\ (A,\ X) \to \mathrm{Hom}\ (A',\ X) \tag{1}$$

este surjectivă dacă și numai dacă toate aplicațiile

$$\mathrm{Hom}\ (A,\ X_i) \to \mathrm{Hom}\ (A',\ X_i) \tag{2}$$

sînt surjective.

Să presupunem mai întîi că aplicațiile (2) sînt surjective. Fie $f' : A' \to X$ un morfism. Există morfisme $f_i : A \to X_i$ astfel încît $f_i u = p_i f'$, pentru toți $i \in I$, unde $p_i : X \to X_i$ sînt proiecțiile canonice. Fie $f : A \to X$ morfismul de componente f_i, deci $p_i f = f_i$ pentru toți $i \in I$. Atunci, $p_i f u = p_i f'$ pentru toți $i \in I$, de unde $fu = f'$. Această parte a demonstrației este adevărată pentru categorii arbitrare.

Să presupunem invers că aplicația (1) este surjectivă. Fie $i_0 \in I$ și fie $g' : A' \to A_{i_0}$ un morfism. Fie $f' : A' \to X$ astfel încît $p_i f' = 0$ pentru $i \neq i_0$ și g' pentru $i = i_0$. Există $f : A \to X$ astfel încît $fu = f'$. Fie $g = p_{i_0} f$. Avem $gu = p_{i_0} fu = p_{i_0} f' = g'$, ceea ce termină demonstrația.

Propoziția 1.2. *Cînd $\mathcal{C}$ este o categorie abeliană cu suficiente injective, condițiile următoare sînt echivalente:*

1) *J este injectiv.*

2) *Orice șir exact $0 \to J \to A \to A'' \to 0$ este direct.*

Demonstrație. Știm că 1) implică 2) fără condiția că $\mathcal{C}$ are suficiente injective.

Să presupunem acum că $\mathcal{C}$ are suficiente injective și că J satisface condiția 2). Fie $u : A' \to A$ un monomorfism și $f' : A' \to J$ un morfism în $\mathcal{C}$. Întrucît $\mathcal{C}$ are suficiente injective, există un monomorfism $\varepsilon : J \to J'$ cu J' injectiv. Rezultă că există un morfism $f : A \to J'$ astfel încît diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{u} & A \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ J & \xrightarrow{\varepsilon} & J' \end{array}$$

Pe de altă parte, din 2) rezultă că există $\varepsilon' : J' \to J$ astfel încît $\varepsilon' \varepsilon = 1$. Avem $\varepsilon' f u = \varepsilon' \varepsilon f' = f'$, i.e. diagrama

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{u} & A \\ & {\scriptstyle f'}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \varepsilon' f} & \\ & J & \end{array}$$

este comutativă, ceea ce termină demonstrația.

PROPOZIȚIA 1.3. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană cu suficiente injective. Orice șir exact $0 \to A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \to 0$ poate fi scufundat într-o diagramă comutativă*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A' & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{v} & A'' & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle\beta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\beta''} & & \\
0 & \to & J' & \xrightarrow{i'} & J & \xrightarrow{p''} & J'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow & & \\
0 & \to & N' & \to & N & \to & N'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

în care liniile și coloanele sînt exacte, iar J', J, J'' injective; în plus, prima și a treia coloană ale diagramei pot fi date dinainte.

Demonstrație. Fiind date șirurile exacte $0 \to A' \to J' \to N' \to 0$ și $0 \to A'' \to J'' \to N'' \to 0$ cu J' și J'' injective, fie $J = J' \times J''$ cu proiecții canonice p', p'' și injecții canonice i', i''. Atunci J este injectiv după propoziția 1.3, iar șirul $0 \to J' \to J \to J'' \to 0$ este direct, deci exact.

Întrucît J' este injectiv, există $\lambda : A \to J'$ astfel încît $\beta' = \lambda u$. Fie $\beta : A \to J$ astfel încît $p'\beta = \lambda$ și $p''\beta = \beta'' v$. Avem $\beta u = i'\beta'$. Într-adevăr, $p'\beta u = \lambda u = \beta' = p'i'\beta'$ și $p''\beta u = \beta'' vu = 0 = p''i'\beta'$. Astfel avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A' & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{v} & A'' & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle\beta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\beta''} & & \\
0 & \to & J' & \xrightarrow{i'} & J & \xrightarrow{p''} & J'' & \to & 0
\end{array}$$

cu linii exacte și β', β'' monomorfisme. Din propoziția I.7.2, rezultă că primul pătrat al acestei diagrame este cartezian, iar din propoziția I.11.4 rezultă că β este monomorfism.

Fie α un conucleu al lui β. Întrucît β este monomorfism, șirul $0 \to A \xrightarrow{\beta} J \xrightarrow{\alpha} N \to 0$ este exact. Morfismele $N' \to N$ și $N \to N''$ se obțin prin comutativitate, iar șirul $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ este exact în virtutea lemei I.12.3. Astfel propoziția este complet demonstrată.

Să observăm că, dacă $\mathcal{C}$ este o categorie abeliană cu suficiente injective, atunci există o funcție E care asociază cu orice obiect A în $\mathcal{C}$ un șir exact

$$E_A : 0 \to A \to J \to N \to 0$$

cu J injectiv.

§ 2. Module libere și module proiective

Fie Λ un inel cu element unitate 1. Notăm prin Λ° inelul opus lui Λ, i.e. inelul avînd același grup abelian subiacent și în care înmulțirea se definește prin $\lambda . \mu = \mu\lambda$ (prima parte a egalității reprezintă înmulțirea în Λ°, iar a doua parte a egalității înmulțirea în Λ). Cînd Λ este comutativ, avem $\Lambda^\circ = \Lambda$.

Fie $\mathfrak{U}$ un univers astfel încît mulțimea subiacentă lui Λ aparține lui $\mathfrak{U}$. Vom nota $\mathfrak{U}$-**mod** Λ categoria avînd ca obiecte Λ-*modulele* (*la stînga*) ale căror mulțimi subiacente aparțin lui $\mathfrak{U}$ și ca morfisme aplicațiile Λ-liniare.

Dacă M și N sînt două obiecte în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ, se notează $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ mulțimea morfismelor de Λ-module de la M în N, i.e. mulțimea aplicațiilor Λ-liniare. **Z** fiind inelul întregilor, evident

$$\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{mod}\ \mathbf{Z} = \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}.$$

Obiectele în categoria $\mathfrak{U}$-**mod** Λ° se mai numesc Λ-*module la dreapta*.

Nu vom insista asupra teoriei elementare a categoriei $\mathfrak{U}$-**mod** Λ. Vom spune numai că această categorie este abeliană, că $\mathfrak{U}$-limitele proiective și inductive în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ există, iar $\mathfrak{U}$-limitele inductive pseudofiltrante conexe comută cu limitele proiective finite. De asemenea, că functorul de supraiacență

$$\gamma : \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{mod}\ \Lambda \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}$$

este un functor exact. Mai precis, un șir $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ este exact dacă și numai dacă șirul $0 \to \gamma(A') \to \gamma(A) \to \gamma(A'') \to 0$ este exact în $\mathfrak{U}$-**Ab** etc.

Pentru orice mulțime $S \in \mathfrak{U}$, considerăm suma directă (în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ)

$$F_S = \sum_{s \in S} \Lambda_s,$$

unde $\Lambda_s = \Lambda$ pentru orice $s \in S$. Un element $x \in F_s$ este o familie $x = (\lambda_s)_{s \in S}$ cu $\lambda_s \in \Lambda$ și $\lambda_s = 0$ aproape peste tot, i.e. cu excepția unui număr finit de elemente $s \in S$.

Avem o aplicație

$$S \xrightarrow{i_S} F_s$$

definită, pentru orice $s_0 \in S$, prin

$$i_S(s_0) = (\delta_s^{s_0})_{s \in \Lambda},$$

unde

$$\delta_s^{s_0} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s = s_0 \\ 0 & \text{dacă } s \neq s_0 . \end{cases}$$

Evident, pentru $\Lambda \neq \{0\}$, aplicația i_S este injectivă. Pentru orice element $x = (\lambda)_{s \in S}$ din F_S avem

$$x = \sum_{s \in S} \lambda_s \, i_S(s)$$

(suma din dreapta există întrucît $\lambda_s = 0$ aproape peste tot). Această reprezentare a lui x este unică : dacă x se reprezintă prin formula precedentă, atunci $x = (\lambda_s)_{s \in S}$.

PROPOZIȚIA 2.1. *Pentru orice Λ-modul A (nu neapărat obiect în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ) și orice aplicație $f : S \to A$ există și este unică o aplicație Λ-liniară g astfel încît diagrama următoare este comutativă*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i_S} & F_S \\ & {\scriptstyle f} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle g} & \\ & A & \end{array}$$

Demonstrație. Pentru orice element $x = (\lambda_s)_{s \in S}$ din F_S, deci

$$x = \sum_{s \in S} \lambda_s \, i_S(s),$$

definim

$$g(x) = \sum_{s \in S} \lambda_s f(s)$$

(suma din dreapta există întrucît $\lambda_s = 0$ aproape peste tot). Evident, aplicația $g : F_S \to A$ astfel definită este Λ-liniară și satisface $g i_S = f$, și, evident, g este unica aplicație cu aceste proprietăți.

În particular, dacă $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_\Lambda(F_S, A)$ și $g_1 i_S = g_2 i_S$, atunci $g_1 = g_2$.

Observație. Din propoziția precedentă rezultă că functorul

$$F : \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens} \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{mod}\ \Lambda$$

definit prin $S \rightsquigarrow F_S$ și $f \rightsquigarrow F_f$, unde pentru orice aplicație $f : S \to S'$, F_f este unica aplicație Λ-liniară care face comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i_S} & F_S \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_f} \\ S' & \xrightarrow{i_{S'}} & F_{S'} \end{array}$$

este un adjunct la stînga al functorului de supraiacență

$$\mathfrak{U}\text{-}\mathbf{mod}\ \Lambda \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ens}.$$

DEFINIȚIE. Un obiect F în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ se zice *liber* dacă există o mulțime $S \in \mathfrak{U}$ astfel încît $F \approx F_S$.

Dacă F este un obiect liber în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ, atunci F este un obiect liber în orice categorie $\mathfrak{V}$-**mod** Λ care conține pe F. Într-adevăr, avem o aplicație injectivă

$$S \xrightarrow{i_S} F_S \xrightarrow{\theta} F,$$

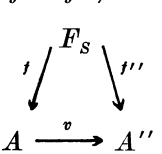
unde θ este un izomorfism. Fie $S' = \theta(i_S(S))$. Atunci $S' \in \mathfrak{V}$, iar din propoziția 2.1 rezultă că $F_S \approx F_{S'}$, deci $F \approx F_{S'}$.

COROLARUL 1. *Orice Λ-modul liber F este proiectiv în orice categorie* $\mathfrak{U}$-**mod** Λ *care conține pe F.*

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm că, pentru orice mulțime $S \in \mathfrak{U}$, F_S este proiectiv.

Fie $v : A \to A''$ un epimorfism de Λ-module. Atunci v este o aplicație surjectivă, deci există o aplicație $w : A'' \to A$ astfel încît $vw = 1$ (în general w nu este Λ-liniară).

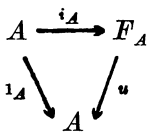
Fie $f'' : F_S \to A''$ o aplicație Λ-liniară. Avem o aplicație $wf'' i_S : S \to A$. Din propoziția 2.1 rezultă că există o aplicație Λ-liniară $f : F_S \to A$ astfel încît $fi_S = wf'' i_S$. Atunci vf și f'' sînt aplicații Λ-liniare de la F_S în A'' și $vfi_S = vwf'' i_S = f'' i_S$, deci $vf = f''$, i.e. avem o diagramă comutativă



ceea ce termină demonstrația corolarului.

COROLARUL 2. *Pentru orice obiect A în categoria* $\mathfrak{U}$-**mod** Λ *există un epimorfism $F \to A$ în* $\mathfrak{U}$-**mod** Λ *cu F liber. În particular, categoria* $\mathfrak{U}$-**mod** Λ *are suficiente proiective.*

Demonstrație. Pentru $S = A$, considerăm A-modulul liber $F_S = F_A$ care este un obiect în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ. Din propoziția 2.1 rezultă că există o aplicație Λ-liniară $u : F_A \to A$ astfel încît diagrama următoare este comutativă



deci astfel încît $ui_A = 1_A$, deci u este epimorfism.

COROLARUL 3. *Un obiect P în* $\mathfrak{U}$-**mod** Λ *este proiectiv dacă și numai dacă există un șir direct $0 \to N \to F \to P \to 0$ în* $\mathfrak{U}$-**mod** Λ *cu F liber.*

Demonstrație. Necesitatea condiției rezultă din corolarul precedent și din duala propoziției 1.2.

Suficiența. Dacă avem un șir direct $0 \to N \to F \to P \to 0$ cu F liber, atunci $F \approx N + P$. Cum F este proiectiv, P este proiectiv în virtutea dualei propoziției 1.1.

Din corolarul 3 rezultă că, dacă P este un obiect proiectiv în categoria $\mathfrak{U}$-**mod** Λ, atunci P este proiectiv în orice categorie $\mathfrak{V}$-**mod** Λ care conține pe P. Pentru a vedea aceasta este suficient să considerăm cazul particular cînd $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V}$ (cazul general se reduce la acest caz particular luînd intersecția celor două universuri). Dacă P este proiectiv în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ, există un șir direct $0 \to N \to F \to P \to 0$ în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ cu F liber. Evident, acest șir este atunci direct și în $\mathfrak{V}$-**mod** Λ etc.

Astfel putem vorbi de Λ-*module proiective* fără a preciza universul în care ne găsim. Vom spune uneori „modul Λ-proiectiv" în loc de „Λ-modul proiectiv".

Notăm că, pentru A principal (i.e. toate idealele lui A sînt principale; de exemplu $A = \mathbf{Z}$), proiectiv coincide cu liber. Într-adevăr, în acest caz orice submodul al unui modul liber este liber (pentru $A = \mathbf{Z}$, se poate consulta C. Teleman [10]).

§ 3. Module injective

PROPOZIȚIA 3.1. *Pentru un obiect J în categoria* $\mathfrak{U}$-**mod** Λ, *condițiile următoare sînt echivalente*:

1) *J este injectiv.*

2) *Pentru orice ideal $\mathfrak{a} \subset \Lambda$ și orice aplicație Λ-liniară $f : \mathfrak{a} \to J$, există o aplicație Λ-liniară $g : \Lambda \to J$ astfel încît $g \mid \mathfrak{a} = f$.*

Demonstrație. Avem de arătat numai că 2) implică 1). Fie A un obiect în categoria $\mathfrak{U}$-**mod** Λ, A' un submodul al lui A și $u' : A' \to J$ o aplicație Λ-liniară. Trebuie să arătăm că există o aplicație Λ-liniară $u : A \to J$ astfel încît $u \mid A' = u'$.

Fie α mulțimea perechilor (Y, v) cu Y submodul al lui A satisfăcînd $A' \subset Y \subset A$ și cu $v : Y \to J$ aplicație Λ-liniară satisfăcînd $v \mid A' = u'$. Ordonăm mulțimea α prin „prelungire" punînd $(Y_1, v_1) < (Y_2, v_2)$ dacă și numai dacă $Y_1 \subset Y_2$ și $v_1 = v_2 \mid Y_1$. Evident, α este inductiv ordonată și deci, după lema lui Zorn, are un element maximal, să zicem (X, u). Totul revine la a arăta că $X = A$.

Să presupunem, prin ipoteza absurdului, că $X \neq A$, și fie $a \in A$ astfel încît $a \notin X$. Elementele $\lambda \in X$ astfel încît $\lambda a \in X$ formează un ideal $\mathfrak{a} \subset \Lambda$, iar $\lambda \sim\!\!\to u(\lambda a)$ este o aplicație Λ-liniară a lui $\mathfrak{a}$ în J. Din 2) rezultă că există o aplicație Λ-liniară $g : \Lambda \to J$ astfel încît $g(\lambda) = u(\lambda a)$ pentru $\lambda \in \mathfrak{a}$.

Astfel avem două aplicații Λ-liniare $u : X \to J$ și $g : \Lambda \to J$ satisfăcînd $g(\lambda) = u(\lambda a)$ pentru $\lambda \in \mathfrak{a}$. Rezultă că avem o aplicație Λ-liniară

$$w : X + \Lambda\, a \longrightarrow J$$

definită inambiguu prin

$$w(x + \lambda a) = u(x) + g(\lambda)$$

(aici $X + \Lambda a$ este submodulul lui A generat de X și a, deci format din elementele $x + \lambda a$ cu $x \in X$ și $\lambda \in \Lambda$). Într-adevăr, dacă $x_1 + \lambda_1 a = x_2 + \lambda_2 a$, atunci $(\lambda_2 - \lambda_1) a = x_1 - x_2 \in X$, deci $\lambda_2 - \lambda_1 \in \mathfrak{a}$, deci $g(\lambda_2 - \lambda_1) = u(x_1 - x_2)$ etc.

Evident, $w|X = u$, i.e. $(X + \Lambda a, w) \in \alpha$, deci (X, u) nu este maximal în α, ceea ce este o contradicție.

Observație. Condiția 2) din enunțul propoziției 3.1 se poate interpreta astfel : pentru orice ideal $\mathfrak{a} \subset \Lambda$ și orice aplicație Λ-liniară $f : \mathfrak{a} \to J$, există $x \in J$ astfel încît $f(\lambda) = \lambda x$ pentru orice $\lambda \in \mathfrak{a}$. Într-adevăr, dacă această condiție este satisfăcută, aplicația Λ-liniară $g : \Lambda \to J$ definită prin $g(\lambda) = \lambda x$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$ prelungește pe f. Invers, dacă g cu această proprietate există, atunci $g(\lambda) = \lambda g(1)$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$, deci $f(\lambda) = \lambda g(1)$ pentru orice $\lambda \in \mathfrak{a}$.

Din propoziția 3.1 rezultă că dacă J este un obiect injectiv în categoria $\mathfrak{U}$-**mod** Λ, atunci J este un obiect injectiv în orice categorie $\mathfrak{V}$-**mod** Λ care conține pe J, deci putem vorbi de Λ-*module injective* fără a preciza universul în care ne găsim. Vom spune uneori „modul Λ-injectiv" în loc de „ Λ-modul injectiv".

Un Λ-modul A se zice *divizibil* dacă, pentru orice element $\lambda \neq 0$ în Λ și orice element $y \in A$, există $x \in A$ astfel încît $\lambda x = y$.

Un inel Λ se zice *principal* dacă orice ideal $\mathfrak{a} \subset \Lambda$ este principal, i.e. este de forma $\mathfrak{a} = \Lambda\lambda_0$ cu $\lambda_0 \in \Lambda$. De exemplu, inelul $\mathbf{Z}$ este principal.

COROLAR. *Orice Λ-modul injectiv este divizibil. Dacă inelul Λ este principal, orice Λ-modul divizibil este injectiv.*

Demonstrație. Fie J un Λ-modul injectiv, $\lambda_0 \neq 0$ un element în Λ și $y \in J$. Considerăm idealul $\mathfrak{a} = \Lambda\lambda_0$ și aplicația Λ-liniară $f : \mathfrak{a} \to J$ definită prin $f(\lambda\lambda_0) = \lambda y$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$. Există $x \in J$ astfel încît $f(\mu) = \mu x$ pentru orice $\mu \in \Lambda$. În particular, $y = f(\lambda_0) = \lambda_0 x$, deci J este divizibil.

Invers, să presupunem că Λ este principal și J divizibil. Fie $\mathfrak{a} \subset \Lambda$ un ideal și $f : \mathfrak{a} \to J$ o aplicație Λ-liniară. Există $\lambda_0 \in \Lambda$ astfel încît $\mathfrak{a} = \Lambda\lambda_0$. Întrucît cazul $\lambda_0 = 0$ este trivial, vom presupune $\lambda_0 \neq 0$.

Fie $y = f(\lambda_0)$. Există $x \in \Lambda$ astfel încît $\lambda_0 x = y$. Avem $f(\lambda\lambda_0) = \lambda f(\lambda_0) = \lambda y = \lambda\lambda_0 x$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$, i.e. $f(\mu) = \mu x$ pentru orice $\mu \in \mathfrak{a}$, ceea ce termină demonstrația.

TEOREMA 3.1. *Fie $\mathfrak{U}$ un univers astfel încît $\mathbf{Z} \in \mathfrak{U}$. Categoria* $\mathfrak{U}$-**mod** Λ *are suficiențe injective.*

Avem nevoie de două leme preliminare.

LEMA 1. *Există un grup abelian T astfel încît*

1) *T este injectiv* (ca $\mathbf{Z}$-modul).

2) *Pentru orice grup abelian ciclic $G \neq 0$ există un omomorfism nenul $G \to T$.*

3) *Cînd $\mathbf{Z} \in \mathfrak{U}$, T este un obiect în* $\mathfrak{U}$-**Ab**.

Demonstrație. Fie $\mathbf{Q}$ grupul aditiv al numerelor raționale, $T = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ și $\beta : \mathbf{Q} \to T$ epimorfismul canonic. Fie G un grup abelian *ciclic*. Aceasta

înseamnă că există un epimorfism $\alpha : \mathbf{Z} \to G$, i.e. G este generat ca grup abelian (deci ca $\mathbf{Z}$-modul) de elementul $c = \alpha(1)$, deci orice element din G este de forma zc cu $z \in \mathbf{Z}$. Fie $K = \alpha^{-1}(0) = \operatorname{Ker} \alpha$.

Să considerăm mai întîi cazul $K = 0$, deci α izomorfism. Fie $t \in \mathbf{Q}$ astfel încît $0 < t < 1$ şi fie $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ aplicaţia definită prin

$$f(z) = zt, \qquad z \in \mathbf{Z}.$$

Atunci f este omomorfism de grupuri şi $\beta f \neq 0$, deci $\beta f \alpha^{-1} : G \to T$ este un omomorfism nenul.

Să considerăm acum cazul $K \neq 0$. Atunci există p întreg > 0 astfel încît $K = Zp$, i.e. K este subgrupul lui Z format din multiplii întregi ai lui p. Întrucît $G \neq 0$, avem $p \neq 1$. Avem şirul exact

$$0 \to Zp \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{\alpha} G \to 0,$$

unde i este incluziunea. Fie $t = 1/p$ şi $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ aplicaţia definită prin $f(z) = zt$, $z \in \mathbf{Z}$. Atunci f este omomorfism şi evident $\beta f i = 0$. Rezultă că există şi este unic un omomorfism

$$g : G \to T$$

astfel încît $\beta f = g\alpha$. Pentru $c = \alpha(1)$, avem $g(c) = \beta(f(1)) = \beta(t) \neq 0$ întrucît t nu este întreg, deci $g \neq 0$.

Evident, T este $\mathbf{Z}$-divizibil, deci $\mathbf{Z}$-injectiv. În sfîrşit, cînd $\mathbf{Z} \in \mathfrak{U}$, $\mathbf{Q} \in \mathfrak{U}$ etc.

Lema 1 este complet demonstrată.

Fie T un grup abelian. Pentru orice grup abelian M, considerăm grupul abelian

$$\hat{M} = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, T).$$

Dacă M este un Λ-modul la stînga, atunci $\hat{M}$ este un Λ-modul la dreapta cu înmulţirea definită prin

$$(f\lambda)(x) = f(\lambda x)$$

pentru $f \in \hat{M}$, $\lambda \in \Lambda$ şi $x \in M$. De asemenea, dacă M este un Λ-modul la dreapta, atunci $\hat{M}$ este un Λ-modul la stînga cu înmulţirea definită prin

$$(\lambda f)(x) = f(x\lambda)$$

pentru $f \in \hat{M}$, $\lambda \in \Lambda$ şi $x \in M$. Dacă $u : M \to N$ este un morfism de Λ-module la stînga (dreapta), atunci $\hat{u} = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(u, T)$ = compunerea cu u la dreapta este un morfism $\hat{u} : \hat{N} \to \hat{M}$ de Λ-module la dreapta (stînga).

Pentru orice Λ-modul la stînga M, $\hat{\hat{M}}$ este deci tot un Λ-modul la stînga (se notează $\hat{\hat{M}} = \hat{N}$ pentru $N = \hat{M}$ şi $\hat{\hat{u}} = \hat{v}$ pentru $v = \hat{u}$). Avem o aplicaţie Λ-liniară

$$i_M : M \to \hat{\hat{M}}$$

definită prin

$$i_M(x)(f) = f(x)$$

pentru $x \in M$ şi $f \in \hat{M}$.

LEMA 2. 1) *Morfismul* i_M *este functorial în* M, *i.e. pentru orice aplicaţie* Λ*-liniară* $u : M \to N$, *diagrama următoare este comutativă*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i_M} & \hat{\hat{M}} \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\hat{u}}} \\ N & \xrightarrow{i_N} & \hat{\hat{N}} \end{array}$$

2) *Pentru orice* Λ*-modul* M, $\hat{i}_M \, i_{\hat{M}} = 1_{\hat{M}}$.

3) *Cînd* T *satisface condiţiile* 1) *şi* 2) *din lema* 1, i_M *este monomorfism.*

4) *Cînd* T *este* $\mathbf{Z}$*-injectiv şi* $u : M \to N$ *monomorfism,* $\hat{u}$ *este epimorfism.*

5) *Dacă* T *este* $\mathbf{Z}$*-injectiv şi dacă* M *este* Λ°*-proiectiv, atunci* $\hat{M}$ *este* Λ*-injectiv.*

Demonstraţie. Pentru 1) şi 2) este o simplă verificare.

3) Fie $x \neq 0$ în M. Trebuie să arătăm că $i_M(x) \neq 0$ în M. Fie $G \subset M$ grupul abelian ciclic generat de elementul x. Întrucît T satisface condiţia 2) din lema 1, există un omomorfism nenul $g : G \to T$; în particular, $g(x) \neq 0$. Întrucît T satisface condiţia 1) din lema 1, există un omomorfism de grupuri $f : M \to T$ astfel încît $g = f|G$. Avem $i_M(x)(f) = f(x) = g(x) \neq 0$.

4) Cînd T este $\mathbf{Z}$-injectiv, functorul contravariant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\,.\,, T)$ este $\mathbf{Z}$-exact, în particular duce monomorfisme de grupuri abeliene în epimorfisme de grupuri abeliene.

5) Fie $\mathfrak{U}$ un univers astfel încît $\mathbf{Z} \in \mathfrak{U}$ şi astfel încît M este un obiect proiectiv în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ°. Evident, $\hat{M}$ este un obiect în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ. Să considerăm o diagramă

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ \hat{M} & & \end{array}$$

în categoria $\mathfrak{U}$-**mod** Λ cu u monomorfism. Evident, $\hat{X}$ şi $\hat{X}'$ sînt obiecte în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ°. Întrucît T este $\mathbf{Z}$-injectiv, $\hat{u}$ este epimorfism. Întrucît M este Λ°-proiectiv, există o aplicaţie Λ°-liniară $g : M \to \hat{X}$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} \hat{X}' & \xleftarrow{\hat{u}} & \hat{X} \\ {\scriptstyle \hat{f}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ \hat{\hat{M}} & \xleftarrow{i_M} & M \end{array}$$

Prin aplicarea functorului $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\cdot, T)$ obținem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} \hat{\hat{X}}' & \xrightarrow{\hat{\hat{u}}} & \hat{\hat{X}} \\ {\scriptstyle \hat{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{g}} \\ \hat{\hat{M}} & \xrightarrow{\hat{i}_M} & \hat{M} \end{array}$$

în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ. Pe de altă parte, întrucît i_M este functorial în M, avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccc} \hat{M} & \xleftarrow{f} & X' & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle i_{\hat{M}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{X'}} & & \downarrow{\scriptstyle i_X} \\ \hat{\hat{M}} & \xleftarrow{\hat{f}} & \hat{\hat{X}}' & \xrightarrow{\hat{\hat{u}}} & \hat{\hat{X}} \end{array}$$

Rezultă că

$$\hat{g}\, i_X\, u = \hat{g}\, \hat{\hat{u}}\, i_{X'} = \hat{i}_M \hat{\hat{f}}\, i_{X'} = \hat{i}_M\, i_{\hat{M}} f = f,$$

deci diagrama

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \hat{g}\, i_X} & \\ & \hat{M} & \end{array}$$

este comutativă, ceea ce termină demonstrația lemei 2.

Demonstrația teoremei 3.1. Fie X un obiect în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ. Fie T un grup abelian cu proprietățile din lema 1. Există un epimorfism

$$u : F \to \hat{X}$$

în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ° cu F liber, deci proiectiv. Atunci $\hat{\hat{X}}$ și $\hat{F}$ sînt obiecte în $\mathfrak{U}$-**mod** Λ, iar din lema 2 rezultă că $\hat{F}$ este Λ-injectiv și că morfismul compus

$$X \xrightarrow{i_X} \hat{\hat{X}} \xrightarrow{\hat{u}} \hat{F}$$

este monomorfism, ceea ce termină demonstrația teoremei.

COROLAR. *Pentru orice spațiu inelat X, categoria* $\mathfrak{U}$-**Mod** X *are suficiente injective.*

Demonstrație. Reamintim că, după definiția categoriei $\mathfrak{U}$-**Mod** X, se presupune că X este un obiect în $\mathfrak{U}$-**Top** și că O_X este un fascicul pe X cu valori în $\mathfrak{U}$-**A**.

Fie F un obiect în $\mathfrak{U}$-**Mod** X. Pentru orice $x \in X$, fibra F_x este un obiect în $\mathfrak{U}$-**mod** $\mathcal{O}_x$. După teorema 3.1 există un monomorfism

$$\varepsilon^x : F_x \to I^x$$

în $\mathfrak{U}$-**mod** $\mathcal{O}_x$ cu I^x injectiv.

Avem un Modul J pe X (obiect în $\mathfrak{U}$-**Mod** X) definit prin

$$J(U) = \prod_{x \in U} I^x$$

pentru orice mulțime deschisă U în X. Morfismele de restricție și structura de Modul pe X a lui J se definesc în mod natural. De asemenea, avem un monomorfism

$$\varepsilon : F \to J$$

care asociază, cu orice secțiune $s \in F(U)$, secțiunea $(\varepsilon^x(s_x))_{x \in U}$ în $J(U)$. Rămîne să arătăm că J este injectiv.

Să observăm mai întîi că proiecțiile canonice

$$J(U) \to I^x$$

dau, prin trecere la limita inductivă, morfisme canonice

$$v^x : J_x \to I^x.$$

Fie acum $u : M' \to M$ un monomorfism și $f : M' \to J$ un morfism în $\mathfrak{U}$-**Mod** X. Pentru orice x, $u_x : M'_x \to M_x$ este monomorfism și $f_x : M'_x \to J_x$ în categoria $\mathfrak{U}$-**mod** $\mathcal{O}_x$. Întrucît I^x este injectiv, există un morfism $g^x : M_x \to I^x$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} M'_x & \longrightarrow & M_x \\ {\scriptstyle f_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^x} \\ J_x & \longrightarrow & I^x \end{array}$$

Pentru orice mulțime deschisă $U \subset X$, există și este unică o aplicație $\mathcal{O}_X(U)$-liniară

$$g_U : M(U) \to J(U)$$

astfel încît, pentru orice $s \in M(U)$,

$$g_U(s) = (g^x(s_x))_{x \in U}.$$

Este evident că familia

$$g = (g_U)_{U \in \tau(X)}$$

este un morfism de Module pe X și se verifică ușor că diagrama

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{u} & M \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & J & \end{array}$$

este comutativă, ceea ce termină demonstrația corolarului.

În particular, categoria $\mathfrak{F}(X,\ \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab})$ are suficiente injective, întrucît este izomorfă cu categoria $\mathfrak{U}$-**Mod** X pentru $\mathcal{O}_X = \mathbf{Z}$.

Demonstrația teoremei 3.1 ca și demonstația corolarului sînt făcute după R. Godement [5].

§ 4. ∂-functori

Fie $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ două categorii abeliene. Vom nota Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ subcategoria plină a lui Hom $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ formată din functorii aditivi.

DEFINIȚIE. Se numește *∂-functor* de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$ orice șir $T = (T^n)_{n \geqslant 0}$ de functori aditivi $T^n : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, înzestrat cu o funcție care asociază cu orice șir exact $a : 0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ un morfism

$$\partial_T^n(a) : T^n(A'') \to T^{n+1}(A')$$

astfel încît să fie îndeplinite condițiile următoare :

1) pentru orice șir exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ în $\mathcal{C}$, șirul

$$\ldots \to T^n(A) \to T^n(A'') \to T^{n+1}(A') \to \ldots \quad (n \geqslant 0)$$

este un complex ;

2) pentru orice diagramă comutativă cu linii exacte (în $\mathcal{C}$)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \to & A & \to & A'' & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \to & B' & \to & B & \to & B'' & \to & 0 \end{array}$$

diagramele următoare sînt comutative

$$\begin{array}{ccc} T^n(A'') & \xrightarrow{\partial_T^n(a)} & T^{n+1}(A') \\ {\scriptstyle T^n(f'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^{n+1}(f')} \\ T^n(B'') & \xrightarrow{\partial_T^n(b)} & T^{n+1}(B') \end{array}$$

Dacă $T = (T^n)_{n \geqslant 0}$ este un ∂-functor, vom spune că functorul T^n este *componenta de grad n* a lui T. Morfismele $\partial_T^n(a)$ se numesc *morfisme bord* ale lui T ; prin abuz vom scrie ∂_T^n sau ∂^n sau simplu ∂ în loc de $\partial_T^n(a)$.

Dacă $T' = (T'^n)_{n \geqslant 0}$ și $T = (T^n)_{n \geqslant 0}$ sînt ∂-functori de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$, un *morfism* de ∂-functori $f : T' \to T$ este o familie $f = (f^n)_{n \geqslant 0}$ de morfisme functoriale $f^n : T'^n \to T^n$ care comută cu morfismele bord, i.e. au proprietatea că, pentru orice șir exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ în $\mathcal{C}$, diagramele următoare sînt comutative

$$\begin{array}{ccc} T'^n(A'') & \xrightarrow{\partial_{T'}^n} & T'^{n+1}(A') \\ {\scriptstyle f^n(A'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}(A')} \\ T^n(A'') & \xrightarrow{\partial_T^n} & T^{n+1}(A') \end{array}$$

pentru toți $n \geqslant 0$; vom spune că f^n este *componenta de grad n* a lui f.

Morfismele de ∂-functori se compun și se adună pe componente, și se vede ușor că ∂-functorii de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$ și morfismele de ∂-functori for-

mează o categorie aditivă (chiar abeliană). Vom nota această categorie prin simbolul

$$\partial\text{-Fonct } (\mathcal{C}, \mathcal{C}').$$

Pentru orice întreg $n \geqslant 0$, avem un functor aditiv

$$\pi^n \cdot \partial\text{-Fonct } (\mathcal{C}, \mathcal{C}') \to \text{Fonct } (\mathcal{C}, \mathcal{C}')$$

definit prin

$$\pi^n(T) = T^n \quad \text{și} \quad \pi^n(f) = f^n$$

pentru orice ∂-functor T și orice morfism de ∂-functori f. În particular avem functorul

$$\pi^\circ = \partial\text{-Fonct } (\mathcal{C}, \mathcal{C}') \to \text{Fonct } (\mathcal{C}, \mathcal{C}').$$

DEFINIȚIE. Un ∂ functor U se zice *universal* dacă, pentru orice ∂-functor T, aplicația

$$\text{Hom } (U, T) \to \text{Hom } (U^\circ, T^\circ)$$

indusă de π° este bijectivă.

Aceasta înseamnă că, pentru orice morfism functorial $\varphi : U^\circ \to T^\circ$, există și este unic un morfism de ∂-functori $f : U \to T$ astfel încît $f^\circ = \varphi$.

DEFINIȚIE. Fie F un obiect în categoria Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$. Vom spune că *functorul S este definit în F* dacă există un ∂-functor universal $S(F) = (S^n(F))_{n\geqslant 0}$ astfel încît $S^\circ(F) = F$; dacă S este definit în F, functorii aditivi $S^n(F) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se numesc *sateliți la dreapta* ai lui F. Dacă S este definit în F°, unde $F^\circ : \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{C}'^\circ$ este dualul lui F, atunci se notează $S_n(F) = S^n(F^\circ)$ componentele lui $S(F^\circ)$ și se numesc *sateliți la stînga* ai lui F.

Rezultă că S este definit în F dacă și numai dacă există un ∂-functor $S(F)$ cu $S^\circ(F) = F$ și cu proprietatea că, pentru orice ∂-functor T, aplicația

$$\text{Hom } (S(F), T) \to \text{Hom } (F, T^\circ)$$

indusă de π° este bijectivă. Din teoria functorilor reprezentabili rezultă că $S(F)$ (dacă există) *este unic pînă la un izomorfism de ∂-functori.*

Dacă S este definit în F și în G și dacă $\varphi : F \to G$ este un morfism functorial, atunci definim $f = S(\varphi) : S(F) \to S(G)$ ca fiind unicul morfism de ∂-functori satisfăcînd $f^\circ = \varphi$.

Din propoziția I.6.2′ rezultă că S este definit în F pentru orice obiect F în Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ dacă și numai dacă există un functor

$$S : \text{Fonc } (\mathcal{C}, \mathcal{C}') \to \partial\text{-Fonct } (\mathcal{C}, \mathcal{C}')$$

astfel încît

1) $\pi^\circ S = 1$.

2) S este un adjunct la stînga al lui π°.

Rezultă că, în acest caz, π° este un functor de normalizare, evident exact.

Să mai observăm că dacă S este definit peste tot, atunci, în particular, pentru orice cuplu de obiecte F, G în Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ aplicația

$$\mathrm{Hom}\,(S(F),\ S(G)) \to \mathrm{Hom}\,(F,\ G)$$

indusă de π° este bijectivă. Întrucît $\pi^\circ S = 1$, inversa acestei aplicații este aplicația

$$\mathrm{Hom}\,(F,\ G) \to \mathrm{Hom}\,(S(F),\ S(G))$$

indusă de S. Rezultă că, dacă S este definit peste tot, atunci S *este un functor deplin fidel.*

În cazul general, S rămîne un functor deplin fidel, dar este definit numai pe o subcategorie plină a lui Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.

§ 5. Criteriu de universalitate

În acest paragraf vom demonstra teorema următoare:

TEOREMA 5.1. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană cu suficiente injective, $\mathcal{C}$ o categorie abeliană oarecare și U un ∂-functor de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$ avînd proprietatea următoare:*

pentru orice șir exact $0 \to A \to J \to N \to 0$ cu J injectiv și orice întreg $n \geqslant 0$, șirul

$$U^n(J) \to U^n(N) \xrightarrow{\partial} U^{n+1}(A) \to 0$$

este exact.

Atunci U este universal.

Demonstrație. Fie T un ∂-functor și $\varphi : U^\circ \to T^\circ$ un morfism functorial. Avem de arătat că există și este unic un șir $(f^i)_{i\geqslant 0}$ de morfisme functoriale $f^i : U^i \to T^i \to$ cu $f^\circ = \varphi$ și satisfăcînd condițiile de comutativitate cu ∂ enunțate în paragraful precedent.

Avem gata construit primul termen al acestui șir, anume $f^\circ = \varphi$. Fie $n > 0$. Vom presupune, prin ipoteza inducției, că există și este unic șirul $(f^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ cu $f^\circ = \varphi$ și satisfăcînd condițiile de comutativitate cu morfismele ∂ pînă la indicele n inclusiv. Totul se reduce atunci la a arăta că există și este unic un morfism functorial $f^{n+1} : U^{n+1} \to T^{n+1}$ care satisface condiția de comutativitate cu morfismele ∂.

Pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, alegem un șir exact

$$E_A = 0 \to A \to J \to N \to 0$$

cu J injectiv. Atunci, pentru orice $A \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$, avem o diagramă comutativă

$$D_A: \quad \begin{array}{ccccc} U^n(J) & \longrightarrow & U^n(N) & \xrightarrow{\delta_U} & U^{n+1}(A) \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^n(N)} & & \\ T^n(J) & \longrightarrow & T^n(N) & \xrightarrow{\delta_T} & T^{n+1}(A) \end{array}$$

unde

$$\delta_U = \partial_U^n(E_A) \quad \text{și} \quad \delta_T = \partial_T^n(E_A).$$

Să presupunem că f^{n+1} există. Din condiția de comutativitate cu ∂ rezultă, în particular, că diagrama $\overline{D}_A$ obținută prin inserarea în D_A a morfismului $f^{n+1}(A)$ este comutativă, i.e.

$$f^{n+1}(A)\ \delta_U = \delta_T f^n(N).$$

Aceasta arată mai întîi că f^{n+1} este unic (întrucît δ_U este epimorfism) și apoi indică un procedeu pentru definiția lui f^{n+1}.

Vom defini așadar $f^{n+1}(A)$, pentru orice $A \in \mathrm{Ob}\ (\mathcal{C})$, ca fiind unicul morfism cu proprietatea că diagrama $\overline{D}_A$ este comutativă.

Să arătăm că f^{n+1} astfel definit este un morfism functorial. Fie A' un alt obiect în $\mathcal{C}$ și $A' \to A$ un morfism. Considerăm șirul exact

$$E_{A'} : 0 \to A' \to J' \to N' \to 0$$

cu J' injectiv, asociat cu A'. Întrucît J este injectiv, există morfisme $J' \to J$ și $N' \to N$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & A' & \to & J' & \to & N' & \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \to & A & \to & J & \to & N & \to 0 \end{array}$$

Rezultă imediat că avem un morfism de diagrame $D_{A'} \to D_A$. Se vede atunci imediat că acest morfism este indus de un morfism de diagrame $\overline{D}_{A'} \to \overline{D}_A$. În particular, diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} U^{n+1}(A') & \to & U^{n+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^{n+1}(A') & \to & T^{n+1}(A) \end{array}$$

ceea ce atestă că f^{n+1} este functorial.

Mai avem de arătat că, pentru orice șir exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} U^n(A'') & \xrightarrow{\partial_U} & U^{n+1}(A') \\ {\scriptstyle f^n(A'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}(A')} \\ T^n(A'') & \xrightarrow{\partial_T} & T^{n+1}(A') \end{array}$$

În acest scop vom considera șirul exact $E_{A'}$. Întrucît J' este injectiv, există morfisme $A \xrightarrow{g} J'$ și $A'' \xrightarrow{h} N'$ astfel încît să avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & A' & \to & A & \to & A'' & \to 0 \\ & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & \\ 0 & \to & A' & \to & J' & \to & N' & \to 0 \end{array}$$

Deoarece U şi T sînt ∂-functori, avem diagramele comutative

$$\begin{array}{ccc} U^n(A'') & \xrightarrow{\partial_U} & U^{n+1}(A') \\ \downarrow{\scriptstyle U^n(h)} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ U^n(N') & \xrightarrow{\delta'_U} & U^{n+1}(A') \end{array} \qquad \text{şi} \qquad \begin{array}{ccc} T^n(A'') & \longrightarrow & T^{n+1}(A') \\ \downarrow{\scriptstyle T(h)} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ T^n(N') & \xrightarrow{\delta'_T} & T^{n+1}(A') \end{array}$$

unde $\delta'_U = \partial_U(E_{A'})$ şi $\delta'_T = \partial_T(E_{A'})$. Apoi, întrucît f^n este functorial, avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} U^n(A'') & \xrightarrow{U^n(h)} & U^n(N') \\ {\scriptstyle f^n(A'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^n(N')} \\ T^n(A'') & \xrightarrow{T^n(h)} & T^n(N') \end{array}$$

În sfîrşit, după definiţia lui $f^{n+1}(A')$ avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} U^n(N') & \xrightarrow{\delta'_U} & U^{n+1}(A') \\ {\scriptstyle f^n(N')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}(A')} \\ T^n(N') & \xrightarrow{\delta'_T} & T^{n+1}(A') \end{array}$$

Rezultă că

$$f^{n+1}(A')\,\partial_U = f^{n+1}(A')\,\delta'_U\,U^n(h) =$$
$$= \delta'_T f^n(N')\,U^n(h) = \delta'_T\,T^n(h) f^n(A'') = \partial_1 f^n(A''),$$

ceea ce termină demonstraţia teoremei.

Observaţie. În demonstraţie am folosit proprietatea din enunţ a lui U numai pentru şirurile exacte alese E_A.

§ 6. Teoremă de existenţă pentru sateliţi

Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două categorii abeliene şi $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor aditiv. Să considerăm o diagramă (în $\mathcal{C}$).

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A_1 & \xrightarrow{\beta_1} & J_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & N_1 & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle u}\downarrow & & & & & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow{\beta} & J & \xrightarrow{\alpha} & N & \to & 0 \end{array}$$

cu *linii exacte şi cu J injectiv.* Există morfisme $g : J_1 \to J$ şi $h : N_1 \to N$ care scufundă diagrama precedentă într-o diagramă comutativă, i.e. $g\beta_1 = \beta u$ şi $h\alpha_1 = \alpha g$; evident h este unic determinat de alegerea lui g.

Rezultă că avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccc} F(J_1) & \xrightarrow{F(\alpha_1)} & F(N_1) \\ {\scriptstyle F(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(h)} \\ F(J) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(N) \end{array}$$

deci există un morfism $\theta(u)$: Coker $F(\alpha_1) \to$ Coker $F(\alpha)$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} F(N_1) & \xrightarrow{p_1} & \text{Coker } F(\alpha_1) \\ {\scriptstyle F(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta(u)} \\ F(N) & \xrightarrow{p} & \text{Coker } F(\alpha) \end{array}$$

unde p şi p_1 sînt epimorfisme canonice de conuclee.

Similar, există şi este unic un morfism $\theta'(u)$: Ker $F(\alpha_1) \longrightarrow$ Ker $F(\alpha)$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } F(\alpha_1) & \xrightarrow{\varepsilon_1} & F(J_1) \\ {\scriptstyle \theta'(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(g)} \\ \text{Ker } F(\alpha) & \xrightarrow{\varepsilon} & F(J) \end{array}$$

unde ε şi ε_1 sînt incluziuni (i.e. morfisme canonice de nuclee).

Această construcţie a morfismelor $\theta(u)$ şi $\theta'(u)$ se face pentru orice morfism u : $A_1 \to A$ menţinînd fixe liniile exacte $0 \to A_1 \to J_1 \to N_1 \to 0$ şi $0 \to A \to J \to N \to 0$ cu J injectiv.

LEMA 6.1. *Morfismele* $\theta(u)$ *şi* $\theta'(u)$ *nu depind de alegerea lui* g *şi* h *şi avem* $\theta(u_1 + u_2) = \theta(u_1) + \theta(u_2)$ *şi* $\theta'(u_1 + u_2) = \theta'(u_1) + \theta'(u_2)$ *pentru orice cuplu de morfisme* u_1, $u_2 \in \text{Hom}\,(A_1, A)$.

Demonstraţie. Dacă $(\overline{g}, \overline{h})$ este alt cuplu de morfisme $\overline{g} : J_1 \to J$ şi $\overline{h} : N_1 \to N$ astfel încît

$$\overline{g}\,\beta_1 = \beta u \text{ şi } \overline{h}\,\alpha_1 = \alpha\,\overline{g},$$

atunci $(\overline{g} - g)\,\beta_1 = 0$, deci există (şi este unic) un morfism $s : N_1 \to J$ astfel încît

$$\overline{g} = g + s\,\alpha_1.$$

Avem

$$(h + \alpha s)\,\alpha_1 = h\,\alpha_1 + \alpha s\,\alpha_1 = h\,\alpha_1 + \alpha\,(\overline{g} - g) = \alpha\,\overline{g},$$

de unde

$$\overline{h} = h + \alpha s,$$

deci

$$F(\bar{h}) = F(h) + F(\alpha)\,F(s).$$

Rezultă că

$$pF(\bar{h}) = pF(h)$$

întrucît $pF(\alpha) = 0$, deci morfismul $\theta(u)\,p_1$ nu depinde de alegerea lui g și h, deci $\theta(u)$ nu depinde de alegerea lui g și h (întrucît p_1 este epimorfism).

În mod similar se vede că $\theta'(u)$ nu depinde de alegerea lui g și h.

Fie acum u_1 și u_2 două morfisme de la A_1 în A și $u = u_1 + u_2$. Dacă (g_i, h_i), $i = 1, 2$, este un cuplu de morfisme satisfăcînd condițiile de comutativitate pentru u_i (i.e. $g_i\,\beta_1 = \beta u$ și $h_i\,\alpha_1 = \alpha g$), atunci cuplul $(g_1 + g_2, h_1 + h_2)$ satisface condițiile de comutativitate pentru $u = u_1 + u_2$. Din cele precedente rezultă că putem calcula $\theta(u_1)$, $\theta(u_2)$ și $\theta(u)$ folosind cuplurile (g_1, h_1) (g_2, h_2) și $(g_1 + g_2, h_1 + h_2)$ respectiv. Rezultă că $\theta(u) = \theta(u_1) + \theta(u_2)$. Similar avem $\theta'(u) = \theta'(u_1) + \theta'(u_2)$.

Corolar. *Pentru* $A_1 = A, J_1 = J$ și $N_1 = N$, $\theta(1_A) = 1$ și $\theta'(1_A) = 1$.

Să considerăm acum un al treilea șir exact

$$0 \to A_2 \to J_2 \to N_2 \to 0$$

cu J_2 *injectiv*, și fie $v : A \to A_2$ un morfism.

Lema 6.2. $\theta(vu) = \theta(v)\,\theta(u)$ *și* $\theta'(vu) = \theta(v)\,\theta(u)$.

Demonstrația este imediată.

Corolar. *Cînd* J_1 *este injectiv și* u *izomorfism,* $\theta(u)$ *și* $\theta'(u)$ *sînt izomorfisme.*

Demonstrație. Vom demonstra corolarul pentru $\theta(u)$. Există $v : A \to A_1$ astfel încît $vu = 1_{A_1}$ și $uv = 1_A$. Întrucît J_1 este injectiv, $\theta(v)$ este definit. Din lema precedentă rezultă că $\theta(v)\,\theta(u) = \theta(vu) = 1$. Similar $\theta(u)\,\theta(v) = 1$.

Teorema 6.1. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie abeliană cu suficiente injective și* $\mathcal{C}'$ *o categorie abeliană oarecare. Functorul* S *este definit în* F *pentru orice obiect* F *în* Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.

Demonstrație (după H. Cartan și S. Eilenberg [3]). Fie F un functor aditiv. Avem de arătat că există un ∂-functor universal $S(F) = (S^n F)_{n \geqslant 0}$ cu $S^0 F = F$.

Pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, alegem un șir exact

$$E_A : 0 \to A \to J \to N \to 0$$

cu J injectiv. Această alegere fiind făcută, vom defini functorul aditiv

$$S^1 F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$$

în modul următor. Pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, vom considera șirul exact E_A și vom pune

$$S^1 F(A) = \operatorname{Coker} F(\alpha).$$

De asemenea, pentru orice morfism $u : A_1 \to A$ în $\mathcal{C}$, vom pune

$$S^1F(u) = \theta(u)$$

unde $\theta(u)$ este definit folosind şirurile exacte alese E_{A_1} şi E_A. Din lemele 6.1 şi 6.2 rezultă că S^1F astfel definit este un functor aditiv.

Vom defini atunci şirul $S(F) = (S^nF)_{n \geqslant 0}$ de functori aditivi $S^nF : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ prin

$$S^{n+1}F = S^1(S^nF), \qquad S^0F = F.$$

Din definiţie rezultă că, pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$ şi orice întreg $n \geqslant 0$, avem un şir exact

$$S^nF(J) \xrightarrow{S^nF(\alpha)} S^nF(N) \to S^{n+1}F(A) \to 0,$$

unde $0 \to A \to J \to N \to 0$ este şirul exact ales E_A. În particular, avem un şir exact.

$$F(J) \xrightarrow{F(\alpha)} F(N) \to S^1F(A) \to 0,$$

unde a doua săgeată este epimorfismul canonic al conucleului.

Să definim acum morfismele bord. Fie $0 \to A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \to 0$ un şir exact în $\mathcal{C}$. Considerăm şirul exact ales

$$E_{A'} : 0 \to A' \xrightarrow{\beta'} J' \xrightarrow{\alpha'} N' \to 0$$

Întrucît J' este injectiv, există morfisme $g : A \to J'$ şi $h : A'' \to N'$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{v} & A'' & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{\beta'} & J' & \xrightarrow{\alpha'} & N' & \to & 0 \end{array}$$

Rezultă că avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccccc} F(A) & & \xrightarrow{F(v)} & & F(A'') & & \\ {\scriptstyle F(g)}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle F(h)} & & \\ F(J') & \xrightarrow{F(\alpha')} & F(N') & \xrightarrow{\delta'^0} & S^1F(A') & \to & 0 \end{array}$$

unde δ'^0 este epimorfismul canonic al conucleului. Din lema 6.1 rezultă că morfismul $\delta'^0 F(h)$ nu depinde de alegerea lui g şi h.

Vom defini morfismul bord

$$\partial^0 : F(A'') \to S^1F(A')$$

prin

$$\partial^0 = \delta'^0 F(h),$$

deci avem

$$\partial^{\circ}F(v) = \delta'^{\circ}F(h)F(v) = \delta'^{\circ}F(\alpha')\,F(g) = 0.$$

Înlocuind F cu S^nF, obținem, prin iterare, pentru orice întreg $n \geqslant 0$, morfisme bord

$$\partial^n : S^nF(A'') \to S^{n+1}F(A')$$

definite prin formulele

$$\partial^n = \delta'^n\, S^nF(h),$$

unde $\delta'^n : S^nF(N') \to S^{n+1}F(A')$ este conucleul canonic al lui $S^nF(\alpha')$, deci

$$\partial^n\, S^nF(v) = \delta'^n\, S^nF(hv) = \delta'^n S^nF(\alpha' g) = 0.$$

În cazul cînd șirul $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ coincide cu șirul ales $E_{A'}$, putem lua $h = 1$, deci, în acest caz,

$$\partial^n = \delta'^n.$$

Astfel δ'^n este morfismul bord de grad n asociat șirului exact $E_{A'}$. Rezultă că, pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$ și orice întreg $n \geqslant 0$, avem un șir exact

$$S^nF(J) \xrightarrow{S^nF(\alpha)} S^nF(N) \xrightarrow{\delta^n} S^{n+1}F(A) \to 0,$$

unde δ^n este morfismul bord de grad n asociat cu șirul exact $E_A : 0 \to A \to J \to N \to 0$.

Vom arăta că șirul $S(F) = (S^nF)_{n\geqslant 0}$ înzestrat cu morfismele bord definite mai sus este un ∂-functor.

Pentru aceasta să considerăm mai întîi o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & A' & \to & A & \to & A'' \to 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \to & B' & \to & B & \to & B'' \to 0 \end{array}$$

cu linii exacte. Avem de arătat că, pentru orice întreg $n \geqslant 0$, diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} S^nF(A'') & \xrightarrow{\partial^n} & S^{n+1}F(A') \\ {\scriptstyle S^nF(f'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S^{n+1}F(f')} \\ S^nF(B'') & \xrightarrow{\bar{\partial}^n} & S^{n+1}F(B') \end{array}$$

unde $\bar{\partial}^n$ este morfismul bord asociat șirului exact $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$.

Ținînd seama de modul în care am definit functorii S^nF și morfismele bord, este suficient să demonstrăm comutativitatea acestei diagrame în cazul $n = 0$. Fie

$$E_{B'} : 0 \to B' \to \bar{J} \to \bar{N} \to 0$$

şirul exact cu J injectiv ales pentru B'. Să considerăm diagramele următoare

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \to & A & \to & A'' & \to & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & B' & \to & B & \to & B'' & \to & 0 \\ & & \downarrow 1 & & & & & & \\ 0 & \to & B' & \to & \overline{J} & \to & \overline{N} & \to & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \to & A & \to & A'' & \to & 0 \\ & & \downarrow 1 & & & & & & \\ 0 & \to & A' & \to & J' & \to & N' & \to & 0 \\ & & \downarrow f' & & & & & & \\ 0 & \to & B' & \to & \overline{J} & \to & \overline{N} & \to & 0 \end{array}$$

Din lema 6.2 rezultă imediat, ţinînd seama de definiţia morfismelor ∂°, $\overline{\partial}^\circ$ şi $S^1F(f')$, că avem

$$\overline{\partial}^\circ F(f'') = S^1F(f')\,\partial^\circ$$

ceea ce reprezintă comutativitatea diagramei noastre în cazul $n = 0$.

Vom arăta acum că, pentru orice şir exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, şirul

$$F(A') \xrightarrow{F(u)} F(A) \xrightarrow{F(v)} F(A'') \xrightarrow{\partial^\circ} S^1F(A') \xrightarrow{S^1F(u)} S^1F(A) \xrightarrow{S^1F(v)} \ldots$$

este un complex. Întrucît $vu = 0$, avem $F(v)F(u) = 0$ şi $S^1F(v)\,S^1F(u) = 0$. Ştim că $\partial^\circ F(v) = 0$. Folosind iterarea este suficient să mai arătăm că $S^1F(u)\,\partial^\circ = 0$. Or, morfismul $S^1F(u)\partial^\circ$ se obţine cu ajutorul lemei 6.2 din diagrama următoare

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{v} & A'' & \to & 0 \\ & & \downarrow 1 & & & & & & \\ 0 & \to & A' & \to & J' & \to & N' & \to & 0 \\ & & \downarrow u & & & & & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow{\beta} & J & \xrightarrow{\alpha} & N & \to & 0 \end{array}$$

unde linia a doua este $E_{A'}$, iar linia a treia este E_A. Rezultă că pentru a calcula morfismul $S^1F(u)$ putem folosi diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{v} & A'' & \to & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow \beta & & \downarrow 0 & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow{\beta} & J & \xrightarrow{\alpha} & N & \to & 0 \end{array}$$

şi deci $S^1F(u)\,\partial^\circ = 0$. Astfel $S(F)$ este un ∂-functor.

Mai departe, pentru orice șir exact ales E_A avem un șir exact

$$S^nF(J) \xrightarrow{S^nF(\alpha)} S^nF(N) \xrightarrow{\delta^n} S^{n+1}F(A) \to 0.$$

Din teorema 5.1 și observația la această teoremă rezultă că ∂-functorul $S(F)$ este universal, ceea ce termină demonstrația teoremei 6.1.

Observație. Construcția ∂-functorului universal $S(F)$ satisfăcînd $S^0F = F$ a fost făcută folosind o funcție E care *alege*, pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, un șir exact $E_A : 0 \to A \to J \to N \to 0$ cu J injectiv. Dacă considerăm o altă funcție de alegere, să zicem $\overline{E}$, atunci obținem un alt ∂-functor universal $\overline{S}(F)$ satisfăcînd $\overline{S}^0F = F$. Din universalitate rezultă însă că cei doi ∂-functori sînt canonic izomorfi, i.e. există un unic izomorfism de ∂-functori

$$\theta : S(F) \to \overline{S}(F)$$

astfel încît $\theta^0 = 1_F$.

COROLARUL 1. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană cu suficiente injective și $\mathcal{C}'$ o categorie abeliană oarecare. Pentru orice ∂-functor universal $U = (U^n)_{n\geqslant 0}$ de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$ și orice obiect injectiv în $\mathcal{C}$, avem $U^n(J) = 0$ pentru $n \geqslant 1$.*

Demonstrație. Într-adevăr, să considerăm alegerea de șiruri exacte E astfel încît, pentru orice obiect injectiv J, să avem $E_J : 0 \to J \to J \to 0 \to 0$. Atunci, pentru $F = U^0$, din definiția lui SF rezultă că $S^nF(J) = 0$ pentru J injectiv și $n \geqslant 1$. Cum U este izomorf cu SF, avem de asemenea $U^n(J) = 0$ cînd J este injectiv și $n \geqslant 1$.

COROLARUL 2 (reciproca teoremei 5.1). *În condițiile corolarului precedent, pentru orice ∂-functor universal U de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$, orice șir exact $0 \to A \to J \to N \to 0$ cu J injectiv și orice întreg $n \geqslant 0$, avem șirul exact*

$$U^n(J) \to U^n(N) \to U^{n+1}(A) \to 0$$

Mai mult, pentru $n \geqslant 1$, avem chiar un izomorfism

$$U^n(N) \xrightarrow{\sim} U^{n+1}(A).$$

Demonstrație. Fie dat un șir exact $0 \to A \to J \to N \to 0$. Vom considera o alegere E de șiruri exacte astfel încît E_A să fie chiar șirul considerat. Atunci, pentru $F = U^0$, din definiția lui $S(F)$ rezultă că, pentru orice între $n \geqslant 0$, avem un șir exact

$$S^nF(J) \to S^nF(N) \xrightarrow{\delta^n} S^{n+1}F(A) \to 0,$$

unde δ^n este morfismul bord de grad n asociat șirului exact E_A. Apoi $S^nF(J) = 0$ pentru $n \geqslant 1$ (după corolarul precedent) și U este izomorf cu $S(F)$ etc.

§ 7. ∂-functori exacți

Fie $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ două categorii abeliene.

DEFINIȚIE. Un functor aditiv $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se zice *semiexact* dacă, pentru orice șir exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ în $\mathcal{C}$, șirul $F(A') \to F(A) \to F(A'')$ este exact.

De exemplu sînt semiexacți functorii aditivi exacți la stînga și functorii aditivi exacți la dreapta.

DEFINIȚIE. Un ∂-functor $T = (T^n)_{n \geqslant 0}$ de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$ se zice *exact* dacă, pentru orice șir exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ în $\mathcal{C}$, șirul infinit

$$T^0(A') \to T^0(A) \to T^0(A'') \xrightarrow{\partial} T^1(A') \to \dots$$

este exact. Un ∂-functor T se numește *∂-functor coomologic* dacă este exact și dacă T^0 este exact la stînga, i.e. dacă pentru orice șir exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, șirul infinit

$$0 \to T^0(A') \to T^0(A) \to T^0(A'') \xrightarrow{\partial} T^1(A') \to \dots$$

este exact.

Din definiție rezultă că, dacă T este un ∂-functor exact (resp. ∂-functor coomologic), atunci functorul aditiv T^0 este semiexact (resp. exact la stînga).

TEOREMA 7.1. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană cu suficiente injective și $\mathcal{C}'$ o categorie abeliană oarecare. Pentru orice ∂-functor universal $U = (U^n)_{n \geqslant 0}$ de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$, condițiile următoare sînt echivalente:*

1) *U^0 este semiexact.*

2) *U este exact.*

Demonstrație (după H. Cartan și S. Eilenberg). Știm că 2) implică 1). Pe de altă parte, întrucît U este universal, $U \approx S(U^0)$. Avem de arătat deci că dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este un functor aditiv semiexact, atunci ∂-functorul $S(F)$ este exact.

Fie $0 \to A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \to 0$ un șir exact în $\mathcal{C}$. După definiția iterată a lui S^nF, totul se reduce la a arăta că șirul

$$S^1F(A') \to S^1F(A) \to S^1F(A'')$$

este exact (i.e. functorul aditiv S^1F este semiexact) și că șirul

$$F(A) \to F(A'') \to S^1F(A') \to S^1F(A)$$

este exact.

Vom face demonstrația în trei pași.

Mai întîi o observație. Pentru construcția lui S^1F se folosește o funcție E care *alege*, pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, un șir exact

$$E_A : 0 \to A \xrightarrow{\beta} J \xrightarrow{\alpha} N \to 0$$

cu J injectiv. Modificarea acestei funcții are ca efect, după cum știm, o modificare a lui $S(F)$ numai pînă la un izomorfism de ∂-functori. Or, aserțiunile ce le avem de demonstrat sînt invariante la izomorfismele de ∂-functori. De aceea, avem voie ca, în cursul demonstrației, să modificăm convenabil funcția E în așa fel ca anumite șiruri exacte care vor apare în demonstrație să coincidă cu șirurile exacte alese de E.

Pasul 1. S^1F este semiexact.

După propoziția 1.3, putem scufunda șirul exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ într-o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & A & \to & A'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & J' & \to & J & \to & J'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & N' & \to & N & \to & N'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

cu linii exacte și cu J', J, J'' obiecte injective. Întrucît J' este injectiv, linia de la mijloc este directă. După observația de mai sus, putem presupune că funcția de alegere E este astfel încît șirurile alese $E_{A'}$, E_A și $E_{A''}$ coincid cu coloanele diagramei precedente.

Întrucît functorul aditiv F este semiexact și întrucît șirul $0 \to J' \to J \to J'' \to 0$ este direct, avem diagrama comutativă cu linii exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} F(J') & \to & F(J) & \to & F(J'') & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ F(N') & \to & F(N) & \to & F(N') & & \end{array}$$

Din definiția lui S^1F și din duala lemei I.12.2, rezultă că șirul următor este exact

$$S^1F(A') \to S^1F(A) \to S^1F(A''),$$

i.e. S^1F este semiexact.

Pasul 2. Șirul $F(A'') \xrightarrow{\partial^*} S^1F(A') \to S^1F(A)$ este exact.

Să considerăm șirul exact ales $E_A : 0 \to A \to J \to N \to 0$ cu J injectiv. Construim o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\beta} & J & \xrightarrow{\alpha} & N & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \downarrow{\scriptstyle w} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \to & A'' & \xrightarrow{\mu} & M & \xrightarrow{\lambda} & N & \to & 0 \end{array}$$

în care liniile sînt exacte şi primul pătrat este cocartezian. Întrucît v este un conucleu al lui u din duala propoziţiei I.11.4, rezultă că w este un conucleu al lui βu, deci şirul

$$0 \to A' \xrightarrow{\beta u} J \xrightarrow{w} M \to 0$$

este exact.

Astfel avem diagrama comutativă cu linii exacte

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A' & \xrightarrow{\beta u} & J & \xrightarrow{w} & M & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow{\beta} & J & \xrightarrow{\alpha} & N & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \to & A'' & \xrightarrow{\mu} & M & \xrightarrow{\lambda} & N & \to & 0
\end{array}$$

şi în care linia de la mijloc este şirul ales E_A. În plus, după observaţia de la începutul demonstraţiei, putem presupune că funcţia de alegere E este astfel încît prima linie coincide cu şirul ales $E_{A'}$.

Întrucît F este semiexact, avem diagrama comutativă cu linii exacte

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & F(J) & \xrightarrow{1} & F(J) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(w)} & & \downarrow{\scriptstyle F(\alpha)} \\
F(A'') & \xrightarrow{F(\mu)} & F(M) & \xrightarrow{F(\lambda)} & F(N)
\end{array}$$

Din duala lemei I.12.2 şi din definiţia lui S^1F rezultă că avem un şir exact

$$F(A'') \xrightarrow{\gamma} S^1F(A') \to S^1F(A),$$

unde $\gamma = \delta'^{\circ} F(\mu)$ şi δ'° conucleul lui $F(w)$. Dar diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & A' & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{v} & A'' \to 0 \\
 & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\
0 & \to & A' & \xrightarrow{\beta u} & J & \xrightarrow{w} & M \to 0
\end{array}$$

astfel că, după definiţia lui ∂°, $\gamma = \partial^{\circ}$.

Pasul 3. Şirul $F(A) \to F(A'') \to S^1F(A')$ este exact.

Să considerăm şirul ales

$$E_{A'} : 0 \to A' \xrightarrow{\beta'} J' \xrightarrow{\alpha'} N' \to 0$$

şi să construim un pătrat cocartezian

$$\begin{array}{ccc}
A' & \xrightarrow{u} & A \\
{\scriptstyle \beta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\
J' & \xrightarrow{i} & M
\end{array}$$

Atunci i și ε sînt monomorfisme iar pătratul se scufundă într-o diagramă comutativă cu linii și coloane exacte

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & A' & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{v} & A'' & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle\beta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \to & J' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{q} & A'' & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} & & & & \\
 & & N' & \xrightarrow{1} & N' & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

În plus linia de la mijloc este directă întrucît J' este injectiv. Rezultă că avem o diagramă comutativă cu linii exacte

$$\begin{array}{ccccccc}
F(J') & \xrightarrow{F(i)} & F(M) & \xrightarrow{F(q)} & F(A'') & \to & 0 \\
{\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(r)} & & \vdots{\scriptstyle\theta} & & \\
F(J') & \xrightarrow{F(\alpha')} & F(N') & \xrightarrow{\delta'} & S^1F(A') & \to & 0
\end{array}$$

unde δ' este conucleul lui $F(\alpha')$, deci este morfismul bord de grad 0 asociat cu șirul exact $E_{A'}$. Deci există și este unic un morfism $\theta : F(A'') \to S^1F(A')$ care înserat în diagrama precedentă o lasă comutativă, i.e.

$$\theta F(q) = \delta' F(r).$$

În plus θ depinde functorial de șirul exact $a : 0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

Din duala propoziției I.7.2, rezultă că al doilea pătrat al diagramei precedente este cocartezian. Astfel avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccc}
F(A) & \xrightarrow{F(\varepsilon)} & F(M) & \xrightarrow{F(r)} & F(N') \\
{\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(q)} & & \downarrow{\scriptstyle\delta'} \\
F(A) & \xrightarrow{F(v)} & F(A'') & \xrightarrow{\theta} & S^1F(A')
\end{array}$$

în care linia de sus este exactă (întrucît F este semixeact) iar pătratul din dreapta este cocartezian. Din duala lemei I.12.1, rezultă că șirul

$$F(A) \xrightarrow{F(v)} F(A'') \xrightarrow{\theta} S^1F(A')$$

este exact.

Evident, acest șir rămîne exact cînd înlocuim θ cu $-\theta$. Vom arăta că

$$-\theta = \partial^\circ.$$

Să presupunem mai întîi că şirul $a : 0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ coincide cu şirul ales $E'_{A'} : 0 \to A' \to J' \to N' \to 0$. În acest caz avem de arătat că $\theta = -\delta'$, deci că $\delta' F(q + r) = 0$.

Întrucît $\beta' = u$ şi $\alpha' = v$, rezultă că $(\varepsilon - i)u = 0$, deci există $s : N' \to M$ astfel încît

$$\varepsilon - i = sv.$$

Avem $qsv = q(\varepsilon - i) = q\varepsilon - qi = v$, deci $qs = 1$ (întrucît v este epimorfism). Similar, $rsv = r(\varepsilon - i) = r\varepsilon - ri = -\alpha' = -v$, deci $rs = -1$.

Rezultă că M este o sumă directă a cuplului (J', N) cu injecţii canonice i, s, deci $F(M)$ este o sumă directă a cuplului $(F(J'), F(N')$ cu injecţii canonice $F(i)$, $F(s)$. De aceea, pentru a arăta că $\delta' F(q + r) = 0$, este suficient să arătăm că $\delta' F(q + r) F(i) = 0$ şi $\delta' F(q + r) F(s) = 0$. Or, $\delta' F(q+r) F(i) = \delta' F(qi + ri) = \delta' F(\alpha') = 0$ şi $\delta' F(q+r) F(s) = \delta' F(qs + rs) = \delta' F(0) = 0$. Astfel, în cazul particular considerat, $\theta = -\delta'$.

În cazul general, avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{v} & A'' & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{\beta'} & J' & \xrightarrow{\alpha'} & N' & \to & 0 \end{array}$$

deci un morfism de diagrame $(1, g, h) : a \to E_A$. Întrucît θ depinde functorial de şirul exact a, rezultă o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccc} F(A'') & \xrightarrow{\theta} & S^1F(A') \\ {\scriptstyle F(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ F(N') & \xrightarrow{-\delta'} & S^1F(A') \end{array}$$

i.e.

$$\theta = -\delta' F(h) = -\partial^\circ,$$

ceea ce termină demonstraţia teoremei.

§ 8. Functorul R°

Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ categorii abeliene.

Vom nota $\mathrm{Se}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ subcategoria plină a lui $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ avînd ca obiecte functorii exacţi la stînga. De exemplu, cînd $\mathcal{C}$ este o $\mathfrak{U}$-categorie şi $\mathcal{C}' = \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Ab}$, pentru orice obiect X în $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(X, \cdot)$ este un obiect în $\mathrm{Se}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$. Avem functorul de incluziune

$$i : \mathrm{Se}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \to \mathrm{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$$

care este deplin fidel.

Se notează R° un adjunct la stînga al lui i. Rezultă că, pentru F un obiect în $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$, R° este definit în F dacă şi numai dacă

avem un cuplu $(R^\circ F, \rho_F)$ cu $R^\circ F$ obiect în Se $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ şi $\rho_F : F \to R^\circ F$ morfism functorial, avînd următoarea proprietate universală : pentru orice obiect G în Se $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ şi orice morfism functorial $\varphi : F \to G$ există şi este unic un morfism functorial $\overline{\varphi} : R^\circ F \to G$ astfel încît diagrama următoare să fie comutativă

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\rho_F} & R^\circ F \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\overline{\varphi}} & \\ & G & \end{array}$$

Dacă R este definit în F şi F' şi dacă $\varphi : F' \to F$ este un morfism functorial, atunci $R^\circ\varphi : R^\circ F' \to R^\circ F$ este unicul morfism functorial care face comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{\rho_{F'}} & R^\circ F' \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R^\circ\varphi} \\ F & \xrightarrow{\rho_F} & R^\circ F \end{array}$$

Evident, R° este definit în F pentru orice obiect F în Se $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$. În acest caz se ia $R^\circ F = F$ şi $\rho_F = 1_F$. Cu această alegere avem

$$R^\circ i = 1.$$

Rezultă că dacă R° este definit peste tot pe categoria Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$, atunci R° este un functor de completare.

TEOREMA 8.1. *Dacă $\mathcal{C}$ are suficiente injective, R° este definit peste tot pe categoria* Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ *şi este un functor exact.*

Demonstraţie. Vom considera o funcţie E care *alege*, pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, un şir exact $E_A : 0 \to A \to J \to N \to 0$ cu J injectiv. Presupunem, în plus, că, pentru orice obiect injectiv J în $\mathcal{C}$, E_J este şirul $0 \to J \xrightarrow{1} J \to 0 \to 0$.

Fie $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor aditiv. Vom stabili existenţa functorului $R^\circ F$ într-un număr de paşi.

Mai întîi o definiţie. Un functor aditiv $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se zice *separat* dacă, pentru orice monomorfism u în $\mathcal{C}$, $G(u)$ este monomorfism în $\mathcal{C}'$.

Pasul 1. Definiţia functorului F^+.

Pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, considerăm şirul exact ales E_A şi punem

$$F^+(A) = \operatorname{Ker} F(\alpha).$$

De asemenea, pentru orice morfism $u : A_1 \to A$, vom pune (vezi § 6)

$$F^+(u) = \theta'(u),$$

unde $\theta'(u)$ se defineşte folosind şirurile exacte alese E_{A_1} şi E_A. Din lemele 6.1 şi 6.2 rezultă că F^+ este un functor aditiv de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$.

Pasul 2. Functorul F^+ este separat.

Într-adevăr, să presupunem că $u : A_1 \to A$ este un monomorfism. Avem o diagramă comutativă cu linii exacte

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A_1 & \xrightarrow{\beta_1} & J_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & N_1 & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & & & & & \\
0 & \to & A_1 & \xrightarrow{\beta u} & J & \to & M & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow{\beta} & J & \xrightarrow{\alpha} & N & \to & 0
\end{array}$$

unde linia de sus este E_{A_1}, iar linia de jos E_A. Folosind această diagramă, putem defini $\theta'(u)$ și $\theta'(1)$. Evident, $\theta'(u)$ este monomorfism.

Din definiția lui $F^+(u)$ și din lema 6.2 rezultă că

$$F^+(u) = \theta'(u)\theta'(1)$$

iar din corolarul la lema 6.2 rezultă că $\theta'(1)$ este izomorfism. Astfel $F^+(u)$ este monomorfism, deci F este separat.

Pasul 3. Dacă F este separat, F^+ este exact la stînga.

Fie $0 \to A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \to 0$ un șir exact în $\mathcal{C}$. După propoziția 1.3, avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A' & \to & J' & \to & N' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \to & \overline{J} & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & \overline{N} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A'' & \to & J'' & \to & N'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

în care toate liniile și toate coloanele sînt exacte, prima linie este $E_{A'}$, a treia linie este $E_{A''}$, iar obiectele J', $\overline{J}$, J'' sînt injective.

Rezultă o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & F^+(A') & \longrightarrow & F(J') & \to & F(N') \\
 & & {\scriptstyle \theta'(u)}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \operatorname{Ker} F(\overline{\alpha}) & \to & F(\overline{J}) & \to & F(\overline{N}) \\
 & & {\scriptstyle \theta'(v)}\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & F^+(A'') & \to & F(J'') & &
\end{array}$$

cu linii exacte şi coloanele a doua şi a treia exacte (pentru coloane se ţine seama că şirul $0 \to J' \to \bar{J} \to J'' \to 0$ este direct şi că F este separat). Din propoziţia I.7.2 şi lema I.12.1 rezultă că şirul

$$0 \to F^+(A') \xrightarrow{\theta'(u)} \operatorname{Ker} F(\bar{\alpha}) \xrightarrow{\theta'(v)} F^+(A'')$$

este exact.

Să considerăm diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & A' & \to & J' & \to & N & \to 0 \\
 & & {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \to & A & \to & \bar{J} & \to & \bar{N} & \to 0 \\
 & & {\scriptstyle 1}\downarrow & & & & & \\
0 & \to & A & \to & J & \to & N & \to 0 \\
 & & {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \to & A'' & \to & J'' & \to & N'' & \to 0
\end{array}$$

unde linia a treia este E_A. Folosind această diagramă, definim pe $\theta'(u)$, $\theta'(1)$ şi $\theta'(v)$. Din definiţia lui $F^+(u)$ şi $F^+(v)$ şi din lema 6.2 rezultă că

$$F^+(u) = \theta'(1)\,\theta'(u) \text{ şi } \theta'(v) = F^+(v)\;\theta'(1),$$

iar din corolarul la lema 6.2, că $\theta'(1)$ este izomorfism. Astfel şirul

$$0 \to F^+(A') \xrightarrow{F^+(u)} F^+(A) \xrightarrow{F^+(v)} F^+(A'')$$

este de asemenea exact.

Pasul 4. Avem un morfism functorial $\rho : F \to F^+$.

Într-adevăr, să considerăm şirul exact ales $E_A : 0 \to A \xrightarrow{\beta} J \xrightarrow{\alpha} N \to 0$. Avem $F(\alpha)\,F(\beta)=0$, deci există şi este unic un morfism $\rho(A): F(A) \to F^+(A)$ astfel încît să avem

$$F(\beta) = \varepsilon\,\rho(A),$$

unde $\varepsilon : F^+(A) \to F(J)$ este monomorfismul canonic.

Fie acum $A_1 \xrightarrow{u} A$ un morfism în $\mathcal{C}$. Considerăm şirul exact ales E_{A_1} şi avem, ca mai sus,

$$F(\beta_1) = \varepsilon_1 \rho(A_1).$$

Apoi avem o diagramă

$$\begin{array}{ccccc}
F(A_1) & \xrightarrow{\rho(A_1)} & F^+(A_1) & \xrightarrow{\varepsilon_1} & F(J_1) \\
{\scriptstyle F(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F^+(u)} & & \downarrow{\scriptstyle F(g)} \\
F(A) & \xrightarrow{\rho(A)} & F^+(A) & \xrightarrow{\varepsilon} & F(J)
\end{array}$$

unde $g : J_1 \to J$ este astfel încît $g\,\beta_1 = \beta u$. Pătratul din dreapta este comutativ după definiția lui $F^{+}(u)$. Dreptunghiul este comutativ întrucît $\varepsilon\,\rho(A) = F(\beta)$, $\varepsilon_1 \rho(A_1) = F(\beta_1)$ și întrucît F este functor. Rezultă că pătratul din stînga este comutativ (se ține seama că ε este monomorfism), i.e. ρ este morfism functorial.

Pasul 5. Pentru orice obiect G în categoria $\mathfrak{Se}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ și orice morfism functorial $\varphi : F \to G$ există și este unic un morfism functorial $\varphi^{+} : F^{+} \to G$ cu proprietatea că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\rho} & F^{+} \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\varphi^{+}} & \\ & G & \end{array}$$

Într-adevăr, să considerăm, pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, șirul exact ales E_A. Avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccccc} F(A) & \xrightarrow{\rho(A)} & F^{+}(A) & \xrightarrow{\varepsilon} & F(J) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(N) \\ {\scriptstyle\varphi(A)}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\varphi(J)} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi(N)} \\ 0 \to G(A) & & \xrightarrow{G(\beta)} & & G(J) & \xrightarrow{G(\alpha)} & G(N) \end{array}$$

cu linia de jos exactă (întrucît G este exact la stînga). Vom nota această diagramă prin $D(A)$. Rezultă că există și este unic un morfism $\varphi^{+}(A) : F^{+}(A) \to G(A)$ care inserat în diagrama precedentă o lasă comutativă. Într-adevăr, mai întîi există și este unic $\varphi^{+}(A)$ astfel încît

$$G(\beta)\,\varphi^{+}(A) = \varphi(J)\,\varepsilon.$$

Întrucît $G(\beta)$ este monomorfism, se vede că avem de asemenea

$$\varphi(A) = \varphi^{+}(A)\,\rho(A).$$

Dacă avem un morfism $A_1 \xrightarrow{u} A$, atunci considerăm șirurile exacte alese E_{A_1} și E_A și avem un morfism de diagrame

$$(u,\ g,\ h) : E_{A_1} \to E_A$$

care induce un morfism

$$D(A_1) \to D(A).$$

Se deduce că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} F^{+}(A_1) & \xrightarrow{F^{+}(u)} & F^{+}(A) \\ {\scriptstyle\varphi^{+}(A_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^{+}(A)} \\ G(A_1) & \xrightarrow{G(u)} & G(A) \end{array}$$

care arată că φ^+ este un morfism functorial. Din cele precedente rezultă că

$$\varphi = \varphi^+ \rho.$$

Fie acum $\psi : F^+ \to G$ un alt morfism functorial astfel încît $\varphi = \psi\rho$. Vom arăta că $\psi = \varphi^+$. Fie A un obiect în $\mathcal{C}$. Avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\beta} & J & \xrightarrow{\alpha} & N \to 0 \\ & & \beta\downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \\ 0 & \to & J & \xrightarrow{1} & J & \to 0 & \to 0 \end{array}$$

în care linia de sus este E_A, iar linia de jos E_J. Rezultă că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccccc} & & F^+(A) & \xrightarrow{\varepsilon} & F(J) \xrightarrow{F(\alpha)} F(N) \\ & & \downarrow{\scriptstyle F^+(\beta)} & & \downarrow 1 \qquad\quad \downarrow \\ F^+(J) = F(J) & \xrightarrow{1} & F(J) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

i.e. $\varepsilon = F^+(\beta)$.

Pe de altă parte, întrucît ψ este functorial, avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} F^+(A) & \xrightarrow{F^+(\beta)} & F^+(J) = F(J) \\ {\scriptstyle \psi(A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi(J) = \varphi(J)} \\ G(A) & \xrightarrow{G(\beta)} & G(J) \end{array}$$

Rezultă că

$$G(\beta)\,\psi(A) = \varphi(J)\,\varepsilon,$$

deci

$$\psi(A) = \varphi^+(A)$$

după definiţia lui $\varphi^+(A)$.

Pasul 6. Definiţia lui $R^\circ F$.

Vom defini $R^\circ F$ cum urmează. Cînd F este exact la stînga, $R^\circ F = F$. Cînd F este separat, fără a fi exact la stînga, $R^\circ F = F^+$. În rest vom pune $R^\circ F = (F^+)^+$. Evident, functorul $F \rightsquigarrow (F^+)^+$ este izomorf cu functorul R°.

Pasul 7. Functorul R° este exact.

Fie $0 \to F' \to F \to F''$ un şir exact în categoria Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$. Pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, considerăm şirul exact ales E_A şi avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to F'(J) & \to F(J) & \to F''(J) \\ & {\scriptstyle F'(\alpha)}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle F(\alpha)} & \downarrow{\scriptstyle F''(\alpha)} \\ 0 & \to F'(N) & \to F(N) & \to F''(N) \end{array}$$

Luînd nucleele rezultă, în virtutea lemei I.12.2, că avem şirul exact

$$0 \to F'^{+}(A) \to F^{+}(A) \to F''^{+}(A).$$

Interînd, obţinem un şir exact

$$0 \to R^{\circ}F'(A) \to R^{\circ}F(A) \to R^{\circ}F''(A)$$

Pe de altă parte, fiind un adjunct la stînga al lui i, R° este exact la dreapta.

COROLAR. *În ipotezele teoremei 8.1, categoria* Se $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ *este abeliană.*

Demonstraţie. După corolarul 1 la teorema I.13.2.

Observaţie. În condiţiile teoremei 8.1, avem $R^{\circ}F(J) = F(J)$ pentru J injectiv. Într-adevăr, $E_J : 0 \to J \xrightarrow{1} J \to 0$, deci, după definiţia lui F^{+}, avem $F^{+}(J) = F(J)$ şi, iterînd, $(F^{+})^{+}(J) = F^{+}(J) = F(J)$.

Astfel $R^{\circ}F(A) = F(A)$ cînd F este exact la stînga sau cînd A este injectiv.

§ 9. Functori derivaţi

Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două categorii abeliene.

Dacă functorii R° şi S există (i.e. dacă R° şi S sînt definiţi în F pentru orice functor aditiv $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$), atunci avem situaţia descrisă în diagrama următoare

$$\begin{array}{ccc} \text{Fonct}\,(\mathcal{C}, \mathcal{C}') & \underset{\pi^{\circ}}{\overset{S}{\rightleftarrows}} & \partial\text{-Fonct}\,(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \\ {\scriptstyle R^{\circ}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ \text{Se}\,(\mathcal{C}, \mathcal{C}') & & \end{array}$$

Reamintim că S este un adjunct la stînga al lui π° satisfăcînd $\pi^{\circ}S = 1$, iar R° un adjunct la stînga al lui i satisfăcînd $R^{\circ}i = 1$.

DEFINIŢIE. Dacă $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ sînt astfel încît functorii R° şi S există, vom defini functorul

$$R : \text{Fonct}\,(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \to \partial\text{-Fonct}\,(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$$

prin egalitatea

$$R = S\,i\,R^{\circ}$$

şi vom spune că R există.

Mai general, dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este un functor aditiv astfel încît $R^{\circ}F$ şi $S(F)$ există, atunci definim ∂-functorul $R(F)$ de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$ prin egalitatea

$$R(F) = S(R^{\circ}F).$$

Din definiție rezultă că $R(F)$ dacă există este un ∂-functor universal și componenta sa de grad zero coincide cu R^0F.

Dacă F este exact la stînga și dacă $R(F)$ există, atunci $R^0F = F$, deci

$$R(F) = S(F).$$

DEFINIȚIE. Cînd ∂-functorul universal $R(F)$ există, componentele sale se notează R^nF și se numesc *functorii derivați la dreapta* ai lui F. Dacă $F^0 : \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}'^0$ este dualul lui F și dacă $R(F^0)$ există, componentele lui $R(F^0)$ se notează L_nF și se numesc *functorii derivați la stînga* ai lui F.

Reamintim că un ∂-functor T se numește *∂-functor coomologic* dacă, pentru orice șir exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ în categoria $\mathcal{C}$, șirul

$$0 \to T^0(A') \to T^0(A) \to T^0(A'') \xrightarrow{\partial} T^1(A') \to \ldots$$

este exact.

TEOREMA 9.1. *Dacă $\mathcal{C}$ are suficiente injective, functorul R există și, pentru orice functor aditiv $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, $R(F)$ este un ∂-functor coomologic.*

Demonstrație. După teoremele 8.1, 6.1 și 7.1.

TEOREMA 9.2. *Pentru $\mathcal{C}$ cu suficiente injective și orice functor aditiv exact la stînga $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, ∂-functorul $R(F) = S(F)$ există și are proprietățile următoare:*

i) $R^0F = F$,

ii) $R^nF(J) = o$ *pentru J injectiv și* $n \geqslant 1$,

iii) $R(F)$ *este un ∂-functor coomologic.*

Invers, orice ∂-functor $U = (U^n)_{n\geqslant 0}$ cu proprietățile i)—iii) *este canonic izomorf cu $R(F)$.*

Demonstrație. Existența lui $R(F)$ este asigurată de teorema precedentă. Faptul că $R(F)$ are proprietățile i)—iii) rezultă din egalitatea $R(F) = S(F)$ (care este adevărată întrucît F este exact la stînga). Pe de altă parte, orice ∂-functor cu proprietățile ii) și iii) are proprietatea din teorema 5.1, deci este universul etc.

Exemplul 1. Fie $\mathcal{C}$ o $\mathfrak{U}$-categorie abeliană cu suficiente injective și A un obiect în $\mathcal{C}$. Știm că functorul $F : \mathcal{C} \to \mathfrak{U}$-**Ab** definit prin $F(B) = \mathrm{Hom}(A, B)$ și $F(u) = \mathrm{Hom}(A, u)$ este exact la stînga. Se notează $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(A, .)$ functorii derivați la dreapta ai lui F. Din teorema 9.2 rezultă că ∂-functorul $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(A, .)$ există și este caracterizat, pînă la un izomorfism de ∂-functori, de proprietățile următoare:

i) $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}(A, B)$,

ii) $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(A, J) = 0$ pentru J injectiv și $n \geqslant 1$,

iii) $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(A, .)$ este un ∂-functor coomologic de la $\mathcal{C}$ în $\mathfrak{U}$-**Ab**, i.e. pentru orice șir exact $0 \to B' \to B \to B' \to 0$ în $\mathcal{C}$, șirul

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B'') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(A, B') \to \ldots$$

este exact.

Exemplul 2. Fie $\mathcal{C} = \mathfrak{U}\text{-mod } \Lambda$ şi A un obiect în $\mathfrak{U}\text{-mod } \Lambda^\circ$. Functorul $F : \mathcal{C} \to \mathfrak{U}\text{-Ab}$ definit $F(B) = A \otimes_\Lambda B$ şi $F(u) = 1_A \otimes_\Lambda u$ este exact la dreapta, deci dualul său F° este exact la stînga. Întrucît $\mathcal{C}$ are suficiente proiective (corolarul 2 la propoziţia 2.1), $\mathcal{C}^\circ$ are suficiente injective. Din teorema 9.2 rezultă că functorii derivaţi la stînga ai lui F, notaţi $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, .)$, există şi că ∂-functorul $\mathrm{Tor}^\Lambda(A,.)$, este caracterizat, pînă la un izomorfism de ∂-functori, de proprietăţile următoare

i) $\mathrm{Tor}_0^\Lambda(A, B) = A \otimes_\Lambda B$,

ii) $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, B) = 0$ pentru B proiectiv (în $\mathcal{C}$) şi $n \geqslant 1$,

iii) $\mathrm{Tor}^\Lambda(A, .)$ este un ∂-functor coomologic de la $\mathcal{C}^\circ$ în $(\mathfrak{U}\text{-Ab})^\circ$, i.e. pentru orice şir exact $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ în $\mathcal{C}$, şirul

$$\ldots \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(A, B'') \xrightarrow{\partial} A \otimes_\Lambda B' \to A \otimes_\Lambda B \to A \otimes_\Lambda B'' \to 0$$

este exact.

Un studiu detaliat al ∂-functorilor Ext şi Tor cu aplicaţii se găseşte în H. Cartan şi S. Eilenberg [3], A. Grothendiech [6], R. Godement [5], S. Mac Lane [8] şi I. Bucur [1].

§ 10. Calculul functorilor derivaţi

Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două categorii abeliene şi $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor aditiv exact la stînga astfel încît ∂-functorul $R(F)$ există.

DEFINIŢIE. Un obiect A în $\mathcal{C}$ se zice *F-aciclic* dacă $R^nF(A) = 0$ pentru $n \geqslant 1$.

Din teorema 9.2 rezultă că, dacă $\mathcal{C}$ are suficiente injective, orice obiect injectiv este F-aciclic.

DEFINIŢIE. Dacă $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, se numeşte *rezoluţie* a lui A orice şir exact de forma

$$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} X^\circ \xrightarrow{d^\circ} X^1 \to \ldots \to X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \ldots$$

O rezoluţie a lui A se zice *injectivă* (resp. *F-aciclică*) dacă obiectele X^i $(i \geqslant 0)$ sînt injective (resp. F-aciclice).

Teorema următoare se mai numeşte *teorema lui de Rham abstractă.* Ea dă un procedeu comod de a calcula functorii derivaţi (sau sateliţi) ai unui functor aditiv exact la stînga F cu ajutorul unei rezoluţii F-aciclice.

TEOREMA 10.1. *Fie $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor aditiv exact la stînga astfel încît ∂-functorul $R(F) = S(F)$ există, A un obiect în $\mathcal{C}$ şi*

$$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} X^\circ \xrightarrow{d^\circ} \ldots \to X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \ldots$$

o rezoluţie F-aciclică a lui A. Atunci avem izomorfisme

$$R^\circ F(A) = F(A) \approx \mathrm{Ker}\, F(d^\circ)$$

și

$$R^qF(A) \approx \operatorname{Ker} F(d^q) / \operatorname{Im} F(d^{q-1})$$

pentru $q \geqslant 1$.

Demonstrație. Pentru orice $q \geqslant 0$, fie $\beta^q : Z^q \to X^q$ un nucleu al lui d^q; pentru $q = 0$, vom lua $Z^\circ = A$ și $\beta^\circ = \varepsilon$. Pentru $q \geqslant 1$, avem $d^q d^{q-1} = 0$, deci există și este unic un morfism $\alpha^{q-1} : X^{q-1} \to Z^q$ astfel încît

$$d^{q-1} = \beta^q \alpha^{q-1}.$$

Întrucît F este exact la stînga, pentru orice $q \geqslant 0$ avem un șir exact

$$0 \to F(Z^q) \xrightarrow{F(\beta^q)} F(X^q) \xrightarrow{F(d^q)} F(X^{q+1})$$

i.e. $F(Z^q)$ este canonic izomorf cu $\operatorname{Ker} F(d^q)$. În particular avem concluzia teoremei pentru $q = 0$.

Mai departe, pentru $q \geqslant 1$, $F(d^{q-1}) = F(\beta^q) F(\alpha^{q-1})$, i.e. diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} & F(Z^q) & \\ {\scriptstyle F(\alpha^{q-1})}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle F(\beta^q)} \\ F(X^{q-1}) & \xrightarrow{F(d^{q-1})} & F(X^q) \end{array}$$

de unde rezultă că

$$\operatorname{Im} F(d^{q-1}) \approx \operatorname{Im} F(\alpha^{q-1}),$$

deci concluzia teoremei pentru $q \geqslant 1$ revine la aserțiunea că există un morfism $F(Z^q) \to R^qF(A)$ astfel încît să avem un șir exact

$$F(X^{q-1}) \to F(Z^q) \to R^qF(A) \to 0.$$

Dar avem șirul exact

$$0 \to Z^{q-1} \xrightarrow{\beta^{q-1}} X^{q-1} \xrightarrow{\alpha^{q-1}} Z^q \to 0.$$

Întrucît $R(F)$ este un ∂-functor coomologic și întrucît X^{q-1} este F-aciclic, rezultă că avem un șir exact

$$F(X^{q-1}) \xrightarrow{F(\alpha^{q-1})} F(Z^q) \to R^1F(Z^{q-1}) \to 0.$$

Astfel totul se reduce la a arăta că

$$R^qF(A) \approx R^1F(Z^{q-1}).$$

Or, pentru orice întreg $p \geqslant 0$, șirul următor este exact

$$0 \to Z^p \xrightarrow{\beta^p} X^p \xrightarrow{\alpha^p} Z^{p+1} \to 0.$$

Întrucît $R(F)$ este un ∂-functor coomologic, rezultă că, pentru orice $p \geqslant 0$ și orice $q \geqslant 1$, avem un șir exact

$$R^{q-1}F(X^p) \to R^{q-1}F(Z^{p+1}) \xrightarrow{\partial} R^qF(Z^p) \to R^qF(X^p).$$

Dar X^p este F-aciclic, deci ∂ este izomorfism pentru $p \geqslant 0$ și $q \geqslant 2$. Astfel, pentru orice $p \geqslant 0$ și orice $q \geqslant 2$, avem un izomorfism

$$R^qF(Z^p) \approx R^{q-1}F(Z^{p+1}).$$

Ținînd seama de faptul că $Z^0 = A$, rezultă prin recurență că avem izomorfisme

$$R^qF(A) \approx R^{q-1}F(Z^1) \approx \ldots \approx R^1F(Z^{q-1})$$

pentru $q \geqslant 1$ (trivial pentru $q = 1$), ceea ce termină demonstrația teoremei lui de Rham abstracte.

TEOREMA 10.2. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană cu suficiente injective, $\mathcal{C}'$ o categorie abeliană oarecare și $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor aditiv oarecare. Orice obiect A în $\mathcal{C}$ are o rezoluție injectivă*

$$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} J^0 \xrightarrow{d^0} \ldots \to J^q \xrightarrow{d^q} J^{q+1} \to \ldots$$

și avem izomorfisme

$$R^0F(A) \approx \operatorname{Ker} F(d^0) \quad \text{și} \quad R^qF(A) \approx \operatorname{Ker} F(d^q) \,/\, \operatorname{Im} F(d^{q-1})$$

pentru $q \geqslant 1$.

Demonstrație. Fie A un obiect în $\mathcal{C}$. Întrucît $\mathcal{C}$ are suficiente injective, există un șir exact

$$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} J^0 \xrightarrow{\alpha^0} Z^1 \to 0$$

cu J^0 injectiv. Apoi există un șir exact

$$0 \to Z^1 \xrightarrow{\beta^1} J^1 \xrightarrow{\alpha^1} Z^2 \to 0$$

cu J^1 injectiv, și așa mai departe. Ca rezultat obținem o rezoluție injectivă

$$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} J^0 \xrightarrow{d^0} J^1 \to \ldots$$

cu $d^0 = \beta^1 \alpha^0, \ldots$

După observația de la sfîrșitul § 8 avem $R^0F(J^q) = F(J^q)$ și $R^0F(d^q) = F(d^q)$ pentru toți $q \geqslant 0$. Apoi întrucît R^0F este exact la stînga, avem un șir exact

$$0 \to R^0F(A) \to F(J^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(J^1)$$

ceea ce reprezintă concluzia teoremei pentru $q = 0$.

În sfîrşit, din teorema precedentă rezultă că

$$R^1F(A) \approx \operatorname{Ker} R^0F(d^q) \,/\, \operatorname{Im} R^0F(d^{q-1}) = \operatorname{Ker} F(d^q) \,/\, \operatorname{Im} F(d^{q-1})$$

pentru $q \geqslant 1$, ceea ce termină demonstraţia teoremei 10. 2.

Din această teoremă rezultă, de exemplu, că, pentru $\mathcal{C}$ o $\mathfrak{U}$-categorie cu suficiente injective, grupurile $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{C}}(A, B)$ se pot calcula cu ajutorul unei rezoluţii injective a lui B în $\mathcal{C}$, iar pentru $\mathcal{C} = \mathfrak{U}\text{-mod}\ \Lambda$, grupurile $\operatorname{Tor}^{\Lambda}_n(A, B)$ se pot calcula cu ajutorul unei rezoluţii proiective a lui B în $\mathcal{C}$.

Teorema 10.2 se poate folosi ca punct de plecare pentru o construcţie directă a functorilor derivaţi fără a folosi functori sateliţi (a se vedea [1], [3], [5], [6], [8].

Vom stabili acum un criteriu de aciclicitate datorit lui R. Godement.

Teorema 10.3. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană cu suficiente injective, $\mathcal{C}'$ o categorie abeliană oarecare, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor aditiv exact la stînga şi $\mathfrak{M}$ o mulţime de obiecte din $\mathcal{C}$ astfel încît :*

a) *pentru orice obiect A în $\mathcal{C}$, există un şir exact $0 \to A \to M \to N \to 0$ cu $M \in \mathfrak{M}$,*

b) *pentru orice şir direct $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ cu $M \in \mathfrak{M}$, $M' \in \mathfrak{M}$ (deci şi $M'' \in \mathfrak{M}$),*

c) *pentru orice şir exact $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ cu M şi $M' \in \mathfrak{M}$, $M'' \in \mathfrak{M}$ şi şirul $0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$ este exact.*

Atunci obiectele injective se găsesc în $\mathfrak{M}$, iar obiectele din $\mathfrak{M}$ sînt F-aciclice.

Demonstraţie. Fie J un obiect injectiv în $\mathcal{C}$. Din a) rezultă că avem un şir exact

$$0 \to J \to M \to N \to 0$$

cu $M \in \mathfrak{M}$. Întrucît J este injectiv, acest şir este direct, deci $J \in \mathfrak{M}$ în virtutea condiţiei b).

Fie $M \in \mathfrak{M}$ şi fie

$$0 \to M \to J^0 \xrightarrow{d^0} \ldots \to J^n \xrightarrow{d^n} J^{n+1} \to \ldots$$

o rezoluţie injectivă a lui M. O astfel de rezoluţie există în virtutea teoremei precedente. Atunci avem şiruri exacte

$$0 \to M \xrightarrow{\varepsilon} J^0 \xrightarrow{\alpha} Z^1 \to 0,\ 0 \to Z^0 \to J^1 \to Z^2 \to 0, \ldots$$

Întrucît obiectele injective aparţin lui $\mathfrak{M}$ şi întrucît $M \in \mathfrak{M}$, rezultă prin recurenţă, folosind condiţia c), că toate obiectele $Z^i \in \mathfrak{M}$ şi că şirurile următoare sînt exacte

$$0 \to F(M) \to F(J^0) \to F(Z^1) \to 0,\ 0 \to F(Z^0) \to F(J^1) \to F(Z^2) \to 0, \ldots$$

Urmează că şirul

$$0 \to F(M) \to F(J^0) \to F(J^1) \to \ldots$$

este exact, iar din teorema precedentă rezultă că

$$R^qF(M) = 0 \text{ pentru } q \geqslant 1,$$

ceea ce termină demonstrația.

COROLAR. *În condițiile teoremei precedente, orice obiect A în $\mathcal{C}$ are o rezoluție*

$$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} M^0 \xrightarrow{d^0} M^1 \to \dots$$

cu obiecte $M^i \in \mathfrak{M}$ și avem

$$R^0F(A) = F(A) \approx \operatorname{Ker} F(d^0) \text{ și } R^qF(A) \approx \operatorname{Ker} F(d^q) \,/\, \operatorname{Im} F(d^{q-1})$$

pentru $q \geqslant 1$.

Demonstrație. Existența unei rezoluții a lui A cu obiecte din $\mathfrak{M}$ rezultă din condiția a), procedîndu-se ca în demonstrația teoremei 10.2. În rest se aplică teorema 10.1.

§ 11. Coomologia unui spațiu topologic

Fie $\mathfrak{U}$ un univers. În tot restul acestui capitol se va presupune că mulțimea subiacentă inelului $\mathbf{Z}$ este un element din $\mathfrak{U}$. Prin *spațiu topologic* vom înțelege un obiect în categoria $\mathfrak{U}$-**Top**, prin *fascicul de mulțimi* (*grupuri abeliene*, *inele*) vom înțelege un fascicul cu valori în categoria $\mathfrak{U}$-**Ens** ($\mathfrak{U}$-**Ab**, $\mathfrak{U}$-**A**). În particular, prin *spațiu inelat* vom înțelege un spațiu inelat astfel încît spațiul topologic subiacent este un obiect în $\mathfrak{U}$-**Top**, iar fasciculul structural un fascicul cu valori în categoria $\mathfrak{U}$-**A**. În sfîrșit, prin *Modul* pe un spațiu inelat X vom înțelege un obiect în categoria $\mathfrak{U}$-**Mod** X.

Fie X un spațiu inelat și $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ fasciculul său structural. Categoria $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Mod** X este abeliană (teorema II 8.1) și are suficiente injective (corolarul la teorema 3.1). Avem un functor aditiv exact la stînga

$$\Gamma_X = \mathrm{pr}_X : \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{Mod}\ X \to \mathfrak{U}\text{-}\mathbf{mod}\ \mathcal{O}(X)$$

care asociază cu orice Modul F pe X grupul secțiunilor sale peste X, i.e.

$$\Gamma_X(F) = F(X),$$

și cu orice morfism $u : F' \to F$ în $\mathfrak{U}$-**Mod** X aplicația $\mathcal{O}(X)$-liniară

$$\Gamma_X(u) = u_X.$$

Functorii derivați (sau sateliți) la dreapta ai lui Γ_X există (a se vedea teoremele 6.1, 9.1 și 9.2) și se notează $H^q_{\mathcal{O}}(X, .)$.

DEFINIȚIE. Pentru orice Modul F pe X, $\mathcal{O}(X)$-modulele $H^q_{\mathcal{O}}(X, F)$ se numesc *modulele de coomologie* ale lui X cu coeficienți în F.

Cînd $\mathcal{O}_X = \mathbf{Z}$ = fasciculul simplu de fibră $\mathbf{Z}$, Modulele pe X sînt esențial fasciculele de grupuri abeliene în sensul că $\mathfrak{U}$-**Mod** $X \approx \mathfrak{F}(X, \mathcal{C})$. În acest caz se scrie $H^q(X, F)$ în loc de $H^q_{\mathbf{Z}}(X, F)$; pentru orice fascicul de grupuri abeliene pe un spațiu topologic X, grupurile abeliene $H^q(X, F)$ se numesc *grupurile de coomologie* ale lui X cu coeficienți în F. În cazul general, orice Modul pe X este în particular un fascicul de grupuri abeliene, deci sînt definite $\mathcal{O}(X)$-modulele $H^q_{\mathcal{O}}(X, F)$ și grupurile abeliene $H^q(X, F)$. Se va arăta în paragraful următor că pentru structurile de grup abelian,

$$H^q_{\mathcal{O}}(X, F) = H^q(X, F).$$

Din teorema 9.2 rezultă că, pentru orice spațiu inelat X, ∂-functorul $H_{\mathcal{O}}(X,.) = (H_{\mathcal{O}}(X, .)_{q \geqslant 0}$ are proprietățile următoare:

i) $H^0_{\mathcal{O}}(X, F) = F(X)$ pentru orice Modul F pe X,

ii) $H^q_{\mathcal{O}}(X, F) = 0$ cînd F este injectiv și $q \geqslant 1$,

iii) $H_{\mathcal{O}}(X, .)$ este un ∂-functor coomologic, i.e. pentru orice șir exact $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ în categoria $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Mod** X, șirul

$$0 \to F'(X) \to F(X) \to F''(X) \xrightarrow{\partial} H^1_{\mathcal{O}}(X, F') \to \ldots$$

este exact în $\mathcal{C}' = \mathfrak{U}$-**mod** $\mathcal{O}(X)$.

Invers, orice ∂-functor $U = (U^n)_{n \geqslant 0}$ de la $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Mod** X în $\mathcal{C}' =$ $= \mathfrak{U}$-**mod** $\mathcal{O}(X)$ cu proprietățile i)-iii) este canonic izomorf cu $H(X, .)$.

Pentru orice Modul G pe X, functorii derivați ai functorului $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(G, .)$ se notează $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(G,.)$. Pentru orice Modul F pe X, avem un izomorfism de grupuri (functorial în F)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, F) \approx F(X) = \Gamma_X(F)$$

care asociază, cu orice morfism $u : \mathcal{O} \to F$ de Module pe X, secțiunea $u_X(1) \in F(X)$. Din proprietățile functorilor Ext (a se vedea § 9) și din cele precedente rezultă că avem izomorfisme (pentru structurile de grup abelian)

$$H^q_{\mathcal{O}}(X, F) \approx \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, F).$$

Din teorema 10.2 rezultă că modulele de coomologie ale unui spațiu inelat X cu coeficienți în F se pot calcula cu ajutorul unei rezoluții injective a lui F.

Mai general, putem calcula modulele de coomologie $H^q_{\mathcal{O}}(X, F)$ cu ajutorul oricărei rezoluții Γ_X-aciclice. Printre Modulele Γ_X-aciclice pe X se disting în special două clase: *Modulele flasce* și *Modulele moi* în cazul X paracompact. Acestea vor fi studiate în paragrafele următoare *).

*) A se vedea de asemenea R. Godement [5].

§ 12. Fascicule flasce

DEFINIȚIE. Un fascicul de mulțimi sau de grupuri abeliene F pe un spațiu topologic X se numește *flasc* dacă morfismele de restricție

$$\rho_U^X : F(X) \to F(U)$$

sînt epimorfisme pentru toți $U \in \tau(X)$.

Evident, un fascicul de grupuri abeliene F pe X este flasc dacă și numai dacă fasciculul de mulțimi subiacent lui F este flasc.

Dacă X este un spațiu inelat, un Modul F pe X se zice *flasc* dacă fasciculul de grupuri abeliene subiacent lui F (sau, ceea ce este același lucru, dacă fasciculul de mulțimi subiacent lui F) este flasc.

Să observăm că, dacă un fascicul de mulțimi F pe X este flasc, atunci, pentru orice mulțime deschisă U în X, $F(U) \neq \varnothing$. Într-adevăr, știm că mulțimea $F(\varnothing)$ este un obiect final în categoria $\mathfrak{U}$-**Ens**, deci conține un element (și unul singur). Cum F este flasc, aplicația

$$F(U) \to F(\varnothing)$$

este surjectivă, deci mulțimea $F(U)$ este necesar nevidă.

Evident, dacă un fascicul F pe X este flasc, atunci pentru orice mulțime deschisă U în X, fasciculul $F|U$ este flasc.

PROPOZIȚIA 12.1. *Fie F un fascicul pe X cu proprietatea că orice $x \in X$ are o vecinătate deschisă W astfel încît fasciculul $F|W$ este flasc. Atunci F este flasc.*

Demonstrație. Fie U o mulțime deschisă în X. Avem de arătat că aplicația

$$F(X) \to F(U)$$

este surjectivă.

Fie $s \in F(U)$. Să considerăm mulțimea α a perechilor (V, t) cu V o mulțime deschisă în X astfel încît $U \subset V$ și $t \in F(V)$ astfel încît $t|U = s$. Vom ordona această mulțime *prin prelungire*, i.e. vom pune

$$(V, t) < (V', t')$$

cînd $V \subset V'$ și $t = t'|V$. Evident, această mulțime ordonată este inductivă, deci, după lema lui Zorn, ea are un element maximal (V_1, t_1). Propoziția va fi demonstrată dacă vom arăta că $V_1 = X$.

Să presupunem, prin ipoteza absurdului, că $V_1 \neq X$, și fie $x \in X - V_1$. După ipoteza propoziției există o vecinătate deschisă V_2 a lui x astfel încît fasciculul $F|V_2$ este flasc. Rezultă că există o secțiune $t_2 \in F(V_2)$ astfel încît

$$t_2|V_1 \cap V_2 = t_1|V_1 \cap V_2$$

(în cazul $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, se ia pentru t_2 o secțiune arbitrară ; t_2 există după o observație făcută mai sus întrucît $F|V_2$ este flasc).

Fie $V = V_1 \cup V_2$. Întrucît F este fascicul, există $t \in F(V)$ astfel încît

$$t|\, V_1 = t_1 \text{ și } t|\, V_2 = t_2.$$

În particular, $t|\, U = s$, deci $(V, t) \in \alpha$. Cum V conține strict pe V_1, elementul (V_1, t_1) nu este maximal în α, ceea ce este o contradicție.

PROPOZIȚIA 12.2. *Imaginea directă a unui fascicul flasc este un fascicul flasc.*

Demonstrație. Fie $\psi : X \to Y$ o aplicație continuă de spații topologice, F un fascicul flasc pe X, $G = \psi(F)$ și $V \in \tau(Y)$. Avem de arătat că aplicația

$$G(Y) = F(X) \to F(\psi^{-1}(V)) = G(V)$$

este surjectivă, ceea ce este adevărat întrucît F este flasc.

TEOREMA 12.1. *Fie X un spațiu inelat. Mulțimea Modulelor flasce pe X satisface condițiile a), b) și c) din teorema 10.3 pentru categoria* $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$-**Mod** X

Demonstrație. Condiția a). Fie F un fascicul de mulțimi pe X. Vom defini un fascicul flasc G pe X în modul următor. Pentru orice mulțime deschisă U în X, punem

$$G(U) = \prod_{x \in U} F_x.$$

Dacă $V \subset U$, ρ_V^U se definește ca fiind aplicația care asociază cu orice element $s = (f_x)_{x \in U}$ în $G(U)$, elementul $t = (f_x)_{x \in V}$ al lui $G(V)$. Evident, G este un fascicul de mulțimi flasc pe X. În plus avem un monomorfism de fascicule de mulțimi

$$\varepsilon : F \to G$$

definit prin

$$\varepsilon_U(f) = (f_x)_{x \in U}$$

pentru orice $U \in \tau(X)$ și orice $f \in F(U)$, unde $f_x = \rho_x^U(f)$.

Dacă F este fascicul de grupuri abeliene, atunci G este fascicul de grupuri abeliene cu adunarea definită pe componente, i.e.

$$(f_x)_{x \in U} + (g_x)_{x \in U} = (f_x + g_x)_{x \in U},$$

iar ε este un morfism de fascicule de grupuri abeliene.

Cînd F este Modul pe X, G este Modul pe X dacă definim înmulțirea

$$\mathcal{O}_X \times G \to G$$

prin

$$(\lambda, f) \rightsquigarrow \lambda f = (\lambda_x f_x)_{x \in U}$$

pentru orice mulțime deschisă U în X și elemente λ în $\mathcal{O}_X(U)$ și $f = (f_x)_{x \in U}$ în $G(U)$. În plus, ε este morfism de Module.

Condiția b). Fie F și G două Module pe X astfel încît $F \times G$ este un Modul flasc. Avem de arătat că F este un Modul flasc, deci că pentru orice mulțime deschisă U în X, aplicația

$$F(X) \to F(U)$$

este surjectivă. Or, aplicația

$$F(X) \times G(X) \to F(U) \times G(U)$$

este surjectivă etc.

Condiția c). Să considerăm un șir exact

$$0 \to F' \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} F'' \to 0$$

de Module pe X cu F' și F flasce.

Vom arăta mai întîi că, pentru orice mulțime deschisă U în X, șirul următor este exact

$$0 \to F'(U) \xrightarrow{u_U} F(U) \xrightarrow{v_U} F''(U) \to 0.$$

Evident, este suficient să demonstrăm aceasta în cazul $U = X$. Întrucît functorul Γ_X este exact la stînga, totul se reduce la a arăta că aplicația $v_X : F(X) \to F''(X)$ este surjectivă.

Fie $s'' \in F''(X)$. Să considerăm mulțimea α a perechilor (U, s) cu $U \in \tau(X)$, $s \in F(U)$ și $v(s) = s'' \mid U$. Vom ordona această mulțime *prin prelungire*, i.e. vom pune

$$(U, s) < (U_1, s_1)$$

dacă $U \subset U_1$ și $s_1 \mid U = s$. Evident, această mulțime ordonată este inductivă, deci, după lema lui Zorn, ea are un element maximal (V_0, t_0). Este suficient să arătăm că $V_0 = X$.

Să presupunem, prin ipoteza absurdului, că $V_0 \neq X$ și fie $x \in X - V_0$. Întrucît v este un epimorfism de fascicule, există o vecinătate deschisă V_1 a lui x și $t_1 \in F(V_1)$ astfel încît $v(t_1) = s'' \mid V_1$. Putem alege t astfel încît

$$t_1 \mid V_0 \cap V_1 = t_0 \mid V_0 \cap V_1.$$

Într-adevăr, dacă $V_0 \cap V_1 = \varnothing$, această condiție este satisfăcută totdeauna. Dacă ,dimpotrivă, $V_0 \cap V_1 \neq \varnothing$, atunci, întrucît șirul $0 \to F'(V_0 \cap V_1) \to F(V_0 \cap V_1) \to F''(V_0 \cap V_1)$ este exact, există $s' \in F'(V_0 \cap V_1)$ astfel încît

$$u(s') = (t_1 - t_0) \mid V_0 \cap V_1.$$

Pe de altă parte, F este flasc, deci există $s_1' \in F'(V_1)$ astfel încît

$$s_1' \mid V_0 \cap V_1 = s'.$$

Atunci

$$t_1 + u(s_1') \in F(V_1), \quad v(t_1 + u(s_1')) = s'' \mid V_1$$

şi

$$(t_1 + u(s_1')) \mid V_0 \cap V_1 = t_0 \mid V_0 \cap V_1 .$$

Astfel, înlocuind la nevoie t_1 cu $t_1 + u(s_1')$, putem presupune că $t_1 = t_0$ pe $V_0 \cap V_1$.

Întrucît F este fascicul, există $t \in F(V)$ astfel încît

$$t_1 = t \mid V_1 \quad \text{şi} \quad t_0 = t \mid V_0 ,$$

unde $V = V_0 \cup V_1$. Cum V conţine strict pe V_0, elementul (V_0, t_0) nu este maximal în α, ceea ce este o contradicţie.

Astfel, pentru orice mulţime deschisă U în X, şirul

$$0 \to F'(U) \to F(U) \to F''(U) \to 0$$

este exact.

Pînă aici s-a folosit doar faptul că şirul $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ este exact şi că fasciculul F' este flasc. Să presupunem acum că şi F este flasc. Atunci, pentru orice mulţime deschisă U în X, avem o diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & F'(X) & \to & F(X) & \to & F''(X) \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & F'(U) & \to & F(U) & \to & F''(U) \to 0 \end{array}$$

cu linii exacte şi săgeata verticală de la mijloc epimorfism. Rezultă că ultima săgeată verticală este epimorfism, i.e. F'' este flasc, ceea ce termină demonstraţia teoremei.

COROLARUL 1. *Module flasce pe X sînt Γ_X-aciclice şi, pentru orice Modul F pe X, modulele de coomologie $H^q_{\mathcal{O}}(X, F)$ se pot calcula cu ajutorul unei rezoluţii flasce.*

Demonstraţie. După teoremele 10.3 şi 10.1.

COROLARUL 2. *Pentru orice Modul F pe X,*

$$H^q_{\mathcal{O}}(X, F) = H^q(X, F)$$

pentru structurile de grup abelian.

Demonstraţie. Într-adevăr, un Modul G pe X este flasc dacă şi numai dacă fasciculul de grupuri abeliene subiacent lui G este flasc. Dacă F este un Modul oarecare pe X, avem o rezoluţie flască

$$0 \to F \xrightarrow{\varepsilon} G^0 \to G^1 \to \ldots$$

Aceasta este în particular o rezoluţie flască pentru structura subiacentă de fascicul de grupuri abeliene etc.

§ 13. Fascicule moi pe un spațiu paracompact

Fie X un spațiu paracompact.

DEFINIȚIE. Un fascicul de mulțimi F pe X se zice *moale* dacă, pentru orice mulțime închisă S în X, aplicația

$$\varrho_M^X : F(X) \to F(M)$$

este surjectivă.

Dacă F este un fascicul de grupuri abeliene sau de inele pe X, sau un Modul pe un spațiu inelat X cu spațiu topologic subiacent paracompact, vom spune că F este moale dacă fasciculul de mulțimi subiacent lui F este moale.

X fiind presupus mereu paracompact, din teorema II.9.1 rezultă că orice fascicul flasc este moale. De asemenea, dacă F este un fascicul moale pe X și dacă S este un subspațiu închis al lui X, atunci fasciculul indus $F \mid S$ este moale.

Vom arăta că noțiunea de fascicul moale are caracter local.

PROPOZIȚIA 13.1. *Fie F un fascicul de mulțimi pe un spațiu paracompact X având proprietatea că există o acoperire deschisă $(U_i)_{i\in I}$ a lui X astfel încît, pentru orice $i \in I$ și orice mulțime închisă $M \subset U_i$, aplicația*

$$\varrho_M^{U_i} : F(U_i) \to F(M)$$

este surjectivă. Atunci F este moale.

Demonstrație. Întrucît X este paracompact, putem presupune că acoperirea $(U_i)_{i\in I}$ este local finită. Fie $(V_i)_{i\in I}$ o altă acoperire deschisă a lui X astfel încît $\overline{V}_i \subset U_i$ pentru orice $i \in I$.

Fie S o mulțime închisă în X și $s \in F(S)$. Pentru orice submulțime J a lui I, vom pune

$$S_J = \bigcup_{i\in J} \overline{V}_i.$$

Întrucît acoperirea (V_i) este local finită, S_J este o mulțime închisă.

Fie α mulțimea perechilor (t, J) cu $J \subset I$ și $t \in F(S_J)$ astfel încît $t = s$ pe $S \cap S_J$. Această mulțime nu este vidă. Într-adevăr, fie $i \in I$ și $J = \{i\}$, deci $S_J = \overline{V}_i$. După ipoteza propoziției, secțiunea $s \mid S \cap \overline{V}_i$ se prelungește la o secțiune peste U_i și în particular la o secțiune pe $\overline{V}_i \subset U_i$.

Să ordonăm mulțimea α prin

$$(t', J') < (t'', J'')$$

dacă $J' \subset J''$ și $t' = t'' \mid S_{J'}$. Această mulțime ordonată este evident inductivă, deci, după lema lui Zorn, ea are un element maximal, să zicem (t, J). Totul revine la a arăta că $J = I$.

Să presupunem $J \neq I$. Fie $i \in I - J$ și $J' = J \cup \{i\}$.

Să considerăm secțiunile $s \in F(S)$ și $t \in F(S_J)$. Întrucît $t = s$ pe $S \cap S_J$ și întrucît

$$S_J \cap \bar{V}_i \cup S \cap \bar{V}_i$$

este o submulțime închisă a lui $\bar{V}_i$, deci a lui U_i, din ipoteza propoziției rezultă că există o secțiune $t_i \in F(\bar{V}_i)$ care se reduce la t pe $S_J \cap \bar{V}_i$ și la s pe $S \cap \bar{V}_i$. Avem deci o secțiune $t' \in F(S_{J'})$ care se reduce la t pe S_J și la s pe $S \cap S_{J'}$, i.e. $(t, J) < (t', J')$. Cum $J \neq J'$, elementul (t, J) nu este maximal în α, ceea ce este o contradicție.

COROLAR. *Fie F un fascicul moale pe un spațiu metrizabil X și S un subspațiu local închis al lui X. Atunci fasciculul indus $F \mid S$ este moale.*

Demonstrație. Pentru orice punct $x \in S$, există o vecinătate închisă V_x a lui x astfel încît $S \cap V_x$ este o mulțime închisă, deci fasciculul indus $F \mid S \cap V_x$ este moale. Întrucît subspațiul S este metrizabil, deci paracompact (după teorema lui Stone), din propoziția precedentă rezultă că $F \mid S$ este moale.

TEOREMA 13.1. *Fie X un spațiu inelat astfel încît spațiul topologic subiacent lui X este paracompact. Modulele moi pe X satisfac condițiile a), b) și c) din teorema* 10.3 *pentru categoria* $\mathfrak{U}$-**Mod** X.

Demonstrație. Condiția a) este satisfăcută în virtutea teoremei 12.1 întrucît orice fascicul flasc pe un spațiu paracompact este moale, iar b) se demonstrează trivial.

Condiția c). Să considerăm un șir exact

$$0 \to F' \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} F'' \to 0$$

de Module pe X cu F' moale. Vom arăta că șirul

$$0 \to F'(X) \to F(X) \to F''(X) \to 0$$

este exact.

Putem presupune, evident, că u este o incluziune, deci că aplicația $u_U : F'(U) \to F(U)$ este o incluziune pentru orice mulțime deschisă U în X. Întrucît functorul Γ_X este exact la stînga, totul se reduce la a arăta că aplicația v_X este surjectivă.

Fie $s'' \in F''(X)$. Există o acoperire deschisă local finită $(U_i)_{i \in I}$ a lui X și o familie $(s_i)_{i \in I}$ de secțiuni $s_i \in F(U_i)$ astfel încît

$$v_{U_i}(s_i) = s'' \mid U_i$$

pentru orice $i \in I$ (a se vedea observația fiinală din Cap. II, § 7).

Fie $(V_i)_{i \in I}$ o acoperire deschisă a lui X astfel încît $\bar{V}_i \subset U_i$ pentru orice $i \in I$. Pentru orice mulțime $J \subset I$, vom pune

$$S_J = \bigcup_{i \in J} \bar{V}_i.$$

Fie α mulțimea perechilor (s, J) cu $J \subset I$, $s \in F(S_J)$ și

$$v_{S_J}(s) = s'' \mid S_J.$$

Să ordonăm această mulțime prin prelungire, i.e.

$$(s', J') < (s'', J'')$$

dacă $J' \subset J''$ și $s' = s'' \mid S_{J'}$. Evident, această mulțime ordonată este inductivă, deci are un element maximal, să zicem (s, J). Totul revine la a arăta că $J = I$.

Să presupunem, prin ipoteza absurdului, că $J \neq I$. Fie $i \in I - J$ și $J' = J \cup \{i\}$. Atunci secțiunea

$$(s - s_i) \mid S_J \cap \overline{V}_i$$

are imaginea zero în $F''(S_J \cap \overline{V}_i)$, deci este un element $\in F'(S_J \cap \overline{V}_i)$. Întrucît F' este moale, există o secțiune $t \in F'(U_i)$ care se reduce la $s - s_i$ pe $S_j \cap \overline{V}_i$. Atunci

$$s_i - t \in F(U_i)$$

și

$$v_{U_i}(s_i - t) = s'' \mid U_i.$$

Apoi secțiunile s și $t + s_i$ coincid pe $S_J \cap \overline{V}_i$, deci există o secțiune $s' \in F(S_J)$ care se reduce la s pe S_J și la $t + s_i$ pe $\overline{V}_i$. Rezultă că

$$v_{S_{J'}}(s') = s'' \mid S_{J'},$$

deci $(s, J) < (s', J')$. Cum $J \neq J'$, elementul (s, J) nu este maximal în α, ceea ce este o contradicție.

Să presupunem acum că și F este moale. Atunci, pentru orice mulțime închisă S în X, avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{v_X} & F''(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(S) & \xrightarrow{v_S} & F''(S) \end{array}$$

în care prima săgeată verticală este surjectivă. Întrucît functorul imagine inversă asociat cu incluziunea $i_S : S \to X$ este exact (după corolarul la propoziția II.6.1) și întrucît restricția la un subspațiu închis al lui X paracompact a unui fascicul moale este un fascicul moale, din cele precedente rezultă că aplicația v_S este surjectivă. Urmează că a doua săgeată verticală în diagrama precedentă este surjectivă, ceea ce termină demonstrația teoremei.

COROLAR. *Fie X un spațiu inelat paracompact. Modulele moi pe X sînt Γ_X-aciclice și, pentru orice Modul F pe X, modulele de coomologie $H^q_{\mathcal{O}}(X, F)$ se pot calcula cu ajutorul unei rezoluții cu fascicule moi.*

Demonstrație. După teoremele 10.3 și 10.1.

De exemplu, fie X o varietate diferențiabilă paracompactă (de clasă C^∞). Pentru orice întreg $p \geqslant 0$, vom nota Ω^p fasciculul germenilor de forme diferențiale (de clasă C^∞) de grad p pe X. Pentru orice mulțime deschisă U în X, $\Omega^p(U)$ este deci modulul formelor diferențiale de grad p pe U. În particular, Ω° coincide cu fasciculul structural al lui X.

Să observăm că fasciculele Ω^p sînt moi. Într-adevăr, fie S o mulțime închisă în X și α o secțiune peste S a lui Ω^p. Întrucît X este paracompact și S o submulțime închisă a lui X, din teorema II.9.1 rezultă că există o vecinătate deschisă U a lui S și o secțiune $\beta \in \Omega^p(U)$ astfel încît $\beta \mid S = \alpha$. Apoi există o funcție $f \in \Omega^\circ(X)$ care ia valoarea 1 pe S și valoarea 0 pe o vecinătate a lui $X - U$. Rezultă că avem o secțiune $\gamma \in \Omega^p(X)$ definită prin

$$\gamma = \begin{cases} f\beta & \text{pe } U \\ 0 & \text{pe } X - U \end{cases}$$

care, evident, se reduce la α pe S.

Pe de altă parte, avem un operator de derivare exterioară

$$\mathrm{d} : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$$

care este morfism de fascicule de spații vectoriale reale (în particular, de grupuri abeliene) și are proprietatea că

$$\mathrm{d}\,\mathrm{d} = 0.$$

O formă diferențială $\alpha \in \Omega^p(X)$ se zice *închisă* dacă $\mathrm{d}\alpha = 0$ și *exactă* dacă $p \geqslant 1$ și dacă există $\beta \in \Omega^{p-1}(X)$ astfel încît $\alpha = \mathrm{d}\beta$. Orice formă exactă este închisă. O teoremă clasică a lui Poincaré afirmă că, dacă X este un cub deschis în $\mathbf{R}^n$, atunci orice formă închisă de grad $p \geqslant 1$ este exactă. Rezultă că avem un șir exact de fascicule de spații vectoriale reale (în particular, de grupuri abeliene)

$$0 \to \mathbf{R} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega^\circ \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \dots$$

unde $\mathbf{R}$ este fasciculul simplu pe X de fibră $\mathbf{R}$, iar ε incluziunea.

Din corolarul precedent și din teorema 10.1 rezultă că este adevărată

TEOREMA LUI DE RHAM. *Fie X o varietate diferențiabilă paracompactă. Pentru $q \geqslant 1$, grupul $H^q(X, \mathbf{R})$ este izomorf cu grupul cît al grupului*

formelor diferențiale închise de grad q pe X prin subgrupul formelor diferențiale exacte.

Pentru $q = 0$, $H^0(X, \mathbf{R}) = \mathbf{R}(X)$ este inelul funcțiilor diferențiabile (sau continue) local constante.

Fie acum X o varietate analitică complexă paracompactă și $\mathcal{O}$ fasciculul ei structural. X are o structură subiacentă de varietate diferențiabilă. Pentru orice cuplu (p, q) de numere întregi $\geqslant 0$, vom nota $\Omega^{p,q}$ fasciculul germenilor de forme diferențiale de tip (p, q). În particular, $\Omega^{0,0}$ este fasciculul germenilor de funcții (complexe) diferențiabile pe X. Avem un operator de derivare exterioară, de tip (0, 1),

$$\mathrm{d}'' : \Omega^{p,q} \to \Omega^{p,q+1}$$

care este un morfism de Module pe varietatea analitică X și satisface

$$\mathrm{d}''\,\mathrm{d}'' = 0.$$

De exemplu, dacă X este un deschis în $\mathbf{C}^n$ cu structura indusă de varietate analitică complexă, o formă diferențială α de tip (p, q) se scrie

$$\alpha = \sum_{i,j} a_{i,j}\, \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_{i_n} \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{j_q},$$

iar $\mathrm{d}''\alpha$ se definește prin

$$\mathrm{d}''\alpha = \sum_{i,j} \mathrm{d}''a_{i,j} \wedge \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_{i_p} \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{j_q},$$

unde

$$\mathrm{d}''a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial z_k}\, \mathrm{d}\bar{z}_k.$$

O formă diferențială $\alpha \in \Omega^{p,q}(X)$ se zice d''-*închisă* dacă $\mathrm{d}''\alpha = 0$ și d''-*exactă* dacă $q \geqslant 1$ și dacă există $\beta \in \Omega^{p,q-1}(X)$ astfel încît $\alpha = \mathrm{d}''\beta$. Este valabil atunci un analog al teoremei lui Poincaré, datorit lui Grothendieck, din care rezultă în particular că avem un șir exact de Module pe X

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega^{0,0} \xrightarrow{\mathrm{d}''} \Omega^{0,1} \xrightarrow{\mathrm{d}''} \ldots$$

unde ε este incluziunea.

Din corolarul precedent și teorema 10.1 rezultă că este adevărată

TEOREMA LUI DOLBEAULT. *Fie X o varietate analitică complexă paracompactă. Pentru $q \geqslant 1$, grupul $H^q(X, \mathcal{O})$ este izomorf cu grupul cît al grupului formelor diferențiale* d''*-închise de tip* $(0, q)$ *prin subgrupul formelor diferențiale* d''*-exacte.*

Bibliografie

1. I. Bucur, *Algebră omologică*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.
2. N. Bourbaki, *Topologie générale*. Chapitre 1,3ème édition (1963), Chapitre IX, 2ème édition (1958), Hermənn, Paris.
3. H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, 1956.
4. P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*. Bull. Soc. Math. France, **90**, 323—448 (1962).
5. R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1958.
6. A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algebre homologique*. Tôhoku math. J., **9**, 119—221 (1957).
7. M. Jurchescu şi A. Lascu, *Morfisme stricte, categorii cantoriene, functori de completare*. St. cerc. mat., **18**, *2*, 219—234 (1966).
8. S. Mac Lane, *Homology*. Springer, Berlin, 1963.
9. B. Malgrange, *Lectures on the theory of several complex variables*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1958.
10. C. Teleman, *Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiale*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.
11. D. A. Buchsbaum, *Exact categories and duality*. Trans. Amer Math. Soc., **80**, 1—34 (1955).
12. D. N. Kan, *Adjoints functors*. Trans. Amer. Math. Soc, **87**, 294—329 (1958).
13. J. P. Serre, *Faisceaux algébriques coherentes*. Ann. of Math., **61**, 197—278 (1955).
14. H. Yoneda, *On the homology theory of modules*. J. Fac. Sci. Tokyo, **7**, 193—227 (1954).

PARTEA A TREIA

Suprafețe riemanniene

de

Cabiria Andreian Cazacu

Introducere

De un secol şi mai bine, freamătul trezit în lumea matematică de concepţia genială a lui Riemann continuă. În acest sens, celebra problemă a modulelor, atît de stăruitor cercetată în geometria algebrică şi teoria funcţiilor complexe, constituie un exemplu grăitor.

În memoriul său fundamental *Theorie der Abelschen Funktionen* din 1857, B. Riemann a demonstrat că clasele de suprafeţe riemanniene compacte de gen g conform echivalente depind de $m(g)$ parametrii complecşi, independenţi ($m(g) = 0$, 1 sau $3g - 3$, după cum $g = 0$, 1 respectiv $g > 1$) numiţi *module*. El a dat mai multe metode pentru a arăta că mulţimea claselor poate fi considerată ca un continuu descris de aceşti $m(g)$ parametri.

O dată cu dezvoltarea matematicii, problema a fost precizată de O. Teichmüller.

Vom considera identice — suprafeţele riemanniene conform echivalente, deci printr-o suprafaţă riemanniană R vom înţelege de fapt o clasă de suprafeţe riemanniene conform echivalente.

Notăm cu $\mathbf{M}_g$ mulţimea suprafeţelor riemanniene de gen g şi o numim „*spaţiul modulelor după Riemann*".

Teichmüller a arătat că $\mathbf{M}_g$ are o structură topologică naturală, o structură metrică naturală şi o structură analitică complexă naturală.

Memoriul profund original al lui Teichmüller: *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale*, [42], a fost completat în 1943 şi 1944, [43]—[44]. Deşi demonstraţiile lui Teichmüller erau uneori dificile, alteori abia schiţate, opera sa a exercitat o puternică influenţă. Demonstraţii riguroase au fost date, începînd din 1954, de L. V. Ahlfors, H. E. Rauch, L. Bers şi numeroşi cercetători au dezvoltat teoria din diferite puncte de vedere, [1]—[6], [11]—[13], [20], [21], [27], [34], [46][1].

Se ştie astăzi că $\mathbf{M}_g$ este o varietate analitică complexă cu puncte singulare — un spaţiu complex cu dimensiunea complexă $m(g)$.

Una dintre ideile fundamentale ale lui Teichmüller constă în faptul că el nu a cercetat direct spaţiul $\mathbf{M}_g$, ci un spaţiu de acoperire al său, înlocuind relaţia de echivalenţă conformă printr-o relaţie de echivalenţă mai slabă.

[1]) A se vedea bibliografia în lucrările citate.

Să considerăm tripletele (R^0, f, R), unde R^0 și R sînt suprafețe riemanniene compacte de același gen g, iar f este un omeomorfism : $R^0 \to R$, care păstrează orientarea. Două triplete (R^0, f_k, R^k), $(k = 1, 2)$, se numesc *echivalente*, atunci cînd există reprezentarea conformă $h : R^1 \to R^2$, astfel încît $f_2^{-1} \circ h \circ f_1$ să fie omotop cu identitatea. O clasă de triplete echivalente se numește *suprafață Teichmüller* (*suprafață riemanniană determinată topologic*, *suprafața riemanniană marcată* sau *suprafață riemanniană canonică*) și o vom nota printr-unul din reprezentanții ei.

Fixînd suprafața riemanniană R^0, mulțimea tuturor suprafețelor Teichmüller corespunzătoare se numește *spațiu Teichmüller* $\mathbf{T}_g$ (R^0).

Diferitele spații Teichmüller astfel formate se identifică în mod natural prin următoarea corespondență : Fie R^0 și R^1 două suprafețe riemanniene compacte, de gen g. Alegem omeomorfismul $f^0 : R^0 \to R^1$, care păstrează orientarea și definim aplicația

$$\beta^{f^0}_{R^1R^0} : \mathbf{T}_g(R^1) \to \mathbf{T}_g(R^0).$$

care asociază tripletului $(R^1, f, R) \in \mathbf{T}_g(R^1)$ tripletul $(R^0, f \circ f^0, R) \in \mathbf{T}_g(R^0)$. Se verifică imediat că definiția are sens și că $\beta^{f^0}_{R^1R^0}$ este o bijecție [2]). Identificînd $\mathbf{T}_g(R^1)$ cu $\mathbf{T}_g(R^0)$, pentru orice R^1, obținem *spațiul Teichmüller* $\mathbf{T}_g$ *asociat genului* g.

Se demonstrează că $\mathbf{T}_g$ are o structură topologică naturală, o structură metrică naturală și o structură complexă naturală : este o varietate complexă fără singularități, echivalentă topologic cu bula complexă $m(g)$-dimensională, [2], și înzestrată cu o metrică riemanniană, kähleriană [3], [46].

În cazul $R^1 = R^0$, mulțimea aplicațiilor $\beta^{f^0}_{R^0R^0}$ formează *grupul modular* $\mathfrak{M}_g(R^0)$, cînd f^0 parcurge mulțimea omeomorfismelor $R^0 \to R^0$, care păstrează orientarea. Pe baza identificării de mai sus, se obține grupul modular $\mathfrak{M}_g$ asociat lui $\mathbf{T}_g$.

Se arată că $\mathbf{M}_g = \mathbf{T}_g/\mathfrak{M}_g$: Într-adevăr, se definește în mod natural aplicația $\tau : \mathbf{T}_g \to \mathbf{M}_g$, care în cazul lui $\mathbf{T}_g(R^0)$ asociază lui (R^0, f, R) suprafața riemanniană R. Se arată că τ este o aplicație olomorfă, surjectivă, nicăieri degenerată, astfel încît $\mathbf{T}_g$ constituie o acoperire ramificată a lui $\mathbf{M}_g$. Să remarcăm că $\tau[(R^0, f, R)] = \tau[(R^0, \tilde{f}, \tilde{R})]$ echivalează cu existența unui omeomorfism conform $h : R \to \tilde{R}$, deci că, notînd cu $f^0 = \tilde{f}^{-1} \circ h \circ f$, $\beta^{f^0}_{R^0R^0}[(R^0, \tilde{f}, \tilde{R})] = (R^0, f, R)$ sau $(R^0, \tilde{f}, \tilde{R})$ și (R^0, f, R) sînt echivalente modulo $\mathfrak{M}_g(R^0)$. Cum reciproca este de asemenea valabilă, rezultă afirmația de mai sus. Punctele fixe ale aplicației $\beta^{f^0}_{R^0R^0}$, unde f^0 nu este omotop cu identitatea, corespund la suprafețe care admit reprezentări conforme pe ele însele, diferite de identitate.

Teichmüller a considerat de asemenea mulțimea $\mathfrak{X}_g = \bigcup_{R \in \mathbf{M}_g} R$ și a căutat să introducă pe $\mathfrak{X}_g$ o structură topologică naturală și o structură complexă naturală, astfel încît $\mathfrak{X}_g$ să devină spațiu complex, iar aplicația

[2]) Evident, $\beta^{f^0}_{R^1R^0}$ nu se schimbă, dacă înlocuim f^0 cu un omeomorfism omotop

$\pi_g : \mathfrak{X}_g \to \mathbf{M}_g$, care asociază fiecărui punct $x \in R \subset \mathfrak{X}_g$ punctul $R \in \mathbf{M}_g$, să fie o aplicație olomorfă, proprie, cu anumite proprietăți. Atunci $\mathfrak{X}_g$ apare ca un spațiu fibrat, ale cărui fibre sînt suprafețe riemanniene, iar baza este $\mathbf{M}_g$, [20].

Era natural să se pună problema unei teorii analoge înlocuind omotopia cu omologia. S-a obținut astfel în locul suprafeței Teichmüller așanumita *suprafață Torelli*. Să considerăm din nou tripletele (R^0, f, R), unde R^0 și R sînt suprafețe riemanniene compacte de același gen g, iar f este un omeomorfism : $R^0 \to R$, care păstrează orientarea. Două triplete (R^0, f_k, R^k), $(k=1, 2)$, vor fi *echivalente*, dacă există reprezentarea conformă $h : R^1 \to R^2$, astfel încît $f_2^{-1} \circ h \circ f_1$ să inducă automorfismul identic al grupului de omologie de dimensiune 1 al lui R^0, pe care îl vom nota $\mathcal{H}^1(R^0)$. O clasă de triplete echivalente se va numi suprafață Torelli. După cum o suprafață Teichmüller se poate defini ca perechea formată de o suprafață riemanniană și o clasă de sisteme canonice de generatori ai grupului fundamental, echivalente, tot astfel o suprafață Torelli este asocierea dintre o suprafață riemanniană R și o clasă de baze canonice ale lui $\mathcal{H}^1(R)$, echivalente în sensul că două baze ale clasei se obțin una din alta cu păstrarea ordinei printr-o reprezentare conformă $R \to R$. Suprafețele Torelli de gen g formează *spațiile Torelli* $\mathcal{T}_g(R^0)$ și analog cu $\mathbf{T}_g$, spațiul Torelli $\mathcal{T}_g$.

Evident, fiecare suprafață Teichmüller determină o suprafață Torelli, astfel încît $\mathbf{T}_g$ acoperă $\mathcal{T}_g$. Mai precis, $\mathcal{T}_g(R^0) = \mathbf{T}_g(R^0)/m_g(R^0)$, unde $m_g(R^0)$ este subgrupul lui $\mathfrak{M}_g(R^0)$ format de aplicațiile $\beta^{f^0}_{R^0 R^0}$, pentru f^0 omeomorfism $R^0 \to R^0$, care păstrează orientarea și induce pe $\mathcal{H}^1(R^0)$ automorfismul identic. Se demonstrează că acoperirea $\mathbf{T}_g \to \mathcal{T}_g$ este neramificată și că $\mathcal{T}_g$ este o varietate analitică complexă $(3g-3)$-dimensională, [34], [46].

Printre diferitele probleme, care s-au studiat în legătură cu spațiile definite mai sus, citățm extinderea teoriei lui Teichmüller la cazul suprafețelor riemanniene deschise, [13], sau la varietăți de dimensiune superioară, [27], [20], și prezentarea ei axiomatică într-o teorie globală a modulelor, [21].

În lucrarea de față demonstrăm numai teorema fundamentală a lui Teichmüller, după care $\mathbf{T}_g$ se organizează ca spațiu metric, omeomorf cu $E_{m(g)}$ — spațiul euclidian $m(g)$-dimensional. Identificînd suprafețele riemanniene conform echivalente, o suprafață Teichmüller $(R^0, f, R) \in \mathbf{T}_g(R^0)$ va fi dată de clasa de omeomorfisme $R^0 \to R$ omotope cu f, respectiv de o clasă de izomorfisme $\pi_1(R^0) \to \pi_1(R)$ ale grupurilor fundamentale corespunzătoare, izomorfisme echivalente relativ la automorfismele interioare ale lui $\pi_1(R)$, (teorema 5.3''' din Cap. I, teorema 1.1 și § 5 din Cap. III). Vom caracteriza astfel suprafața Teichmüller cu ajutorul unei clase de sisteme canonice de generatori ai grupului fundamental, echivalente (Cap. III, § 6).

În cazul $g > 1$, folosind izomorfismul care există între grupul fundamental $\pi_1(R)$ și grupul G al transformărilor acoperirii universale a lui R

(Cap. I, § 4), asociem biunivoc fiecărei suprafețe Teichmüller o mulțime normată de generatori ai grupului G, (Cap. V, § 1), care va defini după Bers *modulele* suprafeței și obținem o bijecție $\mathbf{C} : \mathbf{T}_g \xrightarrow[\text{în}]{} E_{6g-6}$, cu ajutorul căreia topologizăm $\mathbf{T}_g$.

O a doua idee fundamentală a lui Teichmüller se bazează pe observarea că pe o suprafață riemanniană compactă de gen $g > 1$, diferențialele pătratice regulate formează spațiu vectorial real $(6g - 6)$-dimensional, și pe folosirea reprezentărilor cvasiconforme.

Dată o clasă de reprezentări cvasiconforme se numește *reprezentare cvasiconformă extremală* o reprezentare care realizează minimul dilatării maxime în acea clasă. Pentru prima dată reprezentări cvasiconforme extremale au fost determinate de H. Grötzsch, care în 1928 a introdus noțiunea de reprezentare cvasiconformă [22]. Aprofundînd legătura dintre reprezentările cvasiconforme și diferențialele pătratice, Teichmüller a dezvoltat teoria generală a reprezentărilor cvasiconforme extremale, pe care le-a aplicat în diferite domenii de teoria funcțiilor, printre care și problema modulelor.

Vom demonstra că în fiecare clasă de omotopie formată de omeomorfisme $f : R^0 \to R$, care păstrează orientarea, există o unică reprezentare cvasiconformă extremală, *reprezentarea Teichmüller*, (definită cu ajutorul a două diferențiale pătratice pe R^0 respectiv R), avînd cîtul de dilatare constant și exprimîndu-se cu ajutorul unor parametri locali (asociați diferențialelor) printr-o transformare afină, (în fiecare punct, care nu este un zero pentru diferențiale), (teorema 4.1, Cap. IV, teorema 4.2, Cap. V).

În acest scop, vom construi un omeomorfism al bulei unitate din E_{6g-6} pe $\mathbf{C}(\mathbf{T}_g)$, de unde va rezulta că $\mathbf{T}_g$ este omeomorf cu E_{6g-6}, (Cap. V, § 4).

Tot cu ajutorul reprezentării Teichmüller vom defini distanța Teichmüller organizînd $\mathbf{T}_g$ ca spațiu metric, [11].

În încheiere prezentăm cazurile particulare $g = 0$ și $g = 1$, (Cap. V, § 5, pct. 2).

Capitolul I

Elemente din teoria omotopiei

§ 1. Grupul fundamental

1. Fie X şi X' două spaţii topologice, iar I segmentul $[0, 1]$.

Două aplicaţii continue $f_k : X \to X'$, $k = 0,1$, se numesc *omotope*, dacă există o aplicaţie continuă $F : X \times I \to X'$, unde $X \times I$ este spaţiul topologic produs al lui X şi I, astfel încît $F(p, 0) = f_0(p)$ şi $F(p, 1) = f_1(p)$, oricare ar fi punctul $p \in X$ ([45], *p.* 121).

Se spune în acest caz că aplicaţia F defineşte o deformare omotopă (o *deformare continuă* sau o *omotopie*) a lui f_0 în f_1. A da această aplicaţie este echivalent cu a da familia de aplicaţii continue $f_t : X \to X'$, $t \in I$, definită prin relaţia $f_t(p) = F(p, t)$, $p \in X$, depinzînd continuu de parametrul $t \in I$ şi punctul $p \in X$, care pentru $t = 0$ şi $t = 1$ se reduc la f_0 respectiv f_1 [1]).

Se verifică imediat propoziţiile :

PROPOZIŢIA 1.1. *Omotopia a două aplicaţii continue $X \to X'$ este o relaţie de echivalenţă.*

Mulţimea aplicaţiilor continue ale lui X în X' se împarte astfel în *clase de aplicaţii omotope* şi vom nota mulţimea acestor clase cu $\pi(X, X')$. Stabilirea condiţiilor în care două aplicaţii continue $X \to X'$ sînt omotope şi determinarea lui $\pi(X, X')$ sînt probleme importante ale topologiei ([25], p. 20).

PROPOZIŢIA 1.2. *Dacă X, X' şi X'' sînt trei spaţii topologice, iar $f_k : X \to X'$ respectiv $g_k : X' \to X''$, $k = 0,1$, sînt aplicaţii continue omotope, atunci $g_k \circ f_k : X \to X''$, $k = 0, 1$, sînt de asemenea aplicaţii omotope* [2]).

În cele ce urmează, vom nota aplicaţia identică a unui spaţiu topologic X în el însuşi cu 1_X.

Dacă aplicaţia continuă $f : X \to X$ este omotopă cu 1_X, vom spune că este omotopă cu identitatea.

---

[1]) Dacă f_t sînt omeomorfisme oricare ar fi $t \in I$, deformarea se numeşte izotopă.

[2]) În particular, dacă $g_k = g$ (respectiv $f_k = f$), $k = 0, 1$, rezultă că $g \circ f_k$ (respectiv $g_k \circ f$) sînt omotope. Se verifică uşor că $\pi(X, X')$ este un functor de două variabile, contravariant în X şi covariant în X', de la categoria spaţiilor topologice, avînd ca morfisme aplicaţiile continue în categoria mulţimilor, cu morfisme aplicaţiile.

Vom numi aplicație constantă o aplicație continuă $h : X \to X'$, prin care $h(p) = p_0$, pentru orice $p \in X$, p_0 fiind un punct fix, dar arbitrar din X'. Dacă 1_X este omotopă cu o aplicație constantă $h : X \to X$, spațiul X se numește *contractibil.*

2. Un drum (continuu) λ pe spațiul topologic X este dat de o aplicație continuă f a segmentului $I = [0, 1]$ în $X : p = f(\tau)$, $\tau \in I$ și $p \in X$, determinată abstracție făcînd de un omeomorfism al lui I pe el însuși. Dacă $\tau_1 = h(\tau)$ este un omeomorfism surjectiv $I \to I$, prin definiție drumul λ_1, dat de aplicația continuă $f_1 = f \circ h^{-1}$ a lui I în X, coincide cu λ.

Drumul λ se numește *închis*, dacă $f(0) = f(1)$.

Fie X și X' spații topologice, λ un drum pe X definit de $f : I \to X$ și g o aplicație continuă a subspațiului topologic $f(I)$ din X, în X'. Convenim să notăm cu $g(\lambda)$ drumul continuu pe X' dat de $g \circ f : I \to X'$ și să-l numim *drumul imagine* a lui λ prin g.

Definim *compunerea* sau *produsul* $\lambda_1 \lambda_2$ a două drumuri λ_k, date de $f_k : I \to X$ $(k = 1, 2)$, cu proprietatea $f_1(1) = f_2(0)$, ca fiind drumul corespunzător aplicației continue $f : I \to X$, unde

$$f(\tau) = \begin{cases} f_1(2\tau) \text{ pentru } 0 \leqslant \tau \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ f_2(2\tau - 1) \text{ pentru } \dfrac{1}{2} \leqslant \tau \leqslant 1. \end{cases}$$

Numim *drum invers* al drumului λ dat de $f : I \to X$, drumul λ^{-1} definit de $f^* : I \to X$, unde

$$f^*(\tau) = f(1 - \tau),$$

și *drum nul*, orice drum λ definit de o aplicație constantă : $f(\tau) = p_0$, pentru $\tau \in I$ și p_0 un punct fix, dar arbitrar din X.

Două drumuri α_k, definite de $f_k : I \to X$, $k = 0, 1$, cu aceeași origine și cu aceeași extremitate : $f_0(0) = f_1(0)$ și $f_0(1) = f_1(1)$, se numesc *omotope*, dacă aplicațiile f_k sînt omotope și aplicațiile f_t, $t \in I$, care realizează deformarea continuă a lui f_0 în f_1 definesc drumuri α_t cu aceleași extremități ca și α_k. Prin urmare, drumurile α_k sînt omotope dacă există o aplicație continuă $F : I \times I \to X$, $p = F(\tau, t)$ cu proprietățile :

a) $F(\tau, k) = f_k(\tau)$, oricare ar fi $\tau \in I$ și $k = 0, 1$;

b) pentru orice $t \in I$, $F(0, t) = f_0(0)$ și $F(1, t) = f_1(0)$ [3]).

Un drum omotop cu drumul nul se numește *nul-omotop.*

Fie p un punct din X. Împărțind drumurile închise cu originea p în clase de echivalență față de relația de omotopie, vom nota clasa drumului α cu $[\alpha]_p$.

[3]) Drumul α_t este definit de $f_t(\tau) = F(\tau, t)$. În cele ce urmează vom aplica numai deformări cu extremități fixe de tipul descris mai sus ; se folosesc însă și deformări cu extremități libere : atunci α_k se numesc *omotope*, dacă f_k sînt omotope, $k = 0, 1$ ([39] p. 52 și 93).

Se verifică uşor :

PROPOZIŢIA 1.3. *Clasele de drumuri închise cu originea în punctul* p, *omotope între ele, formează un grup faţă de următoarea lege de compunere*

$$[\alpha]_p\,[\beta]_p = [\alpha\beta]_p,$$

unde α *şi* β *sînt drumuri închise cu originea* p.

Acest grup va fi notat $\pi_1(X, p)$ şi se numeşte *grupul fundamental* (*grupul lui Poincaré*) *al lui* X *relativ la* p.

3. Spaţiul topologic X se numeşte *conex prin arce* (*liniar conex*), dacă oricare ar fi două puncte p şi q din X, ele se pot uni printr-un drum pe X (i. e. există aplicaţia continuă $f : I \to X$, cu $f(0) = p$ şi $f(1) = q$). Aceste spaţii constituie un cadru natural de aplicaţie pentru propoziţiile ce urmează în acest paragraf.

PROPOZIŢIA 1.4. *Dacă* p *şi* q *sînt două puncte din spaţiul topologic* X, *care se pot uni printr-un drum pe* X, *atunci* $\pi_1(X, p)$ *şi* $\pi_1(X, q)$ *sînt izomorfe. În particular, dacă* X *este liniar conex, oricare ar fi* p *şi* q *din* X, *proprietatea are loc.*

Într-adevăr, fie γ un drum pe X cu originea q şi extremitatea p. Aplicaţia ω, care asociază fiecărei clase $[\alpha]_p$ clasa $[\gamma\,\alpha\,\gamma^{-1}]_q$, este un izomorfism al lui $\pi_1(X, p)$ pe $\pi_1(X, q)$.

Un izomorfism ω al grupului $\pi_1(X, p)$ pe grupul $\pi_1(X, q)$ se numeşte *permis*, dacă există un drum γ cu originea q şi extremitatea p, astfel încît :

$$\omega([\alpha]_p) = [\gamma\,\alpha\,\gamma^{-1}]_q,$$

oricare ar fi drumul închis α cu originea p.

PROPOZIŢIA 1.5. *Orice automorfism interior al grupului* $\pi_1(X, p)$ *este izomorfism permis şi reciproc orice automorfism permis al lui* $\pi_1(X, p)$ *este interior.*

Cu ajutorul izomorfismelor permise se introduce următoarea *echivalenţă între omomorfismele grupurilor fundamentale a două spaţii topologice* X *şi* X' :

Fie $\lambda : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X', p')$ şi $\mu : \pi_1(X, q) \to \pi_1(X', q')$, două omomorfisme ale grupurilor fundamentale indicate, p, q, p' şi q' fiind puncte arbitrare din X respectiv X'. Se spune că λ şi μ sînt *echivalente*, dacă există izomorfismele permise ω şi ω', astfel încît următoarea diagramă să fie comutativă :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, p) & \xrightarrow{\lambda} & \pi_1(X', p') \\ {\scriptstyle\omega}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\omega'} \\ \pi_1(X, q) & \xrightarrow{\mu} & \pi_1(X', q') \end{array} \tag{1.1}$$

4. Am asociat spaţiului topologic X un grup fundamental relativ la fiecare punct $p \in X$, grupul $\pi_1(X, p)$.

Fie X *liniar conex.* Aceste grupuri sînt izomorfe între ele prin izomorfisme permise, deci definesc un grup abstract, pe care îl vom nota cu $\pi_1(X)$ și îl vom numi *grupul fundamental al lui* X. Evident, $\pi_1(X)$ este un *invariant topologic* asociat spațiului X.

Dacă $\pi_1(X)$ se reduce la elementul unitate, spațiul X se numește (*omotop*) *simplu conex* ([45], p. 230 ; [25], p. 62). Pentru ca X să fie simplu conex, este necesar și suficient ca orice două drumuri din X cu aceleași extremități să fie omotope. Condiția este evident suficientă, astfel încît schițăm numai demonstrația necesității ei : Fie α' și α'' două drumuri cu aceleași extremități. Drumul $\alpha'\ \alpha''^{-1}$ este un drum închis de pe X, deci este nul-omotop. Atunci $(\alpha'\ \alpha''^{-1})\ \alpha''$ este omotop cu α'' și cum $\alpha'\ (\alpha''^{-1}\ \alpha'')$ este omotop cu α', rezultă că α' este omotop cu α''.

Un spațiu contractibil este evident omotop simplu conex.

Să alegem un punct $p_0 \in X$, un izomorfism $i_{p_0} : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(X)$ și pentru fiecare punct $p \in X$ un izomorfism permis $\omega_{pp_0} : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, p_0)$. Să notăm cu $i_p = i_{p_0} \circ \omega_{pp_0} : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X)$. Se verifică imediat

Propoziția 1.6. *Orice izomorfism permis* $\omega : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, q)$ *induce un automorfism interior* $\Omega = i_q \circ \omega \circ i_p^{-1} : \pi_1(X) \to \pi_1(X)$ *și reciproc, dacă* Ω *este un automorfism interior* : $\pi_1(X) \to \pi_1(X)$, *atunci* $\omega = i_q^{-1} \circ \Omega \circ i_p$ *este un izomorfism permis.*

Fie X' un alt spațiu topologic liniar conex și izomorfismele $i'_{p'} : \pi_1(X', p') \to \pi_1(X')$, $p' \in X'$, definite ca mai sus.

Propoziția 1.7. *Orice omomorfism* $\lambda : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X', p')$ *induce un omomorfism* $\Lambda = i'_{p'} \circ \lambda \circ i_p^{-1} : \pi_1(X) \to \pi_1(X')$.

Evident, înlocuind izomorfismele i_p respectiv $i'_{p'}$ prin alte izomorfisme j_p respectiv $j'_{p'}$, astfel încît $j_p^{-1} \circ i_p$ și $j'^{-1}_{p'} \circ i'_{p'}$ să fie izomorfisme permise, transformăm Λ într-un omomorfism $M : \pi_1(X) \to \pi_1(X')$, dedus din Λ printr-un automorfism interior al lui $\pi_1(X')$.

Propoziția 1.8. *Dacă* $\lambda : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X', p')$ și $\mu : \pi_1(X, q) \to \pi_1(X', q')$ *sînt echivalente, atunci omomorfismele* $\Lambda = i'_{p'} \circ \lambda \circ i_p^{-1}$ *și* $M = i'_{q'} \circ \mu \circ i_q^{-1}$ *de la* $\pi_1(X)$ *în* $\pi_1(X')$ *diferă prin automorfisme interioare și reciproc.*

Aceasta rezultă din faptul că diagrama (1.1) și diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
\pi_1(X) & \xrightarrow{\Lambda} & \pi_1(X') \\
\Omega \downarrow & & \downarrow \Omega' \\
\pi_1(X) & \xrightarrow{M} & \pi_1(X')
\end{array}
\qquad (1.1')
$$

unde $\Omega = i_q \circ \omega \circ i_p^{-1}$ și $\Omega' = i'_{q'} \circ \omega' \circ i'^{-1}_{p'}$, sînt simultan comutative sau nu, iar Ω și Ω' sînt automorfisme interioare.

5. Teorema 1.1. *Fie* X *și* $\tilde{X}$ *două spații topologice,* $\tilde{p}$ *un punct arbitrar dar fixat din* $\tilde{X}$, f *o aplicație continuă a lui* $\tilde{X}$ *în* X *și* $p = f(\tilde{p})$.

1° *f induce un omomorfism* $f_{\tilde{p}} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{p}) \to \pi_1(X, p)$.

2°. *Dacă punctul* $\tilde{q} \in \tilde{X}$ *se poate uni cu* $\tilde{p}$ *printr-un drum pe* $\tilde{X}$, *atunci omomorfismele* $f_{\tilde{p}}$ *și* $f_{\tilde{q}}$ *sînt echivalente.*

3°. *În ipoteza de la punctul 2°, grupurile* $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}} = f[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{p})]$ *și* $\mathcal{G}_{f_{\tilde{q}}} = f[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{q})]$ *sînt izomorfe. Dacă* $f(\tilde{q}) = p$, *atunci* $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$ *și* $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$ *sînt subgrupuri conjugate în* $\pi_1(X, p)$. *Ele coincid dacă și numai dacă există un drum* $\tilde{\gamma}$ *pe* $\tilde{X}$ *cu originea* $\tilde{q}$ *și extremitatea* $\tilde{p}$, *astfel încît* $[f(\tilde{\gamma})]_p$ *să aparțină normalizatorului* $\mathcal{N}_{f_{\tilde{p}}}$ *al lui* $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$ *în* $\pi_1(X, p)$. *Mai mult, existența unui drum* $\tilde{\gamma}_1$, *unind* $\tilde{q}$ *cu* $\tilde{p}$ *pe* $\tilde{X}$, *pentru care* $[f(\tilde{\gamma})]_p \in \mathcal{N}_{f_{\tilde{p}}}$, *implică relația* $[f(\tilde{\gamma}_1)]_p \in \mathcal{N}_{f_{\tilde{p}}}$, *oricare ar fi drumul* $\tilde{\gamma}_1$ *pe* $\tilde{X}$ *cu originea* $\tilde{q}$ *și extremitatea* $\tilde{p}$.

4°. *Dacă f este un omeomorfism surjectiv, atunci* $f_{\tilde{p}}$ *este un izomorfism al lui* $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{p})$ *pe* $\pi_1(X, p)$.

1°. Fie $\tilde{\alpha}$ un drum închis pe $\tilde{X}$ cu originea $\tilde{p}$. Definim $f_{\tilde{p}}$ punînd

$$f_{\tilde{p}}([\tilde{\alpha}]_{\tilde{p}}) = [f(\tilde{\alpha})]_{f(\tilde{p})}. \tag{1.2}$$

Această definiție are sens : dacă $\tilde{\beta} \in [\tilde{\alpha}]_{\tilde{p}}$, deci $\tilde{\alpha}$ și $\tilde{\beta}$ sînt omotope, atunci $f(\tilde{\alpha})$ și $f(\tilde{\beta})$ sînt de asemenea omotope. Se verifică imediat că aplicația $f_{\tilde{p}} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{p}) \to \pi_1(X, p)$ este un omomorfism. Nucleul acestui omomorfism este dat de subgrupul claselor $[\tilde{\alpha}]_{\tilde{p}}$, pentru care $f(\tilde{\alpha})$ este nulomotop.

2°. Fie $\tilde{\gamma}$ un drum arbitrar pe $\tilde{X}$, unind $\tilde{q}$ cu $\tilde{p}$, $f(\tilde{\gamma})$ drumul imagine pe X și $\tilde{\omega}$ respectiv ω izomorfismele permise corespunzătoare lui $\tilde{\gamma}$ și $f(\tilde{\gamma})$. Dacă $[\tilde{\alpha}]_{\tilde{p}}$ este o clasă arbitrară din $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{p})$ și $q = f(\tilde{q})$, atunci

$$(\omega \circ f_{\tilde{p}})\ [\sim]_{\tilde{p}} = \omega([f(\sim)]_p) = [f(\tilde{\gamma})\ f(\tilde{\alpha})\ f(\tilde{\gamma})^{-1}]_q$$

și

$$(f_{\tilde{q}} \circ \tilde{\omega})\ [\tilde{\alpha}]_{\tilde{p}} = f_{\tilde{q}}([\tilde{\gamma}\ \tilde{\alpha}\ \tilde{\gamma}^{-1}]_q) = [f(\tilde{\gamma}\ \tilde{\alpha}\ \tilde{\gamma}^{-1})]_q,$$

deci $\omega \circ f_{\tilde{p}} = f_{\tilde{q}} \circ \tilde{\omega}$, ceea ce demonstrează echivalența omomorfismelor $f_{\tilde{p}}$ și $f_{\tilde{q}}$.

3°. În ipoteza $p = q$, drumul $f(\tilde{\gamma})$ este închis, ω este un automorfism interior și cum $[\tilde{\alpha}]_{\tilde{p}}$ este un element arbitrar din $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{p})$, egalitatea stabilită la punctul 2° implică

$$[f(\tilde{\gamma})]_{\tilde{p}}\ \mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}\ [f(\tilde{\gamma})]_p^{-1} = \mathcal{G}_{f_{\tilde{q}}}, \tag{1.3}$$

de unde rezultă 3°. Se observă totodată că pentru orice subgrup $\mathcal{G}$ conjugat cu $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$ în $\pi_1(X, p)$, există un punct $\tilde{q}$ din $f^{-1}(p)$, astfel încît $\mathcal{G}_{f_{\tilde{q}}} = \mathcal{G}$. Într-adevăr, dacă $\mathcal{G} = [\beta]_p\ \mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}\ [\beta]_p^{-1}$, cu $[\beta]_p \in \pi_1(X, p)$, putem lua $\tilde{q}$ extremitatea drumului $\tilde{\beta}^{-1}$, transportatul lui β^{-1} din punctul $\tilde{p}$.

4°. Dacă f este omeomorfism surjectiv și notăm cu f^{-1} omeomorfismul invers : $X \to \widetilde{X}$, atunci $f_{\tilde{p}}$ și $(f^{-1})_p$ sînt omomorfisme inverse unul altuia, deci $f_{\tilde{p}}$ este izomorfism surjectiv [4]).

Observația 1.1. Enunțul teoremei 1.1, punctele 2° și 3°, se simplifică în ipoteza $\widetilde{X}$ liniar conex. În acest caz, dacă aplicația continuă f este surjectivă, rezultă că X este liniar conex.

Observația 1.2. Aplicația identică 1_X induce izomorfismul identic $1_{\pi_1(X,p)}$.

PROPOZIȚIA 1.9. *Fie* $\tilde{f} : X^* \to \widetilde{X}$ *și* $f : \widetilde{X} \to X$ *două aplicații continue între spațiile topologice* X^*, $\widetilde{X}$ *și* X, p^* *un punct din* X^*, $\tilde{p} = \tilde{f}(p^*)$ *și* $p = f(\tilde{p})$. *Atunci, folosind notațiile de mai sus,*

$$(f \circ \tilde{f})_{p^*} = f_{\tilde{p}} \circ \tilde{f}_{p^*} \tag{1.4}$$

și deci

$$\mathcal{G}_{(f\circ\tilde{f})_{p^*}} \subset \mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}} \subset \pi_1(X, p). \tag{1.5}$$

Dacă $[\alpha^*]_{p^*} \in \pi_1(X^*, p^*)$, putem scrie

$$(f\circ\tilde{f})_{p^*}([\alpha^*]_{p^*}) = [f(\tilde{f}(\alpha^*))]_p = f_{\tilde{p}}([\tilde{f}(\alpha^*)]_{\tilde{p}}) = (f_{\tilde{p}} \circ \tilde{f}_{p^*})([\alpha^*]_{p^*}),$$

ceea ce demonstrează (1.4). Cum $\mathcal{G}_{\tilde{f}_{p^*}} \subset \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{p})$, aplicînd $f_{\tilde{p}}$ și ținînd seama de (1.4), deducem (1.5) [5]).

Cu ajutorul grupului fundamental abstract și propozițiilor 1.7 și 1.8, teorema 1.1 ia forma următoare :

TEOREMA **1.1'**. *O aplicație continuă (un omomorfism surjectiv)* $f : \widetilde{X} \to X$, $\widetilde{X}$ *și* X *spații topologice liniar conexe, induce un omomorfism (izomorfism surjectiv)* $F : \pi_1(\widetilde{X}) \to \pi_1(X)$, *determinat pînă la un automorfism interior al grupului* $\pi_1(X)$.

§ 2. Acoperiri

1. Numim *acoperire* un triplet $(\widetilde{X}, f, X)$, unde $\widetilde{X}$ și X sînt două spații topologice, iar f o aplicație continuă a lui $\widetilde{X}$ și X. Numim : X spațiul de bază, $\widetilde{X}$ spațiul de acoperire, f proiecția și $f^{-1}(p)$ fibra punctului $p \in X$.

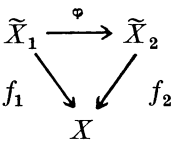
---

[4]) Dacă f nu este surjectiv, $f_{\tilde{p}}$ poate să nu fie izomorfism. De exemplu : $\widetilde{X}$ — coroana circulară $r_1 < |\widetilde{p}| < r_2$; X — planul ; f — aplicația de incluziune $f : p = \widetilde{p}$; $\widetilde{p}_0 \in \widetilde{X}$; $\tilde{\alpha}$ — drumul obținut descriind o dată în sens direct $|\widetilde{p}| = |\widetilde{p}_0|$ și $\widetilde{\beta}$ — drumul nul cu originea $\widetilde{p}_0$; atunci $[\tilde{\alpha}]_{\tilde{p}_0} \neq [\widetilde{\beta}]_{\tilde{p}_0}$, dar $[f(\tilde{\alpha})]_{p_0} = [f(\widetilde{\beta})]_{p_0}$.

[5]) Teorema 1.1, observația 1.2 și propoziția 1.9 pun în evidență un functor covariant $\mathcal{F}$ de la categoria ale cărei obiecte sînt perechi (X, p) cu X-spațiu topologic și p punct din X și ale cărei morfisme $(\widetilde{X}, \widetilde{p}) \to (X, p)$ sînt aplicații continue $f : \widetilde{X} \to X$ cu $f(\widetilde{p}) = p$, în categoria grupurilor cu morfisme-omomorfismele : $\mathcal{F}[(X, p)] = \pi_1(X, p)$ și $\mathcal{F}(f) = f_{\tilde{p}}$.

Două acoperiri cu aceeași bază $(\widetilde{X}_k, f_k, X)$, $k = 1, 2$, sînt prin definiție *egale*, dacă există un omeomorfism surjectiv $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$, care face comutativă diagrama [6])

(2.1)



Opera lui S. Stoilow a contribuit hotărîtor la dezvoltarea teoriei acoperirilor. Lui i se datorește noțiunea de acoperire riemanniană (numită clasic suprafață riemanniană de acoperire) : acoperire $(\widetilde{X}, f, X)$, unde X este o suprafață riemanniană, $\widetilde{X}$ este o suprafață, iar f o transformare interioară (continuă, deschisă și 0-dimensională) ([41]; [40], Cap. VII).

Un rol deosebit în cele ce urmează îl au *acoperirile neramificate* — numite și etalări — acoperiri $(\widetilde{X}, f, X)$ pentru care f este un omeomorfism local (orice punct $\widetilde{p} \in \widetilde{X}$ are o vecinătate [7]) $\widetilde{v}$, care este reprezentată omeomorf de f pe un deschis v din X). Evident, f este o *transformare interioară* :

a) Prin definiție, f este *continuă*.

b) Fie $\widetilde{O}$ o mulțime deschisă din $\widetilde{X}$ și $\widetilde{p}$ un punct din $\widetilde{O}$. Prin ipoteză, există vecinătatea $\widetilde{v}$ reprezentată topologic de f pe imaginea sa v, vecinătatea lui $p = f(\widetilde{p})$. Cum $p \in f(\widetilde{O} \cap \widetilde{v}) \subset f(\widetilde{O})$, rezultă că $f(\widetilde{O})$ este un deschis din X și f este *deschisă*.

c) Oricare ar fi punctul $p \in f(\widetilde{X})$ și $\widetilde{p} \in f^{-1}(p)$, există vecinătatea $\widetilde{v}$ a lui $\widetilde{p}$ din $\widetilde{X}$, astfel încît $\{\widetilde{p}\} = \widetilde{v} \cap f^{-1}(p)$. Prin urmare, dacă $p \in X$ sau $f^{-1}(p) = \varnothing$ sau $f^{-1}(p)$ este o mulțime de puncte izolate, iar f este 0-*dimensională* (i.e. nu transformă nici un continuu nedegenerat într-un punct). Dacă X este spațiu separat, sau mai general satisface axioma T_1 de separație, fibra $f^{-1}(p)$ nu are punct de acumulare în $\widetilde{X}$.

2.1. Fie $(\widetilde{X}, f, X)$ o acoperire neramificată, λ un drum pe X, definit de $\varphi : I \to X$, cu originea $p = \varphi(0)$ și $\widetilde{p}$ un punct din $f^{-1}(p)$. A *transporta* (sau *ridica*) drumul λ pe $\widetilde{X}$ în punctul $\widetilde{p}$ înseamnă a da un drum $\widetilde{\lambda}$ pe $\widetilde{X}$ cu originea $\widetilde{p}$, astfel încît $f(\widetilde{\lambda}) = \lambda$.

Transportul unui drum se poate realiza printr-un procedeu analog cu prelungirea analitică în lungul unui drum ([39], p. 115). Fie $\widetilde{v}$ o vecinătate a lui $\widetilde{p}$, reprezentată topologic de f pe vecinătatea v a lui p. Dacă $\lambda \subset v$, atunci $\widetilde{\lambda} = (f|_{\widetilde{v}})^{-1}(\lambda)$, unde $(f|_{\widetilde{v}})^{-1}$ este omeomorfismul invers

[6]) Acoperirile unui spațiu X sînt obiectele unei categorii, a căror morfisme $(\widetilde{X}_1, f_1, X) \to (\widetilde{X}_2, f_2, X)$ sînt aplicații continue $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$, ce fac comutativă diagrama (2.1). Egalitatea acoperirilor definită mai sus este izomorfismul a două obiecte din această categorie.

[7]) Prin vecinătate a unui punct convenim să înțelegem un deschis, care conține punctul, exceptînd cazul cînd vom indica contrariul.

restricției $f|_{\tilde{v}}$ a lui f la $\tilde{v}$. În cazul contrar că notăm $a = \sup_{t \in (0,1)} t$ astfel încît drumul λ_t definit de $\varphi_t(\tau) = \varphi(t\,\tau) : I \to X$ să fie inclus în v și să luăm $a' \in (0, a)$. Drumul $\lambda_{a'}$ se transportă din $\tilde{p}$ în drumul $\tilde{\lambda}_{a'} = (f|_{\tilde{v}})^{-1}(\lambda_{a'})$ și are extremitatea $\tilde{p}_{a'} = (f|_{\tilde{v}}^{-1} \circ \varphi)(a')$. Lui $\tilde{p}_{a'}$ i se aplică din nou procedeul : se ia o vecinătate $\tilde{v}_{a'}$, pe care f o reprezintă topologic pe $v_{a'}$ și dacă drumul $\mu_{a'}$ dat de $g(\tau) = \varphi[(1 - a')\,\tau + a']$, $\tau \in I$, (porțiunea din λ cuprinsă între punctele $p_{a'} = \varphi(a')$ și $p_1 = \varphi(1)$), este inclus în $v_{a'}$, îl transportăm în drumul $\tilde{\mu}_{a'} = (f|_{\tilde{v}_{a'}})^{-1}(\mu_{a'})$, iar drumul $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_{a'}\,\tilde{\mu}_{a'}$ este transportatul lui λ din punctul $\tilde{p}$. În cazul contrar, definim $b = \sup_{t \in (a', 1)} t$, astfel încît drumul $\lambda_{a',t}$: $g_{a',t}(\tau) = \varphi[(t - a')\,\tau + a']$, $\tau \in I$, să fie inclus în $v_{a'}$ și alegem $b' \in (a', b)$. Dacă notăm $\tilde{\lambda}_{a'b'} = (f|_{\tilde{v}_{a'}})^{-1}(\lambda_{a'b'})$, drumul $\tilde{\lambda}_{b'} = \tilde{\lambda}_{a'}\,\tilde{\lambda}_{a'b'}$ transportă drumul $\lambda_{b'}$ din $\tilde{p}$. Procedeul continuă, conducînd fie la un drum $\tilde{\lambda}$, transportatul lui λ din $\tilde{p}$, fie la un interval $I_0 = [0, t_0) = [\,0, a) \cup [a', b) \cup \ldots$, astfel încît pentru orice $t \in I_0$, λ_t se transportă într-un drum $\tilde{\lambda}_t$ din $\tilde{p}$. În acest caz spunem că transportul drumului λ din $\tilde{p}$ nu este posibil.

Propoziția 2.1. *Fie $\tilde{X}$ un spațiu topologic separat și $(\tilde{X}, f, X)$ o acoperire neramificată. Dacă transportul unui drum λ de pe X într-un punct $\tilde{p} \in \tilde{X}$ este posibil, atunci $\tilde{\lambda}$ este unic determinat.*

Fie $\tilde{\lambda}_k$, $k = 1, 2$, două drumuri date de $\varphi_k : I \to \tilde{X}$ cu originea $\tilde{p}$ și proiecția $f(\tilde{\lambda}_k) = \lambda$. Deoarece drumurile $f(\tilde{\lambda}_k)$ coincid, există omeomorfismul ψ al lui I pe I, $\tau = \psi(t)$, astfel încît $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2 \circ \psi$. Fie $I_1 = \{t \mid t \in I, \varphi_1(t) = \varphi_2 \circ \psi(t)\}$. Mulțimea I_1 nu este vidă, deoarece conține punctul $t = 0$, ea este deschisă relativ la I, f fiind omeomorfism local, și închisă, φ_1 și $\varphi_2 \circ \psi$ fiind continue iar $\tilde{X}$ spațiu separat ; prin urmare, $I_1 = I$ și $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$.

Observația 2.1. Condiția $\tilde{X}$ spațiu separat asigură deci unicitatea transportului drumurilor pentru acoperiri neramificate. Iată un exemplu de acoperire neramificată, în care $\tilde{X}$ nu este separat și transportul nu este unic : Fie X planul complex, $\tilde{X}$ spațiul topologic ([45], p. 256) format luînd suma topologică a două plane și identificînd punctele de aceleași coordonate, dacă au ordonata negativă, iar f aplicația ce asociază fiecărui punct $\tilde{p} \in \tilde{X}$, punctul $p \in X$ de aceleași coordonate. Spațiul $\tilde{X}$ nu este separat, dar este local euclidian 2-dimensional și conex. Drumul $\lambda : z = (2t - 1)\,i$, $t \in I$, de pe X se ridică din punctul corespunzător lui $-i$ de pe $\tilde{X}$ prin 2 drumuri. Totodată acoperirea $(\tilde{X}, 1_{\tilde{X}}, \tilde{X})$ este un exemplu în care, deși $\tilde{X}$ nu este separat, transportul este unic.

2.2. Vom numi acoperiri *cu transport unic*, acoperirile pentru care transportul este univoc, *atunci cînd este posibil* și vom stabili două proprietăți ale acoperirilor neramificate de acest fel :

Propoziția 2.2. *Dacă $(\tilde{X}_1, f_1, X)$ este o acoperire neramificată cu transport unic, $\tilde{X}_1$ este liniar conex, iar $(\tilde{X}_2, f_2, X)$ este o acoperire egală cu*

$(\tilde{X}_1, f_1, X)$, *omeomorfismul* (2.1) $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, *care stabilește egalitatea, este unic determinat de o pereche de puncte corespondente.*

Fie $\tilde{p}_k$ o pereche de puncte astfel încît $\varphi(\tilde{p}_1) = \tilde{p}_2$ și $\tilde{q}_1$ un punct arbitrar din $\tilde{X}_1$, iar $\tilde{\lambda}_1$ un drum ce unește pe $\tilde{X}_1$ punctele $\tilde{p}_1$ și $\tilde{q}_1$. Drumul $\lambda = f_1(\tilde{\lambda}_1)$ se poate transporta în $\tilde{p}_2$, deoarece există $\varphi(\tilde{\lambda}_1)$ cu $f_2 \circ \varphi(\tilde{\lambda}_1) = \lambda$. Prin urmare $\tilde{q}_2 = \varphi(\tilde{q}_1)$ este unic determinat ca extremitate a drumului $\tilde{\lambda}_2$, transportatul lui λ în $\tilde{p}_2$.

2.3. Este evident că, oricare ar fi acoperirea $(\tilde{X}, f, X)$, două drumuri omotope pe $\tilde{X}$ se proiectează în drumuri omotope pe X. Invers, se demonstrează

Propoziția 2.3. *Fie $(\tilde{X}, f, X)$ o acoperire neramificată cu transport unic, α_0 și α_1 două drumuri omotope cu aceleași extremități a și b pe X, α_t drumurile unei deformări continue a lui α_0 în α_1, $t \in I$ și $\tilde{a}$ un punct din $f^{-1}(a)$, astfel încît orice drum α_t se transportă într-un drum $\tilde{\alpha}_t$ din $\tilde{a}$. Atunci drumurile $\tilde{\alpha}_t$ au aceeași extremitate $\tilde{b}$ și constituie o deformare continuă a lui $\tilde{\alpha}_0$ în $\tilde{\alpha}_1$.*

Să notăm $F(\tau, t)$ aplicația continuă : $I \times I \to X$, care realizează deformarea continuă a lui α_0 în α_1 prin drumurile α_t : $F(0, t) = a, F(1, t) = b$, iar $p = F(\tau, t)$, pentru t fix, este drumul α_t. Cum orice drum α_t se transportă din $\tilde{a}$ în drumul $\tilde{\alpha}_t$, pentru fiecare $t \in I$ există o aplicație continuă $I \to \tilde{X}$, care reprezintă acest drum și pe care o vom nota $\tilde{p} = \tilde{F}(\tau, t)$; ea are proprietatea $f \circ \tilde{F} = F$. Am definit astfel o aplicație $\tilde{p} = \tilde{F}(\tau, t)$: $I \times I \to \tilde{X}$. Pentru a demonstra că $\tilde{F}(\tau, t)$ este continuă într-un punct $(\tau_0, t_0) \in I \times I$, să ținem seama că $\tilde{F}(\tau, t_0)$ este o aplicație continuă și că orice punct din $\tilde{\alpha}_{t_0}$ are o vecinătate $\tilde{v}$, pe care f o reprezintă topologic pe v din X. Putem alege deci o diviziune $0 = \tau^0 < \tau^1 < \ldots < \tau^n = 1$ a lui I, astfel încît fiecare interval $[\tau^k, \tau^{k+1}]$, $(k = 0, \ldots, n-1)$, să fie reprezentat prin aplicația $\tilde{p} = \tilde{F}(\tau, t_0)$ într-o vecinătate $\tilde{v}$ de mai sus, fie $\tilde{v}^k$, iar punctul τ_0 să aparțină unui interval deschis $(\tau^{k_0}, \tau^{k_0+1})$, exceptînd cazurile $\tau_0 = 0$ sau 1. Din continuitatea aplicației $F(\tau, t)$ rezultă existența unui număr $\varepsilon > 0$, astfel încît oricare ar fi punctul (τ, t) de coordonate $\tau \in [\tau^k, \tau^{k+1}]$, $t \in I \cap [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, punctul $F(\tau, t)$ să aparțină lui $v^k = f(\tilde{v}^k)$. Să arătăm că în aceleași condiții pentru τ și t, $\tilde{F}(\tau, t) \in \tilde{v}^k$. În acest scop, notăm cu α_t^k și $\tilde{\alpha}_t^k$ drumul dat de $F(\tau, t)$ respectiv $\tilde{F}(\tau, t)$, pentru t fix din $I \cap [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ și $\tau \in [\tau^k, \tau^{k+1}]$ la o normare evidentă a parametrului τ [8]). Cum $f(\tilde{\alpha}_t^k) = \alpha_t^k$, drumul $\tilde{\alpha}_t^k$ reprezintă transportatul lui α_t^k din punctul $\tilde{F}(\tau^k, t)$. Dacă vom demonstra că $\tilde{F}(\tau^k, t) \in \tilde{v}^k$, va rezulta $\tilde{\alpha}_t^k \subset \tilde{v}^k$, (deoarece $f|_{\tilde{v}^k}$ este biunivocă, $(f|_{\tilde{v}^k})^{-1}(\alpha_t^k) \subset \tilde{v}^k$ va fi de asemenea transportatul lui α_t^k din $\tilde{F}(\tau^k, t)$ și transportarea este unică). Pentru $k = 0$, avem prin ipoteză $\tilde{F}(\tau^0, t) = \tilde{a} \in \tilde{v}^0$.

[8]) În cele ce urmează, pentru prescurtare, nu vom mai aminti, de fiecare dată cînd este necesar, schimbarea de parametru pentru a aduce intervalul de variație la I, ci vom subînțelege că operația aceasta a fost efectuată.

Să notăm cu β_t^k drumul $F(\tau^k, t')$ pentru t' din intervalul închis de valori dintre t_0 și t și să remarcăm că există $\tilde{\beta}_t^k$ transportatul acestui drum din $\tilde{F}(\tau^k, t_0)$, deoarece $\beta_t^k \subset v^{k-1} \cap v^k$ și $\tilde{F}(\tau^k, t_0) \in \tilde{v}^{k-1} \cap \tilde{v}^k$; mai mult, $\tilde{\beta}_t^k \subset \tilde{v}^{k-1} \cap \tilde{v}^k$, $(k = 1, \ldots, n-1)$. Dacă, procedînd prin inducție, presupunem că $\tilde{F}(\tau^{k-1}, t) \in \tilde{v}^{k-1}$, atunci $\tilde{\alpha}_t^{k-1} \subset \tilde{v}^{k-1}$. Prin urmare, $\tilde{F}(\tau^k, t)$ este unicul punct din $\tilde{v}^{k-1}$ cu proiecția $F(\tau^k, t)$, adică coincide cu extremitatea lui $\tilde{\beta}_t^k$ și aparține lui $\tilde{v}^k$. Am dovedit astfel că, oricare ar fi $k = 0,1, \ldots, n-1$, $\tilde{F}(\tau, t) \in \tilde{v}^k$ pentru $\tau \in [\tau^k, \tau^{k+1}]$ și $t \in I \cap [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ sau că în acest dreptunghi de puncte (τ, t), putem scrie $\tilde{F} = (f|_{\tilde{v}^k})^{-1} \circ F$, ceea ce asigură continuitatea lui $\tilde{F}$ în punctul (τ_0, t_0). Cum $\tilde{F}(1, t)$ este o aplicație continuă: $I \to \tilde{X}$, $f \circ \tilde{F}(1, t) = b$ și f este un omeomorfism local, deducem că $\tilde{F}(1, t) = \tilde{b}$ un punct din $f^{-1}(b)$. Deoarece $F(0, t) = \tilde{a}$, rezultă că $F(\tau, t)$ realizează o deformare continuă a lui $\tilde{\alpha}_0$ în $\tilde{\alpha}_1$.

3. Vom studia acum acoperirile $(\tilde{X}, f, X)$, pentru care orice drum de pe X se poate transporta pe $\tilde{X}$, în orice punct din preimaginea sa și pe care le vom numi *acoperiri cu transport posibil.*

O acoperire $(\tilde{X}, f, X)$ se numește *neramificată, fără frontieră,* dacă orice punct $p \in X$ are o vecinătate u_p cu proprietățile: a) fiecărui punct $\tilde{p} \in f^{-1}(p)$ îi corespunde o vecinătate $\tilde{u}_{\tilde{p}}$ reprezentată topologic prin $f|_{\tilde{u}_{\tilde{p}}}$ pe u_p și b) $f^{-1}(u_p) = \bigcup_{\tilde{p} \in f^{-1}(p)} \tilde{u}_{\tilde{p}}$.

3.1. Se verifică imediat:

Propoziția 2.4. *În cazul unei acoperiri neramificate, fără frontieră, orice drum* λ *de pe* X *de origină* p_0 *se transportă pe* $\tilde{X}$ *din orice punct* $\tilde{p}_0 \in f^{-1}(p_0)$.

Într-adevăr, fie λ dat de $p = \varphi(\tau) : I \to X$ și τ^k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ o diviziune a lui I astfel încît drumul λ^k, corespunzînd valorilor $\tau \in [\tau^k, \tau^{k+1}]$, să fie inclus în u_{p_k}, unde $p_k = \varphi(\tau^k)$. În $\tilde{u}_{\tilde{p}_0}$ transportăm din $\tilde{p}_0$ drumul λ^0 și obținem drumul $\tilde{\lambda}^0$ de extremitate $\tilde{p}_1$; în $\tilde{u}_{\tilde{p}_1}$ transportăm din $\tilde{p}_1$ drumul λ^1 etc. Drumul $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^0 \tilde{\lambda}^1 \ldots \tilde{\lambda}^{n-1}$ este transportatul lui λ din $\tilde{p}_0$.

Observația 2.2. Exemplele analizate în observația 2.1 sînt acoperiri neramificate, fără frontieră; pentru primul exemplu, transportul nu este unic.

Observația 2.3. Acoperirea $(\tilde{X}, f, X)$ fiind neramificată și fără frontieră, din definiție rezultă că mulțimile $f(\tilde{X})$ și $X - f(\tilde{X})$ sînt deschise. Prin urmare, dacă X este conex, f este o *surjecție.*

De asemenea dacă $(\tilde{X}, f, X)$ este o acoperire neramificată cu transport posibil, iar X este liniar conex, f este o *surjecție.*

3.2. Propoziția 2.5. *Fie* $(\tilde{X}, f, X)$ *o acoperire cu transport posibil și unic, iar* X *un spațiu liniar conex; atunci oricare ar fi punctele* p *și* q

din X se poate stabili o corespondență biunivocă între mulțimile de puncte $f^{-1}(p)$ și $f^{-1}(q)$.

Într-adevăr, fie λ un drum unind pe X punctele p și q. În fiecare punct $\tilde{p}_i \in f^{-1}(p)$ de pe $\tilde{X}$ transportăm λ prin drumul $\tilde{\lambda}_i$ și extremitatea sa va fi un punct $\tilde{q}_i \in f^{-1}(q)$. Se verifică imediat că asocierea $\tilde{p}_i \to \tilde{q}_i$ dă o corespondență bijectivă între $f^{-1}(p)$ și $f^{-1}(q)$ [9]).

Consecința 2.1. În condițiile propoziției 2.5, dacă preimaginea unui punct din X are un număr finit n de puncte, preimaginea oricărui alt punct din X are de asemenea n puncte. Vom numi n numărul foilor acoperirii, denumire justificată în cazul cînd X și $\tilde{X}$ sînt suprafețe.

Din propoziția 2.3 rezultă imediat

Consecința 2.2. *Fie $(\tilde{X}, f, X)$ o acoperire neramificată cu transport posibil și unic. Dacă α și β sînt două drumuri omotope pe X, ridicînd aceste drumuri din același punct din $\tilde{X}$, obținem două drumuri $\tilde{\alpha}$ și $\tilde{\beta}$ omotope pe $\tilde{X}$, cu aceeași extremitate.*

3.3. Numim *spațiu local liniar conex (respectiv local simplu conex)* [10]) un spațiu topologic, care are o bază de mulțimi deschise liniar conexe (respectiv simplu conexe).

Observația 2.4. Fie $(\tilde{X}, f, X)$ o acoperire neramificată și P o proprietate invariată de omeomorfisme (de exemplu conexiunea liniară, conexiunea simplă). Dacă $\tilde{X}$ are o bază pentru deschise formată de mulțimi cu proprietatea P, atunci X are și el o bază de același fel. Reciproca este adevărată, adăugînd că aplicația f este o surjecție.

Observația 2.5. Dacă $(\tilde{X}, f, X)$ este o acoperire neramificată cu transport unic, X este local liniar conex și $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ sînt două puncte diferite din $\tilde{X}$ cu aceeași proiecție $p \in X$, atunci $\tilde{p}_1$ și $\tilde{p}_2$ au vecinătăți disjuncte. Într-adevăr, fie $\tilde{u}_k$ o vecinătate a lui $\tilde{p}_k$ $(k = 1, 2)$ pentru care $f|_{\tilde{u}_k}$ este un omeomorfism al lui $\tilde{u}_k$ pe deschisul $f(\tilde{u}_k)$, fie $u \subset f(\tilde{u}_1) \cap f(\tilde{u}_2)$ o vecinătate liniar conexă a lui p și fie $\tilde{u}_{\tilde{p}_k} = (f|_{\tilde{u}_k})^{-1}(u)$. Dacă ar exista un punct $\tilde{r} \in \tilde{u}_{\tilde{p}_1} \cap \tilde{u}_{\tilde{p}_2}$, un drum λ din u, unind $f(\tilde{r})$ cu p, s-ar ridica din $\tilde{r}$ în două drumuri diferite $(f|_{\tilde{u}_k})^{-1}(\lambda)$; prin urmare, $\tilde{u}_{\tilde{p}_1} \cap \tilde{u}_{\tilde{p}_2} = \emptyset$. (Rezultatul se aplică în particular acoperirilor neramificate, fără frontieră cu transport unic, pentru vecinătățile $\tilde{u}_{\tilde{p}}$ din definiție, cînd u_p sînt liniar conexe).

Dacă $(\tilde{X}, f, X)$ este o acoperire și X este spațiu separat, două puncte din $\tilde{X}$ cu proiecții diferite au vecinătăți disjuncte.

Din aceste două afirmații rezultă : Dacă $(\tilde{X}, f, X)$ este o acoperire neramificată cu transport unic, iar X este separat și local liniar conex, atunci $\tilde{X}$ este separat.

---

[9]) Evident, fără ipoteza X liniar conex, propoziția rămîne valabilă pentru orice pereche de puncte $p, q \in X$, care se pot uni cu un drum pe X.

[10]) A se vedea definiții mai generale pentru aceste noțiuni în lucrarea [25], p. 64 și p. 134.

PROPOZIȚIA 2.6. *Fie X un spațiu topologic, local simplu conex și $(\widetilde{X}, f, X)$ o acoperire neramificată cu transport posibil și unic. Atunci acoperirea este neramificată, fără frontieră.*

Să considerăm pentru fiecare punct $p \in X$ drept vecinătate u_p un deschis simplu conex și să asociem fiecărui punct $\tilde{p}_i \in f^{-1}(p)$ mulțimea $\tilde{u}_{\tilde{p}_i}$ a punctelor $\tilde{q}_i$ obținute prin următoarea construcție : q fiind un punct din u_p și λ un drum cu originea p și extremitatea q, situat în u_p, punctul $\tilde{q}_i$ este extremitatea drumului $\widetilde{\lambda}$, transportatul lui λ pe $\widetilde{X}$ în punctul $\tilde{p}_i$. Datorită unicității transportului de drumuri, simplu conexiunii lui u_p și consecinței 2.2, punctul $\tilde{q}_i$ depinde numai de q și de $\tilde{p}_i$, astfel încît $f|_{u_{\tilde{p}_i}}$ este o bijecție : $\tilde{u}_{\tilde{p}_i} \to u_p$.

Mulțimea $\tilde{u}_{\tilde{p}_i}$ este un deschis în $\widetilde{X}$: Fie $\tilde{q}$ un punct din $\tilde{u}_{\tilde{p}_i}$ și $\tilde{v}$ un deschis în $\widetilde{X}$, liniar conex pentru care $f(\tilde{v}) \subset u_p$. Orice punct $\tilde{r} \in \tilde{v}$ se unește cu punctul $\tilde{q}$ printr-un drum $\tilde{\mu} \subset \tilde{v}$. Evident, $f(\tilde{\mu}) \subset u_p$. Dacă λ este un drum din u, care unește p și q, ridicînd drumul $\lambda f(\tilde{\mu})$ din $\tilde{p}_i$ vom obține drumul $\widetilde{\lambda}\tilde{\mu} \subset \tilde{u}_{\tilde{p}_i}$. Prin urmare, $\tilde{r} \in \tilde{u}_{\tilde{p}_i}$, $\tilde{v} \subset \tilde{u}_{\tilde{p}_i}$ și $\tilde{u}_{\tilde{p}_i}$ este un deschis.

Aplicația $f|_{\tilde{u}_{\tilde{p}_i}} : \tilde{u}_{\tilde{p}_i} \to u_p$ este evident un omeomorfism surjectiv.

Să verificăm că $\bigcup_{\tilde{p} \in f^{-1}(p)} \tilde{u}_{\tilde{p}} = f^{-1}(u_p)$: Dacă $\tilde{q} \in f^{-1}(u_p)$ și σ este un drum unind în u_p punctele $q = f(\tilde{q})$ și p, atunci $\tilde{q} \in \tilde{u}_{\tilde{p}}$, unde $\tilde{p}$ este extremitatea drumului $\tilde{\sigma}$, transportatul lui σ din punctul $\tilde{q}$. Cealaltă incluziune este evidentă.

3.4. Propozițiile de mai sus și teorema 1.1 implică :

TEOREMA 2.1. *Fie $(\widetilde{X}, f, X)$ o acoperire neramificată cu transport posibil și unic, $\tilde{p}$ un punct din $\widetilde{X}$, iar $p = f(\tilde{p})$.*

1° $f_{\tilde{p}}$ este un izomorfism.

2° $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$ constă din clasele drumurilor închise α de pe X, cu originea p, care se ridică din $\tilde{p}$ în drumuri închise.

3°. Dacă două puncte arbitrare din $f^{-1}(p)$ se unesc printr-un drum pe $\widetilde{X}$, indicele lui $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$ în $\pi_1(X, p)$ dă numărul de puncte din $f^{-1}(p)$. Prin urmare, dacă X și $\widetilde{X}$ sînt liniar conexe, indicele lui $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$ în $\pi_1(X, p)$ este numărul foilor acoperirii $(\widetilde{X}, f, X)$.

Afirmațiile 1° și 2° se deduc imediat, folosind consecința 2.2.

Pentru a stabili 3°, să unim $\tilde{p}$ cu oricare alt punct $\tilde{p}' \in f^{-1}(p)$, printr-un drum $\widetilde{\lambda}'$ de pe $\widetilde{X}$; atunci $\lambda' = f(\widetilde{\lambda}')$ este un drum închis și $([\lambda']_p$ determină o clasă alăturată $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}[\lambda']_p$ în $\pi_1(X, p)$. Se verifică imediat că am obținut astfel o bijecție între punctele din $f^{-1}(p)$ și clasele alăturate ale lui $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$ în $\pi_1(X, p)$.

Din teoremele 1.1 și 2.1 rezultă

Consecința 2.3. Fie $(\widetilde{X}, f, X)$ o acoperire neramificată cu transport posibil și unic, iar $\widetilde{X}$ și X spații liniar conexe. Fie $\tilde{p} \in \widetilde{X}$ și $p = f(\tilde{p})$. Să

ridicăm toate drumurile ale căror clase de omotopie aparțin lui $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$, din orice punct al fibrei $f^{-1}(p)$. Drumurile transportate vor fi toate închise, atunci și numai atunci cînd $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$ este divizor normal în $\pi_1(X, p)$.

O acoperire $(\tilde{X}, f, X)$ neramificată, fără frontieră cu transport unic, spațiile $\tilde{X}$ și X fiind liniar conexe, se numește regulată, dacă $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$ este divizor normal în $\pi_1(X, p)$, pentru $\tilde{p} \in \tilde{X}$ și $p = f(\tilde{p})$ [11]).

Teorema 2.1 și consecința 2.3 permit să completăm teorema 1.1′ în modul următor:

TEOREMA 2.1′. *Fie $(\tilde{X}, f, X)$ o acoperire neramificată cu transport posibil și unic, iar $\tilde{X}$ și X spații liniar conexe.*

1°. *Aplicația f induce un izomorfism $F: \pi_1(\tilde{X}) \to \pi_1(X)$ determinat pînă la un automorfism interior al lui $\pi_1(X)$ și pune în evidență clasa de subgrupuri conjugate cu $\mathcal{G} = F[\pi_1(\tilde{X})]$ din $\pi_1(X)$.*

2° *Dacă $\mathcal{G}$ este divizor normal, drumurile închise de pe X, corespunzînd la clase din $\mathcal{G}$, se ridică în drumuri închise pe $\tilde{X}$.*

3.5. Am văzut că oricărei acoperiri $(\tilde{X}, f, X)$ îi putem asocia pentru fiecare punct $\tilde{p} \in \tilde{X}$ un subgrup $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}} \subset \pi_1(X, f(\tilde{p}))$. Vom demonstra o reciprocă a acestei proprietăți:

PROPOZIȚIA 2.7. *Fie X un spațiu topologic liniar conex și local simplu conex. Oricare ar fi punctul $p \in X$ și subgrupul $\mathcal{G} \subset \pi_1(X, p)$, există o acoperire neramificată, fără frontieră, cu transport unic $(\tilde{X}, f, X)$ și un punct $\tilde{p} \in \tilde{X}$, astfel încît $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}} = \mathcal{G}$.* (Spațiul $\tilde{X}$ rezultă liniar conex și local simplu conex).

Considerăm pentru fiecare punct $q \in X$ mulțimea drumurilor λ cu originea p și extremitatea q și le grupăm în clase notate $\{\lambda\}$, prin următoarea relație de echivalență: $\lambda' \in \{\lambda\}$, dacă și numai dacă $[\lambda' \lambda^{-1}]_p \in \mathcal{G}$. (Dacă $q = p$, aceste clase coincid cu clasele alăturate lui $\mathcal{G}$ în $\pi_1(X, p)$). Notăm $\tilde{X}$ mulțimea acestor clase și f aplicația $\tilde{X} \to X$, care asociază fiecărei clase $\tilde{q} = \{\lambda\}$, definită de drumul λ cu extremitatea q, punctul q. Organizăm $\tilde{X}$ ca spațiu topologic, luînd drept vecinătăți ale lui $\tilde{q} \in \tilde{X}$ mulțimile $\tilde{u}_{\tilde{q}}$, construite în modul următor, plecînd de la mulțimile u_q din X deschise, simplu conexe, ce conțin q: Fie q^* un punct arbitrar din u_q, λ^* un drum din u_q cu originea q și extremitatea q^*, iar λ un drum din clasa $\tilde{q}$. Drumul $\lambda\lambda^*$ definește clasa $\tilde{q}^*$, iar $\tilde{u}_{\tilde{q}}$ este mulțimea claselor $\tilde{q}^*$, cînd q^* descrie u_q. Se verifică imediat că: $\tilde{X}$ este spațiu topologic; $f|_{\tilde{u}_{\tilde{q}}}$ este omeomorfism local: $\tilde{u}_{\tilde{q}} \underset{pe}{\longrightarrow} u_q$; ridicarea drumurilor e totdeauna posibilă univoc; $\tilde{X}$ e liniar conex și local simplu conex. Din propoziția 2.6 rezultă că acoperirea $(\tilde{X}, f, X)$ este neramificată, fără frontieră, iar din teorema 2.1, 2°,

[11]) Am folosit denumirile de acoperire neramificată, neramificată fără frontieră, regulată date de R. Nevanlinna [31]; în monografia [7], aceste noțiuni sînt numite respectiv acoperire netedă, regulată, normală.

că $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}} = \mathcal{G}$, dacă alegem punctul $\tilde{p}$ corespunzător clasei determinată de drumul nul cu originea p.

3.6. Vom stabili acum o teoremă relativă la ridicarea aplicațiilor, care constituie totodată o reciprocă a propoziției 1.9.

TEOREMA 2.2. *Fie $(\tilde{X}, f, X)$ o acoperire neramificată, cu transport posibil și unic, (X^*, φ, X) o acoperire arbitrară, X^* un spațiu liniar conex și local liniar conex, iar $\tilde{p}$ și p^* două puncte din $\tilde{X}$ respectiv X^*, astfel încît $f(\tilde{p}) = \varphi(p^*) = p$. Dacă $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}} \supset \mathcal{G}_{\varphi_{p^*}}$, atunci există aplicația continuă $\tilde{\varphi} : X^* \to \tilde{X}$, care face comutativă diagrama*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[dr, "f"] & \\ X^* \arrow[u, dashed, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & X, \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

unic determinată prin condiția $\tilde{\varphi}(p^*) = \tilde{p}$.

1°. *Dacă (X^*, φ, X) este o acoperire neramificată, atunci și acoperirea $(X^*, \tilde{\varphi}, \tilde{X})$ este neramificată.*

2°. *Dacă pentru acoperirea (X^*, φ, X) transportul drumurilor este posibil (respectiv unic), atunci $(X^*, \tilde{\varphi}, \tilde{X})$ are aceeași proprietate.*

Dacă (X^*, φ, X) este o acoperire neramificată, fără frontieră, $(X^*, \tilde{\varphi}, \tilde{X})$ este și ea neramificată, fără frontieră.

3°. *Dacă (X^*, φ, X) este neramificată cu transport posibil și unic, $\tilde{X}$ este liniar conex și $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}} = \mathcal{G}_{\varphi_{p^*}}$, atunci $\tilde{\varphi}$ este un omeomorfism surjectiv, iar acoperirile $(\tilde{X}, f, X)$ și (X^*, φ, X) sînt egale.*

În condițiile cazului general, $\tilde{\varphi}$ se obține în modul următor : Luăm $\tilde{\varphi}(p^*) = \tilde{p}$ și pentru fiecare $q^* \in X^*$, ducem un drum λ^* arbitrar pe X^* de origină p^* și extremitate q^*, transportăm din $\tilde{p}$ drumul $\lambda = \varphi(\lambda^*)$ prin drumul $\tilde{\lambda}$ și definim $\tilde{\varphi}(q^*) = \tilde{q}$, extremitatea lui $\tilde{\lambda}$. Condiția $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}} \supset \mathcal{G}_{\varphi_{p^*}}$ asigură caracterul univoc al acestei aplicații. Într-adevăr, dacă unim p^* cu q^* prin alt drum λ_1^*, cum $\lambda^* \lambda_1^{*-1}$ se închide pe X^*, notînd $\lambda_1 = \varphi(\lambda_1^*)$, deducem $[\lambda \lambda_1^{-1}]_p \in \mathcal{G}_{\varphi_{p^*}}$, deci $[\lambda \lambda_1^{-1}]_p \in \mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$. Conform teoremei 2.1, 2°, drumul transportat din $\tilde{p}$: $\widetilde{\lambda\lambda_1^{-1}}$ se închide, deci $\tilde{\lambda}_1$, transportatul lui λ_1 din $\tilde{p}$, are aceeași extremitate $\tilde{q}$ ca și $\tilde{\lambda}$.

Să verificăm că $\tilde{\varphi}$ este continuă. Dacă $q^* \in X^*$ și $\tilde{q} = \tilde{\varphi}(q^*)$, iar $q = \varphi(q^*)$, fie u_q și $\tilde{u}_{\tilde{q}}$ o pereche de vecinătăți, astfel încît $f|_{\tilde{u}_{\tilde{q}}}$ să fie un omeomorfism al lui $\tilde{u}_{\tilde{q}}$ pe u_q, iar $\tilde{u}_{\tilde{q}}$ să fie inclusă într-o vecinătate arbitrar dată $\tilde{U}_{\tilde{q}}$. Deoarece φ este continuă, există o vecinătate conexă prin arce $u_{q^*}^*$ astfel încît $\varphi(u_{q^*}^*) \subset u_q$. Repetînd procedeul de construcție al aplicației $\tilde{\varphi}$, se vede că $\tilde{\varphi}(u_{q^*}^*) \subset \tilde{u}_{\tilde{q}}$. Într-adevăr, pentru a obține $\tilde{\varphi}(s^*)$, s^* fiind punct arbitrar din $u_{q^*}^*$, este suficient să unim q^* cu s^* printr-un

drum μ^* din u_{q^*} și să transportăm $\mu = \varphi(\mu^*)$ din $\tilde{q}$, ceea ce ne dă $\tilde{\mu} = (f|_{\tilde{u}_{\tilde{q}}})^{-1}(\mu)$. Extremitatea lui $\tilde{\mu}$, punctul $\tilde{s}$, va aparține lui $\tilde{u}_{\tilde{q}}$ și va coincide cu $\tilde{\varphi}(s^*)$.

Pentru a stabili unicitatea aplicației $\tilde{\varphi}$, să procedăm prin reducere la absurd, presupunînd că $\tilde{\varphi}_1$ ar fi o altă aplicație continuă : $X^* \to \tilde{X}$, astfel încît $f \circ \tilde{\varphi}_1 = \varphi$ și $\tilde{\varphi}_1(p^*) = \tilde{p}$. Dacă $\tilde{\varphi} \neq \tilde{\varphi}_1$, fie $q^* \in X^*$, pentru care $\tilde{\varphi}_1(q^*) \neq \tilde{\varphi}(q^*)$. Unim în X^* punctul p^* cu q^*, printr-un drum λ^*. Drumurile $\tilde{\varphi}(\lambda^*)$ și $\tilde{\varphi}_1(\lambda^*)$ constituie ridicări din $\tilde{p}$ ale drumului $\lambda = \varphi(\lambda^*)$, deci, cum pentru acoperirea $(\tilde{X}, f, X)$ transportul drumurilor este univoc, ele coincid. Am obținut astfel o contradicție, deoarece $\tilde{\varphi}(\lambda^*) = \tilde{\varphi}_1(\lambda^*)$ implică $\tilde{\varphi}(q^*) = \tilde{\varphi}_1(q^*)$.

Cazurile 1° sau 2° se verifică imediat, iar 3° se obține schimbînd rolul lui f cu φ, ceea ce ne dă o aplicație $\varphi^* : \tilde{X} \to X^*$, pentru care $\varphi^*(\tilde{p}) = p^*$ și $\varphi \circ \varphi^* = f$: aplicația φ^* este tocmai inversa lui $\tilde{\varphi}$.

Remarcăm că $(\tilde{X}, f, X)$ și (X^*, φ, X) fiind două acoperiri oarecare egale, iar $\tilde{\varphi} : X^* \to \tilde{X}$ un omeomorfism astfel încît $\varphi = f \circ \tilde{\varphi}$, dacă $\tilde{\varphi}(p^*) = \tilde{p}$, atunci $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}} = \mathcal{G}_{\varphi_{p^*}}$.

§ 3. Grupul transformărilor de acoperire

1. Fie $(\tilde{X}, f, X)$ o acoperire. Un omeomorfism surjectiv $T : \tilde{X} \to \tilde{X}$ cu proprietatea $f \circ T = f$ se numește *transformarea de acoperire.*

1.1. Propoziția 3.1. *Transformările de acoperire formează un grup,* pe care îl vom nota G.

Dacă acoperirea $(\tilde{X}, f, X)$ este *neramificată*, mulțimea punctelor $\{T(\tilde{p})\}_{T \in G}$, $\tilde{p}$ fiind un punct arbitrar dar fix în $\tilde{X}$, este formată din puncte izolate și, adăugînd ipoteza $\tilde{X}$ *spațiu separat*, această mulțime nu are puncte de acumulare în $\tilde{X}$. Într-adevăr, $\{T(\tilde{p})\}_{T \in G} \subset f^{-1}(p)$, unde $p = f(\tilde{p})$ și se aplică rezultatele din § 2, pct. 2. Putem deci formula *în condițiile subliniate* în acest aliniat :

Propoziția 3.2. *Grupul G este discret sau discontinuu* [12]).

Propoziția 3.3. *Dacă acoperirea $(\tilde{X}, f, X)$ este neramificată cu transport unic* (în particular, dacă $\tilde{X}$ este spațiu separat) *și $\tilde{X}$ este liniar conex, atunci orice transformare de acoperire T este unic determinată printr-o pereche de puncte corespondente,* după cum rezultă din propoziția 2.2. Această proprietate se mai poate exprima spunînd că *transformările de acoperire sînt fără punct fix* : dacă o transformare de acoperire invariază un punct, atunci se reduce la identitate.

---

[12]) Un grup G de transformări ale spațiului topologic $\tilde{X}$ în el însuși se numește *discontinuu*, dacă oricare ar fi $\tilde{p} \in \tilde{X}$, mulțimea $\{T(\tilde{p})\}_{T \in G}$ nu are punct de acumulare în $\tilde{X}$.

1.2. *Grupul G al transformărilor unei acoperiri* $(\tilde{X}, f, X)$ introduce pe $\tilde{X}$ următoarea relație de echivalență : punctele $\tilde{p}_1$ și $\tilde{p}_2$ din $\tilde{X}$ sînt *echivalente relativ la* G, dacă există $T \in G$, astfel încît $T(\tilde{p}_1) = \tilde{p}_2$. Vom nota această relație de echivalență : $\tilde{p}_1 \sim_G \tilde{p}_2$.

TEOREMA 3.1. *Dacă* $\tilde{p}_1 \sim_G \tilde{p}_2$, *atunci* $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}_1}} = \mathcal{G}_{f_{\tilde{p}_2}}$ *și orice drum* $\tilde{\gamma}$ *ce unește* $\tilde{p}_1$ *cu* $\tilde{p}_2$ *se proiectează într-un drum* $\gamma = f(\tilde{\gamma})$ *a cărui clasă de omotopie în punctul* $p = f(\tilde{p}_1)$ *aparține normalizatorului* $\mathfrak{N}_{f_{\tilde{p}_1}}$ *al lui* $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}_1}}$ *în* $\pi_1(X, p)$.

În adevăr, dacă există $T \in G$ pentru care $T(\tilde{p}_1) = \tilde{p}_2$, oricare ar fi drumul închis $\tilde{\alpha}_1$ cu originea $\tilde{p}_1$, $T(\tilde{\alpha}_1) = \tilde{\alpha}_2$ este un drum închis cu originea $\tilde{p}_2$. Cum $[f(\tilde{\alpha}_1)]_p$ este un element arbitrar din $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}_1}}$ și totodată coincide cu $[f(\tilde{\alpha}_2)]_p$, deci aparține lui $\mathcal{G}_{f_{p_2}}$, deducem că $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}_1}} \subset \mathcal{G}_{f_{\tilde{p}_2}}$.

Incluziunea contrară se obține considerînd T^{-1} în loc de T.

Din teorema 1.1, 3°, rezultă $[\gamma]_p \in \mathfrak{N}_{f_{\tilde{p}}}$.

1.3. *Observația* 3.1. Fie acoperirile (X, f_1, X_1) și (X_1, f_2, X_2). Grupul transformărilor de acoperire pentru (X, f_1, X_1) este subgrup al grupului transformărilor de acoperire pentru $(X, f_2 \circ f_1, X_2)$.

2. Vom introduce acum noi ipoteze asupra acoperirilor și spațiilor considerate :

TEOREMA 3.2. *Fie* $(\tilde{X}, f, X)$ *o acoperire neramificată cu transport posibil și unic, iar* $\tilde{X}$ *liniar conex și local liniar conex. Atunci, oricare ar fi punctul* $\tilde{p} \in \tilde{X}$, *are loc izomorfismul*

$$G \simeq \mathfrak{N}_{f_{\tilde{p}}} / \mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}. \tag{3.1}$$

Fie $[\gamma]_p \in \mathfrak{N}_{f_{\tilde{p}}}$, drumul $\tilde{\gamma}$ transportatul drumului γ din $\tilde{p}$, iar $\tilde{p}_1$ extremitatea lui $\tilde{\gamma}$. Să demonstrăm că există o transformare $T_\gamma \in G$ cu proprietatea $T_\gamma(\tilde{p}) = \tilde{p}_1$. În acest scop, este suficient să aplicăm teorema 2.2, 3°, diagramei

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \xrightarrow{\ f\ } \\ T_\gamma & \uparrow & \searrow X, \quad \text{cu } f(\tilde{p}) = f(\tilde{p}_1), \\ & \tilde{X} & \xrightarrow{\ f\ } \end{array}$$

ținînd seama că din teorema 1.1, 3°, deducem $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}} = \mathcal{G}_{f_{\tilde{p}_1}}$.

Am definit astfel o aplicație $\sigma : \mathfrak{N}_{f_{\tilde{p}}} \to G$, prin care $\sigma([\gamma]_p) = T_\gamma$, pentru $[\gamma]_p \in \mathfrak{N}_{f_{\tilde{p}}}$.

Aplicația σ este surjectivă : În adevăr, teorema 3.1 arată că oricare ar fi $T \in G$, notînd $T(\tilde{p}) = \tilde{p}_1$ și $\tilde{\gamma}$ un drum ce unește $\tilde{p}$ cu $\tilde{p}_1$, dacă $\gamma = f(\tilde{\gamma})$, clasa $[\gamma]_p \in \mathfrak{N}_{f_{\tilde{p}}}$. După afirmația de unicitate din teorema 2.2, $T = T_\gamma$.

Aplicația σ este un omomorfism : Să luăm două elemente $[\alpha]_p$ și $[\beta]_p$ din $\mathfrak{N}_{f_{\tilde{p}}}$ și să arătăm că $T_{\alpha\beta} = T_\alpha \circ T_\beta$. Evident, este suficient să

verificăm relația $T_{\alpha\beta}(\tilde{p}) = (T_\alpha \circ T_\beta)(\tilde{p})$, pentru un punct $\tilde{p} \in \tilde{X}$. Punctul $T_{\alpha\beta}(\tilde{p})$ se obține ridicînd $\alpha\beta$ din $\tilde{p}$: fie $\tilde{\alpha}$ transportatul drumului α din $\tilde{p}$ și $T_\alpha(\tilde{p})$ extremitatea lui ; atunci $T_{\alpha\beta}(\tilde{p})$ va fi extremitatea drumului β transportat din $T_\alpha(\tilde{p})$. Pe de altă parte, fie $\tilde{\beta}$ transportatul lui β din $\tilde{p}$: extremitatea sa este punctul $T_\beta(\tilde{p})$ și pentru a construi $T_\alpha[T_\beta(\tilde{p})]$ vom ridica din $T_\alpha(\tilde{p})$ proiecția unui drum ce unește $\tilde{p}$ cu $T_\beta(\tilde{p})$, pe care îl alegem chiar $\tilde{\beta}$. Prin urmare $T_\alpha[T_\beta(\tilde{p})]$ este extremitatea lui $T_\alpha(\tilde{\beta})$ și coincide cu $T_{\alpha\beta}(\tilde{p})$.

Nucleul omomorfismului σ este format de clasele $[\gamma]_p \in \mathfrak{N}_{f_{\tilde{p}}}$, pentru care T_γ este aplicația identică, deci $\tilde{\gamma}$ este drum închis. Aplicînd teorema 2.1, 2°, deducem că $\operatorname{Ker}\sigma = \mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$, ceea ce demonstrează izomorfismul (3.1).

Observația 3.2. Adăugînd la ipotezele teoremei 3.2 și condiția : X liniar conex, din teoremele 1.1′ și 2.1′ rezultă izomorfismul $G \simeq \mathfrak{N}/\mathcal{G}$, unde $\mathfrak{N}$ este normalizatorul lui $\mathcal{G}$ în $\pi_1(X)$.

Observația 3.3. În condițiile teoremei 3.2, grupul G este *tranzitiv* [13]) atunci și numai atunci cînd $\mathcal{G}_{f_{\tilde{p}}}$ este divizor normal ($\mathfrak{N}_{f_{\tilde{p}}} = \pi_1(X, p)$).

Observația 3.4. Dată acoperirea $(\tilde{X}, f, X)$, avem pe $\tilde{X}$ două relații de echivalență : una determinată de f

$$\tilde{p} \sim_f \tilde{q} \Leftrightarrow f(\tilde{p}) = f(\tilde{q}) \tag{3.2}$$

și alta determinată de G

$$\tilde{p} \sim_G \tilde{q} \Leftrightarrow T(\tilde{p}) = \tilde{q}, \text{ pentru un } T \in G. \tag{3.3}$$

Evident, $\tilde{p} \sim_G \tilde{q}$ implică $\tilde{p} \sim_f \tilde{q}$ și cele două relații de echivalență coincid dacă și numai dacă G este tranzitiv.

Fie $(\tilde{X}, f, X)$ *o acoperire neramificată, iar* f *o aplicație surjectivă. Spațiul cît al lui* $\tilde{X}$ *față de relația de echivalență determinată de* f, *pe care îl vom nota* $\tilde{X}/f$, *este omeomorf cu* X([15], p. 93). În cele ce urmează vom folosi această observație *în cazul* G *tranzitiv, cînd spațiul cît îl vom nota* $\tilde{X}/G$.

§ 4. Acoperirea universală

1. Fie X un spațiu liniar conex, local simplu conex și p un punct din X. Să alegem subgrupul $\mathcal{G} = \{1\} \subset \pi_1(X, p)$, 1 fiind clasa drumurilor nul-omotope, elementul unitate din $\pi_1(X, p)$. Aplicînd propoziția 2.7, deducem existența acoperirii regulate $(\hat{X}, \Pi_G, X)$, cu proprietatea $\mathcal{G}_{\Pi_G, \hat{p}} = \{1\}$, pentru orice punct $\hat{p} \in \Pi_G^{-1}(p)$ și cu grupul transformărilor de acoperire

$$G \simeq \pi_1(X, p),$$

[13]) Un grup de transformări de acoperire se numește *tranzitiv*, dacă oricare ar fi punctele $\tilde{p}_1$ și $\tilde{p}_2$ din aceeași fibră a acoperirii, există în grup o transformare T, astfel încît $T(\tilde{p}_1) = \tilde{p}_2$.

după teorema 3.2. Proiecția acestei acoperiri a fost notată cu Π_G, deoarece după observațiile 3.3 și 3.4, grupul G fiind tranzitiv, relațiile de echivalență (3.2) și (3.3) definite de proiecție respectiv de grupul G coincid, iar X este omeomorf cu $\hat{X}/G$. Acoperirea $(\hat{X}, \Pi_G, X)$ se numește *universală*, fiindcă după teorema 2.2, oricare ar fi acoperirea $(\hat{X}, f, X)$ neramificată cu transport posibil și unic, există o acoperire $(\hat{X}, \tilde{f}, \hat{X})$ astfel încît $\Pi_G = f \circ \tilde{f}$. Tot din teorema 2.2 rezultă că acoperirea $(\hat{X}, \Pi_G, X)$ este independentă de p, pînă la o egalitate de acoperiri.

Conform teoremei 2.1, 1°, grupul $\pi_1(\hat{X}, \hat{p})$ se reduce la elementul neutru, fiindcă $\Pi_{G,\hat{p}}$ este un izomorfism. Prin urmare, spațiul $\hat{X}$ este *omotop simplu conex*. (După propoziția 2.7, știam că $\hat{X}$ este liniar conex și local simplu conex.)

Teorema 2.1, 3°, arată că numărul foilor acoperirii universale este egal cu ordinul lui $\pi_1(X, p)$.

2. Vom aprofunda acum izomorfismul: $G \to \pi_1(X, p)$, pe care îl vom nota $\Lambda_{G,\hat{p}}$. Reamintim din demonstrația teoremei 3.2, definiția lui $\Lambda_{G,\hat{p}}$:

1° Fiind dat $T \in G$, unim $\hat{p}$ cu $T(\hat{p})$ printr-un drum $\hat{\gamma}$ cu proiecția $\Pi_G(\hat{\gamma}) = \gamma$; atunci $\Lambda_{G,\hat{p}}(T) = [\gamma]_p$.

2°. Reciproc, luînd $[\gamma]_p \in \pi_1(X, p)$, transportăm γ din $\hat{p}$ prin drumul $\hat{\gamma}$; atunci $\Lambda^{-1}_{G,\hat{p}}([\gamma]_p) = T_\gamma$, transformarea de acoperire pentru care $T_\gamma(\hat{p})$ este extremitatea lui $\hat{\gamma}$.

PROPOZIȚIA 4.1. *Fie* $\lambda : G \to G$ *un automorfism*, $\omega : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, q)$ *un izomorfism*, $\hat{p} \in \Pi_G^{-1}(p)$ *și* $\hat{q} \in \Pi_G^{-1}(q)$. *Dacă următoarea diagramă*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\lambda} & G \\ {\scriptstyle \Lambda_{G,\hat{p}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda_{G,\hat{q}}} \\ \pi_1(X,p) & \xrightarrow{\omega} & \pi_1(X,q) \end{array} \tag{4.1}$$

este comutativă, λ *este automorfism interior atunci și numai atunci cînd* ω *este izomorfism permis.*

Verificarea este imediată: Fie ω izomorfismul permis definit de drumul γ cu originea q și extremitatea p. Notăm cu $\hat{\gamma}$ transportatul lui γ din $\hat{q}$, cu $\hat{p}_1$ extremitatea lui $\hat{\gamma}$ și cu τ transformarea din G, pentru care $\tau(\hat{p}) = \hat{p}_1$. Dacă $T \in G$ și $\alpha = \Pi_G(\hat{\alpha})$, unde $\hat{\alpha}$ este un drum unind $\hat{p}$ cu $T(\hat{p})$, pentru a obține $T_1 = \lambda(T) = \Lambda^{-1}_{G,\hat{q}}([\gamma_\alpha \gamma^{-1}]_q)$ transportăm γ^{-1} din $\tau[T(\hat{p})]$ și obținem $\hat{\gamma}_1^{-1}$ cu extremitatea $T_1(\hat{q})$. Evident, $\hat{\gamma}_1 = T_1(\hat{\gamma})$, deci $\tau[T(\hat{p})] = T_1[\tau(\hat{p})]$ sau $T_1 = \tau \circ T \circ \tau^{-1}$; prin urmare λ este automorfismul interior determinat de τ. Reciproca se stabilește urmărind raționamentul în sens invers.

Observația 4.1. Propozițiile 1.6 și 4.1 arată că automorfismele $\lambda : G \to G$ și $\Omega = i_q \circ \omega \circ i_p^{-1} : \pi_1(X) \to \pi_1(X)$ sînt simultan interioare sau nu.

§ 5. Aplicații omotope

1. În acest paragraf vom folosi acoperirea universală pentru a stabili o proprietate importantă a aplicațiilor continue omotope între două *spații topologice* X și X', *liniar conexe* și *local simplu conexe*. Să notăm cu $\hat{X}$ și $\hat{X}'$ spațiile de acoperire universală corespunzătoare, G și G' grupurile transformărilor de acoperire, $\Pi_G : \hat{X} \to X$ și $\Pi_{G'} : \hat{X}' \to X'$ aplicațiile ce realizează acoperirea, $\Lambda_{G,\hat{p}} : G \to \pi_1(X, p)$, unde $\hat{p} \in \hat{X}$ și $p = \Pi_G(\hat{p})$, respectiv $\Lambda_{G',\hat{p}'} : G' \to \pi_1(X', p')$, unde $\hat{p}' \in \hat{X}'$ și $p' = \Pi_{G'}(\hat{p}')$, izomorfismele definite în § 4, pct. 2.

TEOREMA 5.1. *Fie* $f : X \to X'$ *o aplicație continuă.*

1° *Există o aplicație continuă* $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{X}'$, *astfel încît diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{X}' \\ {\scriptstyle \Pi_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Pi_{G'}} \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array} \tag{5.1}$$

să fie comutativă sau

$$f \circ \Pi_G = \Pi_{G'} \circ \hat{f}. \tag{5.1'}$$

Aplicația $\hat{f}$ *este unic determinată prin condiția* $\hat{f}(\hat{p}) = \hat{p}'$, *dacă* $f(p) = p'$. *Luînd în loc de* $\hat{p}'$ *un alt punct* $T'(\hat{p}')$ *cu* $T' \in G'$, *aplicația* $\hat{f}$ *se înlocuiește cu* $T' \circ \hat{f}$.

2°. *Aplicația* $\hat{f}$ *determină univoc un omomorfism* $\chi_{\hat{f}} : G \to G'$, *care face comutativă diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{X}' \\ T\downarrow & & \downarrow\chi_{\hat{f}}(T) \\ \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{X}' \end{array} \tag{5.2}$$

oricare ar fi $T \in G$, *i.e.*

$$\hat{f} \circ T = \chi_{\hat{f}}(T) \circ \hat{f}. \tag{5.2'}$$

Omomorfismul $\chi_{\hat{f}}$ *face comutativă diagrama*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\chi_{\hat{f}}} & G' \\ {\scriptstyle \Lambda_{G,\hat{p}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda_{G',\hat{p}'}} \\ \pi_1(X,p) & \xrightarrow{f_p} & \pi_1(X', p') \end{array} \tag{5.3}$$

sau

$$\chi_f = \Lambda^{-1}_{G',\hat{p}'} \circ f_p \circ \Lambda_{G,\hat{p}} \tag{5.3'}$$

și verifică relația

$$\chi_{T'_1 \circ f}(T) = T'_1 \circ \chi_{\hat{f}}(T) \circ T'^{-1}_1 \tag{5.4}$$

pentru orice $T'_1 \in G'$ *și* $T \in G$ [14]).

3°. *Dacă* f *este un omeomorfism surjectiv, atunci* $\hat{f}$ *este omeomorfism surjectiv, iar* χ_f *este izomorfism surjectiv.*

1°. Prima afirmație de la punctul 1° rezultă din teorema 2.2 : aplicația $f \circ \Pi_G : \hat{X} \to X'$ se ridică printr-o aplicație, pe care o vom nota $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{X}'$, deoarece acoperirea $(\hat{X}', \Pi_{G'}, X')$ este regulată și, luînd punctele $\hat{p}$ și $\hat{p}'$ cu proprietatea $(f \circ \Pi_G)(\hat{p}) = \Pi_{G'}(\hat{p}')$, putem scrie $\mathcal{G}_{(f\circ\Pi_G)\hat{p}} = \mathcal{G}_{\Pi_{G'}\hat{p}'} = \{1\} \subset \pi_1(X', p')$; aplicația $\hat{f}$ este unic determinată de condiția $\hat{f}(\hat{p}) = \hat{p}'$. Să schimbăm punctul $\hat{p}'$ cu un alt punct din $\Pi^{-1}_{G'}(p')$. Deoarece grupul G' este tranzitiv, acest punct va fi de forma $T'_1(\hat{p}')$, unde $T'_1 \in G'$. Vom obține o aplicație $\hat{f}_1$, determinată de condiția $\hat{f}_1(\hat{p}) = T'_1(\hat{p}') = (T'_1 \circ \hat{f})(\hat{p})$. Cum și aplicația $T'_1 \circ f$ face comutativă diagrama (5.1), din proprietatea de unicitate, rezultă $\hat{f}_1 = T'_1 \circ \hat{f}$.

2°. Fie $T \in G$ și $\hat{q} \in \hat{X}$; deoarece

$$\Pi_{G'}[\hat{f}(T(\hat{q}))] = f[\Pi_G(T(\hat{q}))] = f[\Pi_G(\hat{q})],$$

putem scrie

$$\Pi_{G'} \circ (\hat{f} \circ T) = f \circ \Pi_G$$

și conform punctului 1°, există $T' \in G'$ astfel încît

$$\hat{f} \circ T = T' \circ \hat{f}.$$

Am stabilit astfel o aplicație $\chi_f : G \to G'$, care depinde numai de $\hat{f}$ și asociază lui T transformarea $T' = \chi_f(T)$.

Se verifică imediat relația (5.3) : Dacă $\hat{\alpha}$ este un drum ce unește $\hat{p}$ și $T(\hat{p})$, atunci $\Lambda_{G,\hat{p}}(T) = [\alpha]_p$ cu $\alpha = \Pi_G(\hat{\alpha})$. Prin definiție, $f_p([\alpha]_p) = [f(\alpha)]_{p'}$. Fiindcă $\hat{f}(\hat{\alpha})$ este transportatul drumului $f(\alpha)$ în punctul $\hat{p}'$, $\Lambda^{-1}_{G,\hat{p}'}([f(\alpha)]_{p'})$ este transformarea ce duce $\hat{p}'$ în $\hat{f}[T(\hat{p})]$, extremitatea lui $\hat{f}(\hat{\alpha})$, adică tocmai $\chi_f(T)$. De aici rezultă că χ_f este un omomorfism și că este unic determinat de $\hat{f}$ [15]).

---

[14]) Punctul 2° se poate enunța și sub forma : aplicația f induce un omomorfism $\chi : G \to G'$, determinat pînă la un automorfism interior al lui G'.

[15]) Evident, Ker χ_f este intersecția lui G cu grupul transformărilor de acoperire corespunzătoare lui $(\hat{X}, \hat{f}, \hat{X}')$.

Scriind diagrama (5.2) pentru $\hat{f}$ și $T_1' \circ \hat{f}$:

$$\begin{array}{ccccc} \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{X}' & \xrightarrow{T_1'} & \hat{X}' \\ & \searrow & & \nearrow & \\ T\downarrow & & \downarrow\chi_{\hat{f}}(T) & & \downarrow \chi_{T_1'\circ\hat{f}}(T), \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{X}' & \xrightarrow{T_1'} & \hat{X}' \end{array}$$

al doilea pătrat rezultă comutativ, ceea ce ne dă relația (5.4).

3°. Pentru a stabili punctul 3°, vom demonstra mai întîi :

PROPOZIȚIA 5.1. *Fie X, X_1 și X_2 spații topologice liniar conexe și local simplu conexe ; $f_1 : X \to X_1$ și $f_2 : X_1 \to X_2$ două aplicații continue ; p un punct din X, $p_1 = f_1(p)$ și $p_2 = f_2(p_1)$; $\hat{X}$, $\hat{X}_1$ și $\hat{X}_2$ spațiile de acoperire universală ; G, G_1 și G_2 grupurile transformărilor de acoperire ; $\hat{p} \in \Pi_G^{-1}(p)$, $\hat{p}_1 \in \Pi_{G_1}^{-1}(p_1)$ și $\hat{p}_2 \in \Pi_{G_2}^{-1}(p_2)$.*

Dacă $\hat{f}_1 : \hat{X} \to \hat{X}_1$, $\hat{f}_2 : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ și $\widehat{f_2 \circ f_1} : \hat{X} \to \hat{X}_2$ sînt aplicațiile determinate de f_1, f_2 respectiv $f_2 \circ f_1$ prin condițiile $\hat{f}_1(\hat{p}) = \hat{p}_1$, $\hat{f}_2(\hat{p}_1) = \hat{p}_2$ și $\widehat{(f_2 \circ f_1)}(\hat{p}) = \hat{p}_2$ după teorema 5.1°, atunci

$$\widehat{f_2 \circ f_1} = \hat{f}_2 \circ \hat{f}_1 \tag{5.5}$$

și

$$\chi_{\hat{f}_2 \circ \hat{f}_1} = \chi_{\hat{f}_2} \circ \chi_{\hat{f}_1}. \tag{5.6}$$

Relația (5.5) se obține imediat din comutativitatea diagramei

$$\begin{array}{ccccc} \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}_1} & \hat{X}_1 & \xrightarrow{\hat{f}_2} & \hat{X}_2 \\ \Pi_G \downarrow & & \Pi_{G_1}\downarrow & & \downarrow\Pi_{G_2} \\ X & \xrightarrow{f_1} & X_1 & \xrightarrow{f_2} & X_2 \end{array}$$

și din condiția $\widehat{(f_2 \circ f_1)}(\hat{p}) = (\hat{f}_2 \circ \hat{f}_1)(\hat{p})$. Cum $(f_2 \circ f_1)_p = (f_2)_{p_1} \circ (f_1)_p$ (după § 1.5, formula (1.4)), relația (5.6) se deduce aplicînd (5.3').

Revenind la punctul 3° din teorema 5.1, să presupunem că f este un omeomorfism surjectiv și să notăm f^{-1} omeomorfismul invers : $X' \to X$. După punctul 1° din această teoremă, lui f^{-1} îi corespunde $\widehat{f^{-1}} : \hat{X}' \to \hat{X}$, unic determinat prin condiția de a transforma $\hat{p}'$ în $\hat{p}$ și după propoziția 5.1,

$$\widehat{f^{-1}} \circ \hat{f} = \hat{1}_X = 1_{\hat{X}},$$

unde am notat 1_X, $1_{\hat{X}}$ omeomorfismul identic al lui X, respectiv $\hat{X}$, pe el însuși și $\hat{1}_X(\hat{p}) = \hat{p}$. Prin urmare

$$\widehat{f^{-1}} = \hat{f}^{-1} \tag{5.7}$$

și $\hat{f}$ este un omeomorfism surjectiv. Din (5.3′) și demonstrația teoremei 1.1, 4°, în care am stabilit că

$$(f^{-1})_{f(p)} = (f_p)^{-1}, \tag{5.8}$$

deducem că χ_f este un izomorfism surjectiv și că

$$\chi_{f^{-1}} = \chi_f^{-1}. \tag{5.9}$$

2. Fie $(\hat{X}, \Pi_G, X)$ și $(\hat{X}', \Pi_{G'}, X')$, două acoperiri universale cu grupurile transformărilor de acoperire G respectiv G' și $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{X}'$ o aplicație continuă. Dacă există o aplicație continuă $f : X \to X'$, pentru care diagrama (5.1) este comutativă, spunem că $\hat{f}$ *induce* f. De asemenea, dacă există o aplicație $\chi_f : G \to G'$, care face comutativă diagrama (5.2), spunem că $\hat{f}$ *induce* χ_f.

TEOREMA 5.2. 1°. *Dacă $\hat{f}$ induce f, aplicația f este unică, iar $\hat{f}$ este una din aplicațiile $\hat{X} \to \hat{X}'$ corespunzătoare lui f prin teorema 5.1.*

2° *Dacă $\hat{f}$ induce χ_f, atunci χ_f este un omomorfism și este unic determinat.*

3°. *$\hat{f}$ induce f atunci și numai atunci cînd induce χ_f.*

4°. *Condiția necesară și suficientă ca $\hat{f}$ să inducă f este ca G să fie subgrup al grupului G^* de transformări ale acoperirii $(\hat{X}, \Pi_{G'} \circ \hat{f}, X')$.*

Afirmațiile 1° sînt evidente. Dacă $\hat{f}$ induce f, mulțimea $\Pi_{G'}\{\hat{f}[\Pi_G^{-1}(p)]\}$ trebuie să se reducă la un punct, oricare ar fi $p \in X$, și acest punct, unic determinat de $\Pi_{G'}$, $\hat{f}$ și Π_G, este tocmai $f(p)$. Totodată, $\hat{f}$ realizînd comutativitatea diagramei (5.1), corespunde lui f. Dar dacă $\hat{f}$ induce f, atunci, după teorema 5.1, 2°, există χ_f unic determinat de $\hat{f}$, care face comutativă diagrama (5.2) și astfel prima parte a punctului 3° este verificată.

Să presupunem acum că $\hat{f}$ induce χ_f și să luăm un punct $p \in X$ și un punct $\hat{p} \in \Pi_G^{-1}(p)$. Oricare alt punct al mulțimii $\Pi_G^{-1}(p)$ va fi de forma $T(\hat{p})$ cu $T \in G$. Avem

$$\Pi_{G'}[\hat{f}(T(\hat{p}))] = \Pi_{G'}[\chi_f(T)(\hat{f}(\hat{p}))] = \Pi_{G'}[\hat{f}(\hat{p})] = p'$$

și definim univoc $f(p) = p'$. Cum Π_G și $\Pi_{G'}$ sînt omeomorfisme locale, f este continuă. Afirmația 3° este astfel complet demonstrată, iar 2° rezultă din teorema 5.1, 2°.

Condiția 4° este necesară după observația 3.1. Ea este și suficientă, deoarece oricare ar fi $p \in X$, dacă $G \subset G^*$, mulțimea $\Pi_{G'}\{\hat{f}[\Pi_G^{-1}(p)]\}$ se reduce la un punct. Notînd p' acest punct, definim $f(p) = p'$.

PROPOZIȚIA 5.2. *Păstrînd notațiile de mai sus, fie* $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{X}'$ *o aplicație continuă, care induce aplicația* $f : X \to X'$ *și omomorfismul* $\chi_f : G \to G'$.

1°. *Dacă* $\hat{f}$ *este aplicație surjectivă, atunci* f *are aceeași proprietate, dar* χ_f *poate să nu fie surjectiv.*

2°. *Dacă* $\hat{f}$ *este aplicație injectivă,* χ_f *este injectiv, dar proprietatea nu este adevărată pentru* f.

Fie $\hat{f}$ surjectivă și $p' \in X'$. Atunci există $\hat{p} \in (\Pi_{G'} \circ \hat{f})^{-1}(p')$ și notînd $\Pi_G(\hat{p}) = p \in X$, avem $f(p) = p'$. Dacă $\hat{f}$ este injectivă, χ_f are aceeași proprietate după cum rezultă din (5.2′).

Celelalte două afirmații ale propoziției 5.2 sînt ilustrate prin următorul exemplu: Fie $\hat{X} = \hat{X}' = X = U$ semiplanul superior, X' torul cu două găuri, iar $\hat{f} = \Pi_G$ aplicația identică. Atunci $f = \Pi_{G'}$, iar χ_f este aplicația lui G în subgrupul unitate al lui G'. Omeomorfismul surjectiv $\hat{f}^{-1}$ nu induce aplicații $X' \to X$ sau $G' \to G$.

PROPOZIȚIA 5.3. *Condiția necesară și suficientă pentru ca omeomorfismul surjectiv* $\hat{f}$ *să inducă un omeomorfism (surjectiv)* f *este ca* $G' = \hat{f} G \hat{f}^{-1}$ [16].

În adevăr, pentru ca $\hat{f}$ să inducă un omeomorfism f este necesar și suficient ca atît $\hat{f}$ cît și $\hat{f}^{-1}$ să inducă o aplicație $X \to X'$ respectiv $X' \to X$. Conform teoremei 5.2, 4°, pentru aceasta este necesar și suficient ca $G \subset \hat{f}^{-1} G' \hat{f}$, grupul transformărilor acoperirii $(\hat{X}, \Pi_{G'} \circ \hat{f}, X')$ și $G' \subset \hat{f} G \hat{f}^{-1}$ grupul transformărilor acoperirii $(\hat{X}', \Pi_G \circ \hat{f}^{-1}, X)$, de unde rezultă propoziția 5.3 [17]).

3. Din rezultatele stabilite vom deduce acum o primă proprietate a claselor de aplicații continue omotope între două spații topologice X și X', liniar conexe și local simplu conexe.

---

[13]) Am notat $\hat{f} G \hat{f}^{-1}$ grupul transformărilor $\hat{f} \circ T \circ \hat{f}^{-1}$, pentru $T \in G$.

[17]) Propoziția 5.3 se poate demonstra și folosind teorema 5.2, 3°: Dacă $\hat{f}$ induce omeomorfismul surjectiv f, atunci $\hat{f}$ induce χ_f și relația (5.2) implică $\hat{f} G \hat{f}^{-1} \subset G'$; cum $\hat{f}^{-1}$ induce f^{-1}, putem scrie și incluziunea contrară. Invers, dacă $\hat{f} G \hat{f}^{-1} = G'$, atunci $\hat{f}$ induce χ_f definit prin relația $\chi_f(T) = \hat{f} \circ T \circ \hat{f}^{-1}$, oricare ar fi $T \in G$; prin urmare $\hat{f}$ induce o aplicație continuă f. Raționînd analog asupra lui $\hat{f}^{-1}$, deducem că f este omeomorfism surjectiv.

TEOREMA 5.3. *Fie* $f_k : X \to X'$, $k = 0,1$, *două aplicații continue, cărora le corespund, după teorema* 5.1, *aplicațiile* $\hat{f}_k$ *și omeomorfismele* $\chi_k = \chi_{j_k}$. *Dacă* f_k *sînt omotope,* χ_k *diferă printr-un automorfism interior al grupului* G'.

Fie $\{g_t\}_{t \in I}$ o familie de aplicații continue $X \to X'$, care realizează deformarea continuă a lui f_0 în f_1 cu $g_0 = f_0$ și $g_1 = f_1$, conform § 1, pct. 1. Alegem $p_0 \in X$ și notăm cu λ_t drumul descris de $g_{t'}(p_0)$, cînd t' parcurge segmentul $[0, t]$. Luînd $\hat{p}_0 \in \Pi_G^{-1}(p_0)$ și $\hat{p}_0' = \hat{f}_0(\hat{p}_0)$, transportăm din $\hat{p}_0'$ drumul λ_t prin drumul $\hat{\lambda}_t$, a cărui extremitate o notăm cu $\hat{p}_t'$. Definim $\hat{g}_t : \hat{X} \to \hat{X}'$, după teorema 5.1, 1°, astfel încît $\Pi_{G'} \circ \hat{g}_t = g_t \circ \Pi_G$ și $\hat{g}_t(\hat{p}_0) = \hat{p}_t'$. Să arătăm că omorfismele $\chi_{\hat{g}_t}$ corespunzătoare coincid. În acest scop să luăm o transformare arbitrară $T \in G$ și să verificăm relația

$$\chi_{\hat{g}_t}(T)\,[\hat{g}_t(\hat{p}_0)] = \chi_{\hat{g}_0}(T)\,[\hat{g}_t(\hat{p}_0)].$$

Fie $\hat{\alpha}$ un drum unind $\hat{p}_0$ cu $T(\hat{p}_0)$, $\alpha = \Pi_G(\hat{\alpha})$ și $\alpha_t = g_t(\alpha)$. Punctul $\chi_{\hat{g}_t}(T)[\hat{g}_t(\hat{p}_0)]$ este extremitatea transportatului din $\hat{p}_0'$ a drumului $\lambda_t\,\alpha_t$, iar punctul $\chi_{\hat{g}_0}(T)\,[\hat{g}_t(\hat{p}_0)]$ extremitatea transportatului din $\hat{p}_0'$ a drumului $\alpha_0\,\lambda_t$. Aceste două puncte coincid, fiindcă drumul $\lambda_t\,\alpha_t\,\lambda_t^{-1}\,\alpha_0^{-1}$ este nul-omotop, cum se vede lăsînd t să tindă la 1. Deoarece $\hat{f}_0 = \hat{g}_0$ și $\hat{f}_1 = A' \circ \hat{g}_1$ pentru un anumit $A' \in G'$, deducem că $\chi_0(T) = \chi_{\hat{g}_0}(T)$ și $\chi_1(T) = A' \circ \chi_{\hat{g}_1}(T) \circ A'^{-1} = A' \circ \chi_0(T) \circ A'^{-1}$, oricare ar fi $T \in G$.

Dacă grupăm în aceeași clasă omomorfismele $G \to G'$, care se obțin unul din altul prin compunere cu un automorfism interior al lui G', teorema 5.3 admite și următoarea formulare:

TEOREMA 5.3'. *Fiecărei clase de aplicații continue omotope* : $X \to X'$, *îi corespunde o clasă de omomorfisme* $G \to G'$, *diferind prin automorfisme interioare ale lui* G' [18]).

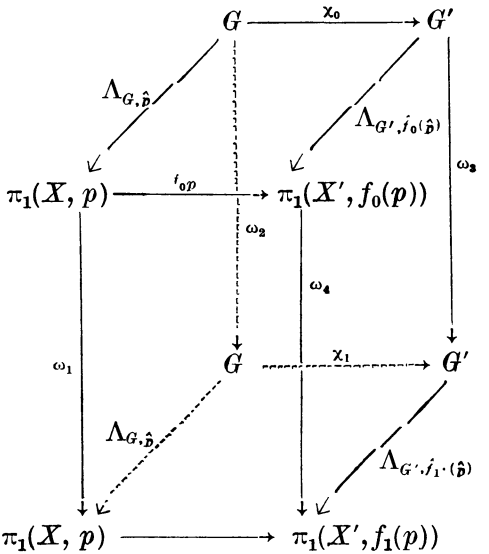
Teorema 5.3 se completează cu ajutorul rezultatului următor:

TEOREMA 5.4. *Fie* $f_k : X \to X'$, $k = 0, 1$, *două aplicații continue, cărora le corespund, după teorema 5.1, aplicațiile* $\hat{f}_k$ *și omomorfismele* $\chi_k = \chi_{j_k}$, *și care induc, după teorema 1.1, omomorfismele* f_{kp} *pentru fiecare punct* $p \in X$. *Condiția necesară și suficientă ca* f_{kp} *să fie echivalente este ca* χ_1 *să se deducă din* χ_0 *printr-un automorfism interior al grupului* G'.

---

[18]) Evident, dacă aplicației continue $f : X \to X'$ îi asociem aplicația continuă $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{X}'$ și omomorfismul χ_j, oricare ar fi omomorfismul χ din clasa lui χ_j, deci de forma $\chi(T) = A' \circ \chi_j(T) \circ A'^{-1}$ cu un anumit A' din G' și T arbitrar din G, aplicînd teorema 5.1 deducem că χ corespunde tot aplicației f, căreia i se asociază acum $A' \circ \hat{f}$.

Să formăm diagrama



pentru $\hat{p} \in \Pi_G^{-1}(p)$ și $\omega_k (k = 1, 2, 3, 4)$, aplicații ce vor fi definite mai jos. Fața superioară și cea inferioară sînt comutative, conform relației (5.3′).

1°. Să presupunem că există $A' \in G'$, astfel încît

$$\chi_1(T) = A' \circ \chi_0(T) \circ A'^{-1}$$

oricare ar fi $T \in G$. Vom alege ω_1 și ω_2 transformarea identică, ω_3 automorfismul interior al lui G' determinat de A' și $\omega_4 = \Lambda_{G', f_1(\hat{p})} \circ \omega_3 \circ \Lambda^{-1}_{G', f_0(\hat{p})}$. Deducem $\omega_4 \circ f_{0p} = f_{1p} \circ \omega_1$ și cum, din propoziția 4.1, rezultă că ω_1 și ω_4 sînt izomorfisme permise, prin definiție f_{0p} și f_{1p} sînt echivalente.

2° Reciproc, să presupunem f_{kp} echivalente și să alegem ω_1 și ω_4 izomorfismele permise, corespunzătoare acestei echivalențe. Propoziția 4.1 asigură că $\omega_2 = \Lambda^{-1}_{G,\hat{p}} \circ \omega_1 \circ \Lambda_{G,\hat{p}}$ și $\omega_3 = \Lambda^{-1}_{G', f_1(\hat{p})} \circ \omega_4 \circ \Lambda_{G', f_0(\hat{p})}$ sînt automorfisme interioare. Fie $A \in G$ și $A' \in G'$ elementele ce determină aceste automorfisme. Deducem $\chi_1 \circ \omega_2 = \omega_3 \circ \chi_0$ sau, pentru orice $T \in G$,

$$A' \circ \chi_0(T) \circ A'^{-1} = \chi_1(A \circ T \circ A^{-1}) = \chi_1(A) \circ \chi_1(T) \circ \chi_1(A)^{-1};$$

deci, notînd $B' = \chi_1(A)^{-1} \circ A'$, obținem

$$\chi_1(T) = B' \circ \chi_0(T) \circ B'^{-1}.$$

Ținînd seama de teorema 5.4, putem scrie:

TEOREMA 5.3″. *Dacă aplicațiile continue* $f_k : X \to X'$, $k = 0, 1$, *sînt omotope, omomorfismele* $f_{kp} : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X', f_k(p))$ *sînt echivalente, oricare ar fi* $p \in X$.

În virtutea teoremei 1.1′ și propoziției 1.8, avem de asemenea

TEOREMA 5.3‴. *Fie* $f_k : X \to X'$, $k = 0, 1$, *aplicații continue și* $F_k : \pi_1(X) \to \pi_1(X')$ *omomorfisme corespunzătoare. Dacă* f_k *sînt omotope,* F_k *diferă printr-un automorfism interior al lui* $\pi_1(X')$.

Prin urmare, *fiecărei clase de aplicații continue omotope* : $X \to X'$ *îi corespunde univoc o clasă de omomorfisme* $\pi_1(X) \to \pi_1(X')$, *care se obțin unul din altul prin compunere cu automorfisme interioare ale grupului* $\pi_1(X')$.

În Cap. III, § 1, vom demonstra pentru X și X' suprafețe riemanniene, X' neechivalentă conform cu sfera, reciproca teoremei 5.3.

4. O altă proprietate importantă a claselor de aplicații omotope este legată de *teoria grupurilor de omologie.* Deoarece această teorie este expusă de pildă în manualul de topologie al lui C. Teleman [45], vom folosi această carte. Vom presupune astfel cunoscute noțiunile de simplex standard, simplex liniar, simplex singular, grupurile de omologie singulară ale unui spațiu topologic X, pe care le vom nota $\mathcal{H}^q(X)$, $q = 0, 1, \ldots$ fiind dimensiunea ([45], p. 86—91) și vom menționa :

TEOREMA 5.5. *O aplicație continuă* f *a spațiului topologic* X *în spațiul topologic* X' *induce un omomorfism* $\varphi^k : \mathcal{H}^k(X) \to \mathcal{H}^k(X')$. *Dacă* f *este un omeomorfism surjectiv, atunci* φ^k *este izomorfism surjectiv.*

Într-adevăr, fiecărui k-simplex singular σ^k definit de k-simplexul liniar $'\sigma^k$ și de aplicația continuă $g : {}'\sigma^k \to \sigma^k$ i se asociază k-simplexul definit de $'\sigma^k$ și $f \circ g$, pe care-l vom nota cu $f(\sigma^k)$. Fie $C^k(X)$, $Z^k(X)$ și $B^k(X)$ respectiv $C^k(X')$, $Z^k(X')$ și $B^k(X')$ grupurile k-lanțurilor singulare, k-ciclelor singulare și k-frontierelor singulare ale spațiilor X și X'. Se stabilește omomorfismul $\Phi^k : C^k(X) \to C^k(X')$, care face să corespundă fiecărui $\alpha^k = \sum_\nu a_\nu \sigma_\nu^k \in C^k(X)$ (a_ν întregi, σ_ν^k k-simplexe singulare pe X), k-lanțul singular $\Phi^k(\alpha^k) = \sum_\nu a_\nu \Phi^k(\sigma_\nu^k) \in C^k(X')$. Se verifică relația $\Phi^{k-1}(\partial\alpha^k) = \partial\Phi^k(\alpha^k)$, de unde rezultă $\Phi^k[Z^k(X)] \subset Z^k(X')$ și $\Phi^k[B^k(X)] \subset B^k(X')$. Prin urmare Φ^k induce omomorfismul φ^k : dacă $\alpha^k \in Z^k(X)$ și $\dot{\alpha}^k$ este clasa lui α^k în $\mathcal{H}^k(X)$, atunci $\varphi^k(\dot{\alpha}^k) = \widehat{\Phi^k(\alpha^k)}$ din $\mathcal{H}^k(X')$. Dacă f este omeomorfism surjectiv, Φ^k și φ^k sînt izomorfisme surjective (A se vedea [45], p. 94).

CONSECINȚA 5.1. *Grupurile de omologie sînt invarianți topologici.*

TEOREMA 5.6. *Două aplicații continue* $f_j : X \to X'$, $j = 1, 2$, *omotope induc același omomorfism între grupurile de omologie de aceeași dimensiune* k, *deci unei clase de aplicații continue omotope* $X \to X'$ *îi corespunde un omomorfism* $\mathcal{H}^k(X) \to \mathcal{H}^k(X')$. (A se vedea demonstrația în [45], p. 121.)

5. În Cap. II vom folosi de asemenea posibilitatea de a deforma o aplicație continuă într-una simplicială. Vom da, în acest scop, următoarele definitii si rezultate :

5.1. Numim *complex n-dimensional* un spațiu topologic K^n, care admite o *descompunere simplicială*, i.e. pe K^n se află o mulțime cel mult numărabilă de k-simplexe topologice [19]) $(k = 0, 1, \ldots, n)$ [20]) astfel încît:

1° O dată cu un simplex din K^n, toate simplexele care sînt fețe ale lui (sînt incidente cu el) aparțin lui K^n.

2° Orice punct din K^n aparține unui simplex din K^n și numai unui număr finit de simplexe din K^n.

3° Două simplexe din K^n sînt fie disjuncte, fie unul este o față a celuilalt, fie au o față comună, care formează intersecția lor.

4° Fie p un punct arbitrar din K^n și σ_i $(i = 1, \ldots, N)$ simplexele care îl conțin (de dimensiuni de la 0 la n). Dacă $v_{i,p}$ $(i = 1, \ldots, N)$ sînt vecinătăți ale lui p în σ_i, atunci $\bigcup_{i=1}^{N} v_{i,p}$ este o vecinătate a lui p în K^n.

Un complex poate admite mai multe descompuneri simpliciale. Vom numi *complex simplicial*, un complex K^n împreună cu o anumită descompunere simplicială $\mathcal{D}$.

PROPOZIȚIA 5.4. *O mulțime K din spațiu euclidian n-dimensional E_n, formată dintr-o mulțime cel mult numărabilă de k-simplexe liniare (k putînd lua valori de la 0 la n), este un complex simplicial dacă satisface condiția 3° de mai sus și dacă orice punct $p \in K$ are o vecinătate, care intersectează numai un număr finit de simplexe.*

Condiția 4° rezultă luînd, pentru fiecare $\sigma_i \ni p$, o vecinătate $v_{i,p} = \sigma_i \cap B_{\varepsilon_i}(p)$ (unde $B_{\varepsilon_i}(p)$ este bula din E_n cu centrul p și rază $\varepsilon_i > 0$) și alegînd un număr pozitiv $\eta < \varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ și suficient de mic ca $B_\eta(p) \cap K \subset \bigcup_{i=1}^{N} \sigma_i$; evident, $B_\eta(p) \cap K \subset \bigcup_{i=1}^{N} v_{i,p}$.

Orice complex K poate fi descris cu ajutorul unei *scheme*, care cuprinde pentru fiecare k-simplex din K, un șir de $k+1$ litere desemnînd vîrfurile simplexului. Într-adevăr, două simplexe diferite ale unui complex simplicial nu pot avea aceleași vîrfuri.

PROPOZIȚIA 5.5. *Două complexe simpliciale K și K^* cu aceeași schemă sînt omeomorfe: ele se reprezintă topologic unul pe celălalt, astfel încît fiecare simplex din K să fie reprezentat liniar pe simplexul din K^*, cu același corespondent în schemă.*

Într-adevăr, fiecare simplex σ din K, cu preimaginea simplexul liniar $'\sigma$ și omeomorfismul $\varphi : {}'\sigma \to \sigma$, are după schemă un corespunzător

[19]) Spre deosebire de simplexele k-dimensionale (k-simplexele) singulare, care sînt imagini continue de k-simplexe liniare, k-simplexele topologice sînt imagini topologice de k-simplexe liniare. Două k-simplexe singulare (topologice) σ_j^k, $j = 1, 2$, definite de k-simplexele liniare $'\sigma_j^k$ și de aplicațiile continue (topologice) $f_j : {}'\sigma_j^k \to \sigma_j^k$ se numesc egale, dacă mulțimile σ_j^k coincid și dacă există transformarea liniară afină $A : {}'\sigma_1^k \to {}'\sigma_2^k$, astfel încît $f_2 \circ A = f_1$.

[20]) K^n conține cel puțin un n-simplex topologic. Pentru simplificarea expunerii, vom folosi denumirea simplex pentru simplex topologic.

σ^* din K^* cu preimaginea $'\sigma^*$ și omeomorfismul $\varphi^* : {}'\sigma^* \to \sigma^*$. Fie A transformarea afină ${}'\sigma \to {}'\sigma^*$ determinată de corespondența vîrfurilor din schemă. Luînd $f = \varphi^* \circ A \circ \varphi^{-1}$ pentru punctele lui σ, se arată că f este un omeomorfism al lui K pe K^*. *Vom spune că f reprezintă liniar σ pe $f(\sigma)$.*

PROPOZIȚIA 5.6. *Orice complex simplicial n-dimensional K se reprezintă topologic pe un complex simplicial liniar* (i.e. format din simplexe liniare) *K^* din E_{2n+1}, astfel încît fiecare dintre simplexele lui K să fie reprezentat liniar pe simplexul imagine.*

Pentru a stabili propoziția 5.6, să observăm că o mulțime cel mult numărabilă M, în care s-au fixat anumite submulțimi distinse, constituie *schema* unui n-complex simplicial K^* (i.e. există o corespondență biunivocă între elementele lui M și vîrfurile lui K^*, prin care submulțimile distinse din M trec în vîrfurile simplexelor lui K^*), atunci și numai atunci cînd sînt îndeplinite următoarele condiții :

1° Orice submulțime distinsă are cel mult $n + 1$ elemente (dar există cel puțin o submulțime cu $n + 1$ elemente).

2° Orice submulțime a unei submulțimi distinse este de asemenea submulțime distinsă.

3° Orice element din M este cuprins numai într-un număr finit de submulțimi distinse.

Aceste condiții sînt evident necesare, după cum rezultă din definiția n-complexelor. Suficiența lor se obține prin următoarea construcție : Alegem în E_{2n+1} mulțimea de puncte P_i în corespondență biunivocă cu elementele din M și astfel încît

a) $\{P_i\}$ să nu aibă nici un punct de acumulare.

b) Pentru $k \leqslant 2n + 1$, orice mulțime de $k + 1$ puncte din $\{P_i\}$ determină un spațiu liniar k-dimensional.

Alegerea punctelor P_i se face inductiv. Luate punctele $P_1, \ldots, P_r$, se alege P_{r+1} astfel încît coordonata sa x_1 să fie cu cel puțin o unitate mai mare decît coordonatele x_1 ale punctelor $P_1, \ldots, P_r$ (ceea ce asigură condiția a)) și P_{r+1} să nu aparțină nici unui spațiu liniar determinat de k dintre punctele $P_1, \ldots, P_r$ ($k \leqslant 2n + 1$) (aceasta este posibil, fiindcă spațiile liniare, care nu trebuie să includă punctul P_{r+1} sînt în număr finit și au dimensiunea $\leqslant 2n$; se realizează astfel condiția b)). Se asociază fiecărei submulțimi distinse de $k + 1$ elemente din M, k simplexul liniar cu vîrfurile în punctele P_i corespunzătoare și se verifică cu ajutorul propoziției 5.4 că mulțimea K^* formată de aceste simplexe este un n-complex simplicial. Fie σ' și σ'' două simplexe diferite din K^* de dimensiuni k' respectiv k'' ; numărul $k + 1$ al tuturor vîrfurilor lui σ' și σ'' este $\leqslant (k' + 1) + (k'' + 1) \leqslant 2n + 2$, deci aceste vîrfuri întind un k-simplex liniar σ, care cuprinde ca fețe σ' și σ'' (eventual σ ar putea coincide cu σ' sau cu σ'') ; se deduce de aici condiția 3° din propoziția 5.4. Pe de altă parte, dacă $Q \in K^*$ și $r > 0$, numai un număr finit de puncte P_i pot aparține bulei $B_r(Q)$, datorită ipotezei relative la $x_1(P_i)$; deci numai un

număr finit de simplexe din K^* intersectează $B_r(Q)$, după condiția 3° impusă lui M.

Propoziția 5.6 rezultă acum imediat, construind K^* pentru o mulțime M corespunzătoare schemei lui K și aplicînd propoziția 5.5.

Pe baza propoziției 5.6 putem înlocui în diferite raționamente K prin K^*, operație pe care o vom numi *scufundarea* lui K în E_{2n+1}. Să observăm că prin acest procedeu oricare ar fi simplexul σ din K între preimaginea sa $'\sigma$ și imaginea σ^* din K^* avem o transformare liniară, deci pentru reprezentarea liniară a unui simplex din K pe un simplex dintr-un complex K' este totuna să folosim preimaginile lor liniare sau scufundarea lui K și K' în spații euclidiene. Ca o aplicație demonstrăm:

PROPOZIȚIA 5.7. *Fie F o aplicație: $K \times I \to K'$, unde K și K' sînt complexe simpliciale. Dacă:*

1) *F este continuă pe $K \times \{0\}$ și pe $K \times \{1\}$ și*

2) *pentru orice $p \in K$, punctele $F(p, 0)$ și $F(p, 1)$ aparțin aceluiași simplex din K', iar F aplică liniar segmentul $\{p\} \times I \subset K \times I$ pe segmentul din K', ce unește $F(p, 0)$ și $F(p, 1)$*[21]),

atunci F este continuă pe $K \times I$.

Considerăm K și K' ca submulțimi ale spațiului euclidian E_N de coordonate $x_1, \ldots, x_N$, respectiv E_M de coordonate $y_1, \ldots, y_M$. Atunci $K \times I$ va fi o submulțime din E_{N+1}, un punct arbitrar avînd coordonatele $x_1, \ldots, x_N$, t, iar aplicația F se va exprima prin formulele:

$$y_j(x_1, \ldots, x_N, t) = y_j(x_1, \ldots, x_N, 0)\ (1 - t) + y_j(x_1, \ldots, x_n, 1)\ t,$$

cu $j = 1, 2, \ldots, M$. Prin ipoteză, $y_j(x_1, \ldots, x_N, k)$, $k = 0, 1$, sînt funcții continue, deci F este continuă.

5.2. Fiind dat un complex simplicial K, prin *steaua de simplexe* cu centrul într-un vîrf $p \in K$ înțelegem totalitatea simplexelor din K, în care p este vîrf.

PROPOZIȚIA 5.8. *Prin subdiviziunea simplexelor unui complex se poate obține o descompunere simplicială oricît de fină a complexului.*

De exemplu, fiind dată o acoperire deschisă a complexului K, putem obține o descompunere simplicială, astfel încît fiecare simplex (mai mult, fiecare stea de simplexe) să fie inclus într-o mulțime a acoperirii.

Pentru demonstrație se folosește subdiviziunea baricentrică a simplexelor [22]) ([45], p. 108) și teorema lui Lebesgue ([45], p. 84). Dacă complexul K este finit (i.e. are un număr finit de simplexe), este suficientă aplicarea repetată a subdiviziunii baricentrice ([45], p. 119—120). În cazul cînd K are o infinitate de simplexe, prin subdiviziunea bari-

[21]) Prin segment unind două puncte dintr-un simplex σ al unui complex înțelegem imaginea segmentului ce unește punctele corespunzătoare în simplexul liniar $'\sigma$, preimagine a lui σ. F aplică liniar $\{p\} \times I$ pe segmentul din preimagine.

[22]) În cazul 2-dimensional, cînd descompunerea simplicială este o triangulare, subdiviziunea baricentrică este descrisă în [40], p. 209.

centrică repetată, aplicată fiecărui simplex în parte, putem face ca simplexele (respectiv stelele de simplexe) obținute să fie cuprinse fiecare într-o mulțime a acoperirii și apoi completa descompunerea pînă la o descompunere simplicială a lui K.

5.3. Numim *aplicație simplicială* a unui complex simplicial K^n într-un complex simplicial K'^m o aplicație continuă $f : K^n \to K'^m$, prin care orice simplex σ^k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ din K^n este *reprezentat liniar* pe un simplex σ'^j $(j \leqslant k)$ din K'^m.

O aplicație simplicială este unic determinată de corespondența vîrfurilor, care trebuie să satisfacă numai condiția următoare : vîrfurile unui simplex din K^n trebuie să fie transformate în vîrfurile unui simplex din K'^m.

TEOREMA 5.7. *Fie K^n și K'^m două complexe simpliciale, iar $f_0 : K^n \to K'^m$ o aplicație continuă. Presupunem descompunerea simplicială $\mathcal{D}$ a lui K^n suficient de fină pentru ca imaginea prin f_0 a fiecărei stele de simplexe din această descompunere să fie inclusă în interiorul unei stele de simplexe din descompunerea simplicială $\mathcal{D}'$ a lui K'^m* [23]). *Atunci f_0 este omotopă cu o aplicație simplicială f_1.* Mai mult, se poate construi f_1 astfel încît imaginea fiecărui simplex σ din $\mathcal{D}$ să rămînă în tot timpul deformării continue a lui f_0 în f_1, inclusă în simplexul de dimensiune minimă din $\mathcal{D}'$, în care se găsea $f_0(\sigma)$.

Să asociem fiecărui vîrf p_0 din diviziunea $\mathcal{D}$ un vîrf p'_0 din diviziunea $\mathcal{D}'$, astfel încît steaua cu centrul p'_0 să includă în interior imaginea prin f_0 a stelei cu centrul p_0. În acest mod, vîrfurilor unui simplex σ din $\mathcal{D}$ le corespund vîrfurile unui simplex σ' din $\mathcal{D}'$: Dacă p_j sînt vîrfurile lui σ, punctele p'_j pot fi distincte sau confundate, dar $f_0(\sigma)$ este inclus în interiorul fiecărei stele cu vîrful p'_j. Fie $p \in \sigma$, iar $\widetilde{\sigma}'$ simplexul de dimensiune minimă din $\mathcal{D}'$, ce conține $f_0(p)$; atunci $\widetilde{\sigma}'$ aparține stelelor din p'_j, deci p'_j sînt vîrfuri ale lui $\widetilde{\sigma}'$. Prin urmare, p'_j sînt vîrfurile unui simplex σ' din $\mathcal{D}'$ și corespondența stabilită mai sus definește o aplicație simplicială $f_1 : K^n \to K'^m$, prin care $f_1(p) \in \sigma' \subset \widetilde{\sigma}'$.

Aplicațiile f_0 și f_1 sînt omotope, după cum se verifică construind $F : K^n \times I \to K'^m$, în modul următor : Notînd cu p un punct arbitrar din K^n, luăm $F(p, k) = f_k(p)$ pentru $k = 0, 1$ și $F(p, t)$ aplicația liniară a segmentului $\{p\} \times I$ pe segmentul ce unește $f_0(p)$ cu $f_1(p)$ în simplexul din $\mathcal{D}'$ de dimensiune minimă ce conține $f_0(p)$. Conform propoziției 5.7, aplicația F este continuă.

---

[23]) Aceasta este posibil după propoziția 5.8, preimaginile interioarelor stelelor de simplexe din $\mathcal{D}'$ formînd o acoperire deschisă a lui K^n.

Capitolul II

Suprafețe riemanniene

§ 1. Definiții

Vom prezenta în acest capitol o parte din elementele de topologia suprafețelor necesare în expunerea teoriei lui Teichmüller. Astfel, pentru a putea studia clasele de omotopie ale omeomorfismelor $f : R \to R_0$, unde R și R_0 sînt suprafețe riemanniene închise de gen g, vom folosi reprezentarea unei suprafețe ca factorizare a suprafeței de acoperire universală prin grupul transformărilor de acoperire și reprezentarea ei printr-un poligon fundamental.

Vom lua ca punct de plecare : „Teoria funcțiilor de o variabilă complexă" a lui S. Stoilow, [40], Cap. VII, din care reamintim următoarele definiții și rezultate :

1. Numim *varietate 2-dimensională* sau *suprafață* (*topologică*) un spațiu topologic, Hausdorff, conex, local euclidian 2-dimensional. (A se vedea [40], p. 187).

Oricărui punct p_0 dintr-o suprafață R i se poate asocia o vecinătate[1]) v_{p_0}, reprezentată topologic pe $|z| < 1$ printr-un omeomorfism

$$z = t_{p_0}(p),$$

astfel încît $t_{p_0}(p_0) = 0$. Această vecinătate, omeomorfismul și cercul imagine corespunzător, $K_{p_0} : |z| < 1$, se numesc *vecinătate parametrică*, *reprezentare parametrică* respectiv *cerc parametric*, iar variabila z se numește *parametrul local asociat punctului* p_0 ([40], p. 188). Dacă v_{p_0} și $v_{p_0'}$ sînt două vecinătăți parametrice pe R cu intersecția nevidă, atunci omeomorfismul

$$z = t_{p_0} \circ t_{p_0'}^{-1}(z')$$

al mulțimii deschise $t_{p_0}(v_{p_0'} \cap v_{p_0'})$ din $K_{p_0'} : |z'| < 1$ pe mulțimea deschisă $t_{p_0}(v_{p_0} \cap v_{p_0'})$ din K_{p_0} se numește *relație de vecinătate* ([40], p. 189).

[1]) În cele ce urmează vom considera vecinătăți deschise și conexe, afară de cazul cînd vom face explicit alte ipoteze.

O *suprafață riemanniană* (*abstractă, suprafață riemanniană în sensul Weyl-Radó sau varietate analitică complexă cu dimensiunea complexă* 1) este o suprafață pe care s-au definit pentru fiecare punct vecinătăți și reprezentări parametrice astfel încît relațiile de vecinătate să fie reprezentări conforme [2]) ([40], p. 189).

Se stabilește imediat echivalența definiției de mai sus cu următoarea :

O pereche (v, t) formată din deschisul v de pe suprafața R și omeomorfismul t al lui v pe un deschis din planul complex C al variabilei z se numește *hartă*, iar z se numește *parametrul local* (*coordonată locală*) în deschisul v. Două hărți (v, t) și (v^*, t^*) sînt *compatibile conform* (*olomorf*), dacă, în ipoteza $v \cap v^* \neq \emptyset$, omeomorfismul $t^* \circ t^{-1}$ este o reprezentare conformă a lui $t(v \cap v^*)$ pe $t^*(v \cap v^*)$. O familie de hărți $\mathcal{A} = \{(v_i, t_i)\}_{i \in \mathcal{J}}$, unde $\mathcal{J}$ este o mulțime de indici, constituie un *atlas conform* (*olomorf*) pe R, dacă hărțile din $\mathcal{A}$ sînt două cîte două compatibile conform și $\{v_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ formează o acoperire a lui R. Se spune că $\mathcal{A}$ înzestrează R cu o *structură conformă*. Două atlase $\mathcal{A} = \{(v_i, t_i)\}_{i \in \mathcal{J}}$ și $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{v}_j, \tilde{t}_j)\}_{j \in \mathcal{J}}$ (unde $\mathcal{J}$ este tot o mulțime de indici) definesc pe R aceeași structură conformă, dacă totalitatea hărților celor două atlase formează un atlas conform. Se numește suprafață riemanniană perechea $(R, \mathcal{A})$, unde R este o suprafață, iar $\mathcal{A}$ un atlas conform pe R ([19], p. 243 ; [38], p. 59 ; [7], Cap. II, §1.1).

În cele ce urmează vom folosi atît noțiunea de parametru local asociat unui punct, cît și aceea mai generală de parametru local în sensul de mai sus.

Fie R și R' două suprafețe riemanniene. O aplicație continuă $f : R \to R'$ se numește *analitică*, dacă oricare ar fi $p_0 \in R$, v_{p_0} și $v'_{p'_0}$, $p'_0 = f(p_0)$, vecinătăți parametrice și $z = t_{p_0}(p)$ respectiv $z' = t'_{p'_0}(p')$ reprezentări parametrice corespunzătoare, aplicația $z' = t'_{p'_0} \circ f \circ t^{-1}_{p_0}(z)$ este o funcție olomorfă pe $t_{p_0}[f^{-1}(v'_{p'_0}) \cap v_{p_0}] \subset K_{p_0}$. (Definiția se formulează imediat și în cazul cînd R și R' sînt date prin atlase $\mathcal{A} = \{(v, t)\}$ și $\mathcal{A}' = \{(v', t')\}$: oricare ar fi $p_0 \in R$, dacă $v \ni p_0$ și $v' \ni p'_0$, atunci $t' \circ f \circ t^{-1}$ este olomorfă în domeniul ei de definiție). ([40], p. 188 ; [7], Cap. II, § 1,2 ; [38], p. 60 ; [19], p. 244).

Dacă aplicația analitică f este un omeomorfism al suprafeței R pe R', ea va fi numită *reprezentare conformă*. Două suprafețe riemanniene R și R' sînt *conform echivalente*, dacă există o reprezentare conformă a lui R pe R'.

2. Unul dintre rezultatele fundamentale ale teoriei lui S. Stoilow dă caracterizarea topologică a suprafețelor riemanniene : *Orice suprafață riemanniană este o suprafață orientabilă și triangulabilă și reciproc, orice*

[2]) Vom considera numai reprezentări conforme care păstrează orientarea, exceptînd cazul cînd vom menționa contrariul.

suprafață orientabilă și triangulabilă se poate organiza ca o suprafață riemanniană. (A se vedea [40], Cap. VII și III—IV).

Reamintim : o suprafață R se numește *orientabilă*, dacă se pot defini vecinătăți parametrice astfel încît relațiile de vecinătate să fie omeomorfisme, care păstrează orientarea.

O suprafață orientabilă se numește *orientată*, dacă s-a ales o acoperire a ei cu vecinătăți și reprezentări parametrice, care are această proprietate. *O suprafață riemanniană este orientată prin structura conformă, care o definește.*

Suprafața R se numește *triangulabilă* dacă se poate defini pe ea o mulțime cel mult numărabilă de triunghiuri T_n (adică imagini topologice de triunghiuri plane) satisfăcînd condițiile :

1) $\bigcup T_n = R$.

2) Dacă $n \neq m$, atunci $T_n \cap T_m$ este mulțimea nulă, un vîrf comun sau o latură comună.

3) Orice punct din R are o vecinătate, care nu conține puncte decît dintr-un număr finit de triunghiuri T_n. Evident, o suprafață triangulabilă este un complex 2-dimensional, (Cap. I, § 5. 5).

Suprafețele se grupează în două clase topologice distincte : *suprafețe compacte* (*închise*) și *suprafețe necompacte* (*deschise*), după cum formează sau nu un spațiu topologic compact [3]). În prezentarea de față a teoriei lui Teichmüller ne vom ocupa de suprafețe riemanniene închise, de aceea remarcăm în legătură cu clasificarea topologică a suprafețelor, numai *teorema lui Jordan* ([40], Cap. VII, V) :

Se numește *gen* al unei suprafețe R numărul maxim de curbe simple închise, disjuncte două cîte două, care se pot trasa pe R fără a o descompune.

Condiția necesară și suficientă pentru ca două suprafețe triangulabile și orientabile închise să fie omeomorfe este ca ele să aibă același gen.

Dacă N_0, N_1 și N_2 reprezintă numărul vîrfurilor, laturilor respectiv triunghiurilor unei triangulări a unei suprafețe triangulabile și orientabile, închise R, atunci *formula lui Euler* ([40], p. 215) dă genul g al lui R :

$$-N_0 + N_1 - N_2 = 2g - 2 \tag{1.1}$$

sau caracteristica lui R

$$o = 2g - 2. \tag{1.1'}$$

[3]) În lucrările clasice relative la suprafețele riemanniene cuvîntul compact este folosit în sensul lui Alexandroff și Hopf : orice mulțime infinită de puncte ale spațiului are cel puțin un punct de acumulare în el ([47], p. 25; [40], p. 194; [31], p. 50). Pentru suprafețele triangulabile, care sînt caracterizate de verificarea unei axiome de numărabilitate ([41], p. 98; [31] p. 57), noțiunea de compact dată mai sus echivalează cu aceea dată în [15], p. 100 — satisfacerea axiomei Borel-Lebesgue — și numită bicompacitate de Alexandroff și Hopf ([8] p. 382, teorema 1). O suprafață compactă în sensul verificării axiomei Borel-Lebesgue este triangulabilă.

Tipul topologic al suprafețelor triangulabile și orientabile închise de gen g este torul (discul) cu g găuri ($g = 0$ sfera, $g = 1$ torul). Uneori se folosește imaginea canonică plană a suprafeței cu ajutorul căreia se demonstrează teorema lui Jordan citată mai sus ([40], p. 213—214).

§ 2. Acoperiri

1. În acest paragraf vom considera acoperiri $(\tilde{R}, f, R)$, unde $\tilde{R}$ și R sînt suprafețe. Cum orice suprafață este un spațiu topologic separat, local simplu conex și liniar conex, vom putea aplica rezultatele demonstrate în capitolul I.

PROPOZIȚIA 2.1. *Fie R o suprafață riemanniană și $(\tilde{R}, f, R)$ o acoperire neramificată. Suprafața $\tilde{R}$ se poate organiza ca suprafață riemanniană cu ajutorul lui f, care devine aplicație analitică.*

Într-adevăr, oricare ar fi $\tilde{p} \in \tilde{R}$, există vecinătatea $\tilde{U}_{\tilde{p}}$ a lui $\tilde{p}$, reprezentată omeomorf de f pe o vecinătate U_p a lui $p = f(\tilde{p})$. Deoarece R este o suprafață riemanniană, există o vecinătate parametrică V_p a lui p și o reprezentare conformă φ_p a lui V_p pe $|z| < 1$, cu $\varphi_p(p) = 0$. Pentru $\rho > 0$ suficient de mic, $W_p = \varphi_p^{-1}(|z| < \rho) \subset V_p \cap U_p$ este o vecinătate a lui p reprezentată conform prin $\Phi_p = \frac{1}{c}\varphi_p$ pe cercul unitate. Luăm $\tilde{W}_{\tilde{p}} = f\big|^{-1}_{\tilde{U}_{\tilde{p}}}(W_p)$ și $\tilde{\varphi}_{\tilde{p}} = \Phi_p \circ f\big|_{\tilde{W}_{\tilde{p}}}$ ca vecinătate respectiv reprezentare parametrică a lui $\tilde{p}$ și se verifică imediat că relațiile de vecinătate sînt conforme. În acest mod, f a devenit aplicație olomorfă, căci în parametrii locali se scrie ca o omotetie. Spunem că am transportat cu ajutorul lui f structura conformă de pe R pe $\tilde{R}$.

Vom numi acoperirea neramificată $(\tilde{R}, f, R)$, unde $\tilde{R}$ și R sînt suprafețe riemanniene, iar f aplicație olomorfă, *acoperire riemanniană neramificată*. Structura conformă a lui $\tilde{R}$ coincide cu cea indusă de f de pe R pe $\tilde{R}$.

PROPOZIȚIA 2.2. *Transformările de acoperire ale unei acoperiri riemanniene neramificate $(\tilde{R}, f, R)$ sînt reprezentări conforme ale suprafeței $\tilde{R}$ pe ea însăși.*

Fie T o transformare de acoperire, $\tilde{p}$ un punct din $\tilde{R}$, $p = f(\tilde{p})$ și $\tilde{p}_1 = T(\tilde{p})$. Fie $\tilde{U}_{\tilde{p}}$ și $\tilde{U}_{1\tilde{p}_1}$ vecinătăți ale punctelor $\tilde{p}$ și $\tilde{p}_1$, reprezentate conform de f pe U_p respectiv U_{1p}, V_p o vecinătate a lui p din $U_p \cap U_{1p}$, $\tilde{V}_{\tilde{p}} = f\big|^{-1}_{\tilde{U}_{\tilde{p}}}(V_p)$ și $\tilde{V}_{1\tilde{p}_1} = f\big|^{-1}_{\tilde{U}_{1\tilde{p}_1}}(V_p)$.

În $\tilde{V}_{\tilde{p}}$ are loc egalitatea $T = f\big|^{-1}_{\tilde{U}_{1\tilde{p}_1}} \circ f$, deci T reprezintă conform $\tilde{V}_{\tilde{p}}$ pe $\tilde{V}_{1\tilde{p}_1}$.

Din propozițiile 3.1—3.3, Cap. I, rezultă :

Consecința 2.1. *Grupul transformărilor acoperirii* $(\widetilde{R}, f, R)$ *considerate în propoziția 2.2, este un subgrup discontinuu, fără punct fix al grupului reprezentărilor conforme ale suprafeței* $\widetilde{R}$ *pe ea însăși.*

O reciprocă a rezultatelor de mai sus decurge din

PROPOZIȚIA 2.3. *Fie* $\widetilde{R}$ *o suprafață riemanniană și* G *un subgrup de reprezentări conforme al lui* $\widetilde{R}$ *pe el însuși, astfel încît fiecare punct* $\tilde{a} \in \widetilde{R}$ *are o vecinătate* $\tilde{U}_{\tilde{a}}$ *cu următoarele proprietăți :*

1°. *Oricare ar fi transformările* $T_1 \neq T_2$ *din* G, *avem* $T_1(\tilde{U}_{\tilde{a}}) \cap T_2(\tilde{U}_{\tilde{a}}) = \varnothing$.

2°. *Orice compact* $\widetilde{K} \subset \widetilde{R}$ *intersectează numai un număr finit de mulțimi* $T(\tilde{U}_{\tilde{a}})$, *unde* $T \in G$.

Grupul G definește în $\widetilde{R}$ relația de echivalență :

$$\tilde{a} \sim_G \tilde{b} \Leftrightarrow \tilde{b} = T(\tilde{a}) \text{ pentru un } T \in G \tag{2.1}$$

$(\tilde{a}, \tilde{b} \in \widetilde{R})$. Să notăm cu $a = \{\tilde{p} \in \widetilde{R}, |\ \tilde{p} \sim_G \tilde{a}\}$, cu $R = \widetilde{R}/G$ și cu Π_G aplicația $\tilde{a} \to a$. Introducem pe R topologia de spațiu cît, luînd ca mulțimi deschise în R mulțimile O pentru care $\Pi_G^{-1}(O)$ sînt deschise în $\widetilde{R}$.

Putem organiza R *ca suprafață riemanniană, astfel încît* $(\widetilde{R}, \Pi_G, R)$ *devine o acoperire riemanniană neramificată, fără frontieră, iar* G *este grupul transformărilor de acoperire corespunzător.*

Cum pentru orice deschis $\tilde{O} \subset \widetilde{R}$ și $T \in G$, mulțimea $T(\tilde{O})$ este deschisă și cum $\Pi_G^{-1}[\Pi_G(\tilde{O})] = \bigcup_{T \in G} T(\tilde{O})$, deducem că aplicația Π_G este deschisă.

Restricția lui Π_G la fiecare $\tilde{U}_{\tilde{a}}$ este un omeomorfism (conform proprietății 1°) și, luînd pentru $a \in R$ vecinătatea $U_a = \Pi_G(\tilde{U}_{\tilde{a}})$, unde $\tilde{a}$ este un punct din $\Pi_G^{-1}(a)$ și pentru fiecare punct $\tilde{a}' = T(\tilde{a})$ cu $T \in G$, vecinătatea $T(\tilde{U}_{\tilde{a}})$, se verifică imediat că acoperirea $(\widetilde{R}, \Pi_G, R)$ este neramificată, fără frontieră, iar G este grupul transformărilor de acoperire. (Fie G grupul transformărilor de acoperire. Evident, $G \subset \widetilde{G}$. Totodată G este tranzitiv și $\widetilde{G}$ satisface propoziția 3.3 din Cap. I. Rezultă deci $G = \widetilde{G}$.)

Spațiul R este separat : Fie a și b două puncte diferite din R, $\tilde{a} \in \Pi_G^{-1}(a)$ și $\tilde{b} \in \Pi_G^{-1}(b)$. Oricare ar fi $T \in G$, $T(\tilde{a}) \neq \tilde{b}$. Să luăm o vecinătate $\tilde{U}_{\tilde{a}}$ cu proprietatea 2° și o vecinătate $\widetilde{V}_{\tilde{b}}$ relativ compactă. Există cel mult un număr finit de transformări $T_j \in G$, $j = 1, \ldots N$, astfel încît $T_j(\tilde{U}_{\tilde{a}}) \cap \overline{\widetilde{V}_{\tilde{b}}} \neq \varnothing$, iar pentru fiecare indice j, există vecinătățile $\tilde{U}_{\tilde{a}}^j$ și $\widetilde{V}_{\tilde{b}}^j$ astfel încît $T_j(\tilde{U}_{\tilde{a}}^j) \cap \widetilde{V}_{\tilde{b}}^j = \varnothing$. Notînd $\widetilde{W}_{\tilde{a}} = \tilde{U}_{\tilde{a}} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{N} \tilde{U}_{\tilde{a}}^j\right)$ și $\widetilde{W}_{\tilde{b}} = \widetilde{V}_{\tilde{b}} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N} \widetilde{V}_{\tilde{b}}^j\right)$, se verifică imediat că, oricare ar fi T' și T'' din G, $T'(\widetilde{W}_{\tilde{a}}) \cap T''(W_{\tilde{b}}) = \varnothing$. Prin urmare, $\Pi_G(\widetilde{W}_{\tilde{a}})$ și $\Pi_G(\widetilde{W}_{\tilde{b}})$ sînt vecinătăți disjuncte ale lui a și b.

Din cele stabilite mai sus rezultă că R este o suprafață. Înzestrăm R cu o structură conformă, folosind faptul că Π_G este un omeomorfism

local : Pentru fiecare $a \in R$, luăm un punct $\tilde{a} \in \Pi_G^{-1}(a)$, o vecinătate parametrică $\tilde{v}_{\tilde{a}} \subset \tilde{U}_{\tilde{a}}$ (unde $\tilde{U}_{\tilde{a}}$ are proprietatea 1°) și reprezentarea parametrică corespunzătoare $\tilde{t}_{\tilde{a}}$. Apoi definim vecinătatea parametrică a lui a: $v_a = \Pi_G(\tilde{v}_{\tilde{a}})$ cu reprezentarea parametrică $t_a = \tilde{t}_{\tilde{a}} \circ \Pi_G \big|^{-1}_{\tilde{U}_{\tilde{a}}}$. (Dacă $v_a \cap v_b \neq \emptyset$, relația de vecinătate $t_b \circ t_a^{-1} = \tilde{t}_{\tilde{b}} \circ T \circ \tilde{t}_{\tilde{a}}^{-1}$, unde T este o transformare din G și anume : fie $c \in v_a \cap v_b$, $\tilde{c}_1 \in \tilde{v}_{\tilde{a}}$ și $\tilde{c}_2 \in \tilde{v}_{\tilde{b}}$ puncte cu proiecția c; atunci $T(\tilde{c}_1) = \tilde{c}_2$). Aplicația Π_G este evident olomorfă. [4])

Consecința 2.2. *Dacă* $(\tilde{R}, f, R)$ *este o acoperire neramificată, fără frontieră, surjectivă,* $\tilde{R}$ *este o suprafață riemanniană, iar grupul* G *al transformărilor de acoperire este tranzitiv și format din reprezentări conforme ale lui* $\tilde{R}$ *pe* $\tilde{R}$, *atunci putem organiza* R *ca suprafață riemanniană astfel încît* f *să devină aplicație olomorfă.*

Să luăm pentru fiecare punct $p \in R$ și pentru fiecare $\tilde{p} \in f^{-1}(p)$, vecinătatea v_p respectiv $\tilde{v}_{\tilde{p}}$ cu proprietățile indicate în definiția acoperirilor neramificate, fără frontieră (Cap. I, § 2, pct. 3) și relativ compacte (ceea ce este posibil căci $\tilde{R}$, deci și R, este local euclidian). Să alegem o vecinătate u_p cu $\overline{u}_p \subset v_p$ și pentru fiecare $\tilde{p}$, vecinătatea $\tilde{u}_{\tilde{p}} = (\Pi_G \big|^{-1}_{\tilde{v}_{\tilde{p}}})(u_p)$. Condiția 1° din propoziția 2.3 rezultă din observația 2.5, Cap. I. Dacă condiția 2° nu ar fi îndeplinită, ar exista un compact $\tilde{K} \subset \tilde{R}$, o infinitate de transformări diferite $T_j \in G$, $j = 1, 2 \ldots$ și o infinitate de puncte $\tilde{x}_j \in T_j(\tilde{u}_{\tilde{p}}) \cap \tilde{K}$, astfel încît $\tilde{x}_j \to \tilde{x}_0$. Evident, $x_j = \Pi_G(\tilde{x}_j) \to x_0 = \Pi_G(\tilde{x}_0) \in v_p$, iar $\tilde{x}_0 \in T^*(\tilde{v}_{\tilde{p}})$, pentru un anumit $T^* \in G$. Cum mulțimile $T(\tilde{v}_{\tilde{p}})$, $T \in G$, sînt disjuncte două cîte două, în $T^*(\tilde{v}_{\tilde{p}})$ se poate afla cel mult un punct din șirul $\tilde{x}_j$, ceea ce este absurd.

După propoziția 2.3 de mai sus, putem organiza $\tilde{R}/G$ ca suprafață riemanniană, astfel încît Π_G să devină aplicație olomorfă. Observația 3.4 din Cap. I arată însă că R este omeomorfă cu $\tilde{R}/G$; prin urmare, R se poate organiza în mod natural ca suprafață riemanniană conform echivalentă cu $\tilde{R}/G$. În cele ce urmează, vom identifica R cu $\tilde{R}/G$ și f cu Π_G.

2. Vom aplica aceste rezultate în cazul acoperirii universale $(\hat{R}, \Pi_G, R)$ a unei suprafețe riemanniene R (Cap. I, § 4). Conform propoziției 2.1, $\hat{R}$ este o suprafață riemanniană și, după aliniatul precedent, vom identifica suprafețele riemanniene conform echivalente R și $\hat{R}/G$.

Suprafața de acoperire universală $\hat{R}$ este o suprafață riemanniană (omotop) simplu conexă. După teorema lui Riemann ([31], Cap. VI; [7], Cap. III, 11 și 16 D; [32] § 34; [38], 9—1), *orice suprafață riemanniană simplu conexă este conform echivalentă cu sfera lui Riemann* (tipul eliptic), *cu planul euclidian* (tipul parabolic) *sau cu semiplanul* (tipul iperbolic). Prin urmare, grupul G al transformărilor de acoperire este

[4]) Se demonstrează că în locul condiției 1° se poate cere ca G să fie fără punct fix ([35], p. 19). O teoremă analogă cu propoziția 2.3 este dată în [7], p. 121.

un subgrup discontinuu de transformări fără punct fix al grupului H de reprezentări conforme a lui $\hat{R}$ pe el însuși, deci luînd $\hat{R}$ planul complex, planul euclidian sau semiplanul — un *grup de transformări liniare.*

Să analizăm pe rînd cele trei cazuri, care rezultă din teorema lui Riemann :

a) $\hat{R}$*-sfera lui Riemann.* Grupul H al reprezentărilor conforme ale lui $\hat{R}$ pe el însuși este grupul transformărilor liniare, dar cum orice transformare liniară are puncte fixe, $G = \{1_{\hat{R}}\}$, iar R este de asemenea sfera. [5])

b) $\hat{R}$*-planul euclidian.* H este grupul transformărilor liniare întregi, iar G poate fi

b.1) $\{1_{\hat{R}}\}$,

b.2) un grup de translații cu un generator, sau

b.3) un grup de translații cu doi generatori : $z' = z + m\,\omega_1 + n\omega_2$, m și n întregi, ω_1 și ω_2 numere complexe, cu $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ nereal, ([39], p. 157—162). Prin urmare R va fi respectiv

b.1) planul euclidian,

b.2) cilindrul sau

b.3) torul. [6])

c) $\hat{R}$*-semiplanul superior* : $U = \{z \mid \Im z > 0\}$. În acest caz H este grupul transformărilor liniare reale, care invariază sensul de parcurs al axei reale

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \text{ cu } a, b, c, d \text{ reali și } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0, \tag{2.2}$$

iar G este un *grup Fuchs*, denumire dată de Poincaré unui *subgrup al lui H, format din transformări fără punct fix în U și discontinuu.* Cum punctele fixe distincte sau confundate ale unei transformări din G trebuie să aparțină axei reale, rezultă că G este un grup de transformări iperbolice sau parabolice și cuprinde o mulțime cel mult numărabilă de transformări, mulțimea $\{T(z)\}_{T \in G}$ fiind formată din puncte izolate, fără punct de acumulare în U. În acest caz se încadrează toate suprafețele riemanniene R închise de gen $g > 1$ sau deschise, diferite de planul punctat sau dublu punctat.

---

[5]) Putem raționa și astfel : $\hat{R}$ este suprafață compactă, deci R va fi compactă de gen g, acoperirea va avea un număr finit de foi n, iar formula Hurwitz va da $0 = n\,(2-2g) - 2$, ([40], p. 216) ; rezultă $g = 0$ și $n = 1$, deci R este o sferă.

[6]) Se verifică ușor că $\hat{R}/G$ este echivalent conform în cazul b.2) cu cilindrul obținut dintr-o bandă cuprinsă între două drepte paralele din planul euclidian prin identificarea punctelor celor două drepte frontieră, care sînt echivalente relativ la G. (Ca vecinătate parametrică se ia imaginea prin Π_G a unui cerc suficient de mic ca aplicația Π_G să fie injectivă în el). Tot astfel în cazul b.3), suprafața riemanniană $\hat{R}/G$ este conform echivalentă cu torul format prin identificarea punctelor echivalente relativ la G ale unui paralelogram fundamental ([39], p. 161 și p. 177 ; [29], p. 611—612).

§ 3. Grupuri Fuchs

1. Vom considera drept reprezentant al clasei suprafețelor riemanniene simplu conexe de tip iperbolic, semiplanul superior $U = \{z \mid \Im z > 0\}$ înzestrat cu metrica lui Poincaré, după care elementul de arc în punctul z este dat de

$$d\sigma_z = \frac{|dz|}{y} \tag{3.1}$$

și vom nota distanța neeuclidiană între două puncte $z_1, z_2 \in U$ cu

$$d(z_1, z_2) = \ln(k, z_1, z_2, h) = \ln\left(\frac{z_1 - h}{z_1 - k} \cdot \frac{z_2 - k}{z_2 - h}\right), \tag{3.2}$$

unde h și k sînt punctele în care dreapta neeuclidiană prin z_1 și z_2 (cercul euclidian ortogonal axei reale, care trece prin z_1 și z_2) intersectează $\Im z = 0$, notate astfel încît z_2 se află între z_1 și h ([39], p. 79—81). Semiplanul înzestrat cu această metrică constituie un model de geometrie Lobacevski. Diferitele noțiuni geometrice, care vor fi folosite în paragraful de față : distanță, dreaptă, cerc etc. vor fi luate în sensul acestei geometrii, afară de cazul cînd se va specifica contrariul, iar pentru prescurtarea expunerii, vom suprima în general adjectivul neeuclidian.

Grupul H al reprezentărilor conforme ale semiplanului U pe el însuși constă din transformările liniare reale cu determinant pozitiv, (2.2). Ele invariază metrica $d\sigma_z$ și constituie deplasările neeuclidiene corespunzătoare acestei geometrii.

Să notăm cu $\mathcal{C}$ grupul omeomorfismelor $U \xrightarrow[\text{pe}]{} U$, cu $\mathcal{C}_0$ subgrupul omeomorfismelor din $\mathcal{C}$, care păstrează orientarea, și cu $\mathcal{C}_1$ subgrupul celor care se prelungesc la omeomorfisme ale lui $\overline{U}$ pe el însuși ($\overline{U}$ fiind închiderea lui U în planul complex). Evident, $H \subset \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_1$.

2. În cele ce urmează vom aprofunda proprietățile subgrupurilor lui H, discontinue, formate din transformări fără punct fix, pe care le-am numit, în § 2, pct. 2, *grupuri Fuchs*.

Fie G un grup Fuchs. El introduce în U relația de echivalență :

$$z_1 \sim_G z_2 \Leftrightarrow z_2 = T(z_1) \text{ pentru un } T \in G. \tag{3.3}$$

Propoziția 3.1. *Spațiul topologic cît U/G se organizează ca suprafață riemanniană, astfel încît aplicația canonică $\Pi_G : U \to U/G$ să fie olomorfă.*

Vom nota $U/G = R$; evident, (U, Π_G, R) este acoperirea universală a lui R. Pentru $a \in U$ și $r > 0$, fie

$$C_r(a) = \{z \in U,\ d(z, a) < r\}.$$

Deducem propoziția 3.1 din propoziția 2.3, luînd pentru fiecare punct $a \in U$, vecinătatea $U_a = C_\rho(a)$, cu $\rho \in \left(0, \frac{d(a)}{2}\right)$ și $d(a) = \inf_{T \in G} d[a, T(a)]$ și verificînd condițiile 1° și 2° :

1°. Dacă ar exista un punct $z \in T_1(U_a) \cap T_2(U_a)$, unde T_1 și T_2 sînt două transformări diferite din G, atunci

$$d[a, T_1^{-1} \circ T_2(a)] = d[T_1(a), T_2(a)] \leqslant d[T_1(a), z] + d[z, T_2(a)] < d(a),$$

ceea ce este absurd.

2°. Fie K un compact din U și r un număr pozitiv, astfel încît $K \subset C_r(a)$. Dacă $T(a) \notin C_{r+\rho}(a)$, atunci $T(U_a) \cap C_r(a) = \varnothing$, deoarece din relația $z \in T(U_a) \cap C_r(a)$ ar rezulta

$$d[a, T(a)] \leqslant d(a, z) + d[z, T(a)] < r + \rho.$$

Cum există cel mult un număr finit de puncte $T(a)$ în $C_{r+\rho}(a)$, există cel mult un număr finit de transformări $T \in G$ pentru care

$$T(U_a) \cap K \neq \varnothing.$$

3. *Numim domeniu fundamental al grupului G* o mulțime conexă, (de fapt, domeniu împreună cu anumite puncte din frontiera sa), formată din puncte ce alcătuiesc un sistem complet de reprezentanți ai lui U/G :

1°. Două puncte din Σ nu sînt echivalente relativ la G.

2°. Orice punct din U este echivalent cu un punct din Σ.

Închiderea $\bar{\Sigma}$ a lui Σ luată în raport cu planul complex z se numește *domeniu fundamental închis al lui G*.

Evident, putem caracteriza $\bar{\Sigma}$ prin proprietățile :

1° $\bar{\Sigma}$ este o mulțime închisă.

2° Orice punct din $\overset{\circ}{\bar{\Sigma}}$ nu are echivalent relativ la G în $\bar{\Sigma}$.

3° Orice punct din U are cel puțin un echivalent relativ la G în $\bar{\Sigma}$.

Convenim să înțelegem în acest paragraf [7]) prin *poligon* — un domeniu Jordan $P \subset \overline{U}$ a cărui curbă frontieră ∂P este descompusă într-o mulțime cel mult numărabilă de arce Jordan l_ν, numite *laturi*, astfel încît

1° Intersecția a două laturi este vidă sau se reduce la un punct, numit *vîrf*.

2° După cum există un număr finit respectiv o infinitate de laturi, $\bigcup l_\nu$ respectiv $\overline{\bigcup l_\nu} = \partial P$.

Vîrfurile lui P sînt extremități de laturi sau puncte de acumulare de laturi.

Un *poligon fundamental al grupului G* este un poligon $P \subset \overline{U}$, domeniu fundamental închis relativ la G, astfel încît sînt îndeplinite următoarele condiții :

1°. O latură este : 1) un segment din $\Im z = 0$ sau 2) este inclusă în U, exceptînd eventual una sau ambele extremități ; în cazul 1) latura se numește *liberă*, iar în cazul 2) *interioară*.

[7]) Vom vedea în § 4, propoziția 4.2, că în aplicațiile pe care le urmărim vor interveni numai poligoane cu un număr finit de laturi.

2°. Laturile interioare se grupează în perechi *echivalente* în sensul că orice punct z interior unei laturi interioare l are exact un punct echivalent $z' \in P$, care este punct interior unei laturi interioare l', $l' \neq l$, iar transformarea $T \in G$, care duce z în z', transformă l în l'.

Se verifică imediat:

PROPOZIȚIA 3.2. *Un punct z_0 interior lui P sau interior unei laturi libere nu are echivalent în P, în timp ce oricare alt punct din $\partial P \cap U$ are în P* (mai precis pe $\partial P \cap U$) *cel puțin un echivalent.*

Iată de exemplu raționamentul pentru $z_0 \in \mathring{P}$: Să presupunem că ar exista $z_0' \sim_G z_0$, $z_0' \in P$. Atunci ar exista $T \in G$ cu $z_0' = T(z_0)$ și conform ipotezei, $z_0' \in \partial P$. Fie v o vecinătate a lui z_0 inclusă în $\mathring{P}$; $v' = T(v)$ va fi o vecinătate a lui z_0' și va conține $z_1' \in \mathring{P}$. Prin urmare $T^{-1}(z_1') = z_1 \in v \subset \mathring{P}$ și am ajuns la o contradicție. În cazul z_0 interior unei laturi libere, se ia o vecinătate v a lui z_0 relativă la U.

Dacă $z_0 \in \partial P \cap U$ să luăm un șir de puncte $z_n \in U - P$, $z_n \to z_0$ și un șir $\tilde{z}_n = T_{k_n}(z_n) \in P$. Vom presupune (înlocuind eventual șirul z_n cu un subșir) că $\tilde{z}_n \to \tilde{z}_0 \in P$. Din $d[T_{k_n}^{-1}(\tilde{z}_0), z_0] \to 0$ și din proprietatea grupului G de a fi discontinuu, rezultă, pentru n suficient de mare, că $T_{k_n}^{-1}(\tilde{z}_0) = z_0$ (și că T_{k_n} coincid).

4. Să notăm cu T_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) transformările grupului G și cu T_0 transformarea identică.

PROPOZIȚIA 3.3. *Dacă P este un poligon fundamental al grupului G, poligoanele fundamentale $P_n = T_n(P)$ formează o descompunere poligonală a lui U.*

Într-adevăr, $\bigcup P_n \supset U$, deoarece orice punct z din U are cel puțin un echivalent $z_0 \in P$ și dacă $z = T_n(z_0)$, atunci $z \in T_n(P)$. Intersecția a două poligoane P_m și P_n pentru $m \neq n$ este sau vidă sau constă din laturi comune sau din vîrfuri comune. Aceasta rezultă din observarea că $T_n^{-1}(P_m \cap P_n)$ și $T_m^{-1}(P_m \cap P_n)$ sînt submulțimi din P echivalente (prin transformarea $T_m^{-1} \circ T_n$), astfel încît ele sînt incluse pe ∂P. Dacă prima submulțime conține un punct z_0 din interiorul unei laturi l_h, după condiția 2° impusă poligoanelor fundamentale, $T_m^{-1} \circ T_n$ duce toată latura l_h într-o latură $l_{h'}$ a lui P, iar $T_n(l_h) = T_m(l_{h'}) \subset P_m \cap P_n$.

Observația 3.1. Fie z un punct din U. Evident, există vecinătăți ale acestui punct, care nu includ nici un poligon $T(P)$, $T \in G$, deoarece în cazul contrar un cerc (neeuclidian) cu centrul z ar include o infinitate de poligoane $\{T_{k_j}(P)\}$, $j = 1, 2, \ldots$, cu $T_{k_j} \in G$ diferite între ele și mulțimea punctelor echivalente cu un punct din plan ar avea un punct de acumulare. În orice vecinătate compactă în U a lui z se găsesc puncte numai dintr-un număr finit de poligoane $T(P)$: Altfel ar exista în U un punct z^* de acumulare de puncte luate în poligoane diferite și mai mult, dacă γ e un cerc din U cu centrul z^*, care nu include nici un poligon $T(P)$, pe orice circumferință cu centrul z^*, inclusă în γ, se va

găsi un punct de acumulare de puncte luate în poligoane diferite. Am avea o mulțime de puterea continuului de astfel de puncte, care sînt toate vîrfuri de poligoane, și cum există o mulțime numărabilă de poligoane și un poligon are o mulțime cel mult numărabilă de vîrfuri, am ajuns la o contradicție. Prin urmare, *orice vîrf din U aparține la un număr finit de poligoane.*

PROPOZIȚIA 3.4. *Fie z un vîrf din U al poligonului P. Între poligoanele P_n incidente cu z și vîrfurile lui P echivalente cu acest punct se poate stabili o corespondență biunivocă, asociind fiecărui $P_n = T_n(P)$ punctul $z_n = T_n^{-1}(z)$.*

Evident, dacă $P_n \neq P_m$ și $z_m = T_m^{-1}(z)$, atunci $z_n \neq z_m$. De asemenea, din $T_n(z) \in P$ rezultă $T_n^{-1}(P)$ incident cu z. Prin urmare, dacă P are N vîrfuri echivalente cu z, există N poligoane P_n incidente cu punctul z.

5. Se numește *transformare fundamentală* a grupului G, o transformare T, care duce o latură interioară l a lui P în latura echivalentă l'.

PROPOZIȚIA 3.5. *Grupul G este generat de transformările fundamentale.*

Într-adevăr, dacă $P' = T'(P)$ este un poligon adiacent la P în lungul laturii l, atunci $T'^{-1}(l)$ este o latură a lui P, deci T'^{-1} este o transformare fundamentală. Fie acum $P^* = T^*(P)$ un poligon adiacent la P'; poligonul $T'^{-1}(P^*)$ este adiacent la P și prin urmare, după raționamentul de mai sus, există transformarea fundamentală T'', astfel încît $T''^{-1} \circ T'^{-1}(P^*) = P$, deci $T^* = T' \circ T''$. Orice poligon $\widetilde{P} = \widetilde{T}(P)$ se poate uni cu P printr-un lanț format dintr-un număr finit de poligoane P_n cu proprietatea că două poligoane consecutive au o latură comună cel puțin, deci $\widetilde{T}$ este produsul unui număr finit de transformări fundamentale.

PROPOZIȚIA 3.6. *Să orientăm ∂P și să notăm cu l și l' două laturi echivalente de pe ∂P înzestrate cu orientările induse. Dacă T este transformarea fundamentală, care duce l în l' și dacă notăm cu $T(l)$ imaginea lui l prin T împreună cu orientarea determinată de transformarea T, atunci $T(l)$ și l' sînt orientate în sens opus.*

Pentru demonstrație se folosește indicele unei curbe în raport cu un punct și faptul că T păstrează orientarea, ceea ce revine la exprimarea următoarei observații geometrice: P și $T(P)$ sînt adiacente în lungul laturei l'; ∂P și $\partial T(P)$ sînt orientate coerent și induc pe l' orientările opuse l' respectiv $T(l)$.

Consecința 3.1. Două laturi echivalente l și l' de pe frontiera unui poligon fundamental P nu pot avea un vîrf comun în U.

Într-adevăr, după propoziția 3.6, un vîrf comun lui l și l' este punct fix pentru T, deci aparține lui ∂U.

Consecința 3.2. Fie z_0 un vîrf din U al poligonului fundamental P. Vîrfurile lui P echivalente cu z_0 formează un ciclu, suma unghiurilor corespunzătoare fiind 2π.

Efectuînd eventual o schimbare de numerotare a transformărilor din G și orientînd ∂P, fie: l_1 latura lui P ce urmează lui z_0 în orientarea aleasă, l_1' latura echivalentă cu l_1, T_1 transformarea fundamentală $l_1 \to l_1'$, $z_1 = T_1(z_0)$; după consecința 3.1, $z_1 \neq z_0$; fie l_2 latura lui P, ce urmează lui z_1, l_2' latura echivalentă cu l_2, T_2 transformarea $l_2 \to l_2'$, $z_2 = T_2(z_1)$; dacă $z_2 \neq z_0$ și z_1, procedeul continuă. Deoarece z_0 are un număr finit de vîrfuri echivalente, există o primă etapă N, pentru care $z_N = T_N(z_{N-1}) = z_j$, j unul dintre indicii 0,1, ..., $N-1$ și după propoziția 3.6, rezultă $j = 0$ (altfel z_{N-1} ar coincide cu z_{j-1}). Prin urmare, cealaltă latură a lui P cu vîrful z_0 este l_N', latura echivalentă cu l_N. În jurul lui z_0 se așează ciclic poligoanele P, $T_1^{-1}(P)$, $T_1^{-1} \circ T_2^{-1}(P)$, ... $T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ \ldots$ ... $\circ\, T_{N-1}^{-1}(P)$, deci după propoziția 3.4, *ciclul* $z_0, z_1, \ldots z_{N-1}$ cuprinde toate vîrfurile echivalente cu z_0.

PROPOZIȚIA 3.7. *Să presupunem că a și b sînt două laturi interioare consecutive ale poligonului fundamental P cu vîrful comun $z \in U$ și că ambele laturi sînt duse de aceeași transformare fundamentală T în laturile echivalente a' respectiv b'. Atunci z are un singur vîrf echivalent $z' = T(z)$ pe ∂P.*

Putem lua un domeniu jordanian δ cu frontiera γ, conținînd punctul z în interior cu proprietățile următoare:

1) intersecția lui δ cu ∂P constă dintr-un arc jordanian $\alpha \subset a \cup b$, care descompune δ în două domenii jordaniene $\sigma_1 \subset P$ și σ_2;

2) intersecția domeniului jordanian $\delta' = T(\delta)$ cu ∂P este arcul $\alpha' = T(\alpha)$, care descompune δ' în domeniile jordaniene $\sigma_k' = T(\sigma_k)$, $k = 1, 2$[8]). Cum $\sigma_2' \subset P$, rezultă că $\sigma_2 \subset T^{-1}(P)$, deci z este vîrf numai pentru poligoanele P și $T^{-1}(P)$. După propoziția 3.4, punctul z are un singur echivalent pe ∂P.

Observația 3.2. În cele ce urmează *convenim să suprimăm vîrfurile de pe frontiera unui poligon fundamental P, care au un singur echivalent în poligon* (deci sînt vîrfuri comune la numai două poligoane $T(P)$). *Atunci, orice poligon fundamental P compact în U va avea un număr finit de vîrfuri.*

Evident, *condiția P compact în U este echivalentă cu $P \subset U$.*

Într-adevăr, dacă $\tilde{z} \in \partial P$ ar fi punct limită de vîrfuri $z_n \in \partial P$, cum în fiecare punct z_n sînt incidente cu P încă două poligoane cel puțin și într-o vecinătate v convenabil aleasă a lui $\tilde{z}$ se găsesc (după observația 3.1) puncte dintr-un număr finit de poligoane, o infinitate de puncte z_n ar trebui să fie comune la trei poligoane, ceea ce este absurd.

---

[8]) Domeniul δ se poate construi de exemplu astfel: luăm un cerc (neeuclidian) închis C' cu centrul z' și cu raza atît de mică încît $C' \cap \partial P \subset a' \cup b'$. Fie $C = T^{-1}(C')$, iar τ o reprezentare topologică a planului, care conține U, pe un plan, astfel încît $\tau(P)$ să fie un cerc închis. Un cerc închis Γ cu centrul $\zeta = \tau(z)$ inclus în $\overset{\circ}{\tau(C)}$ este descompus de arcul $A = \tau(\partial P) \cap \Gamma$ în două domenii jordaniene. Luăm $\delta = \tau^{-1}(\Gamma)$ și $\alpha = \tau^{-1}(A)$.

Observația 3.3. Oricare ar fi $T \in G$ și k număr natural, transformarea $T^k = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{\text{de } k \text{ ori}}$ este diferită de transformarea identică, după cum rezultă imediat folosind reducerea lui T la forma canonică.

PROPOZIȚIA 3.8. *Dacă poligonul fundamental P este compact în U, iar A, B, A' și B' sînt patru puncte distincte din ∂P, astfel încît există transformarea $T \in G$, pentru care $T(A) = A'$ și $T(B) = B'$, atunci:*

1° *Punctele A, B și A', B' determină pe ∂P două arce disjuncte a respectiv b.*

2° $T(a) = b$.

3° *Cele patru puncte se succed pe ∂P în ordinea A, B, B', A'.*

1°. Să notăm $P^k = T^k(P)$, k întreg. Punctele A' și B' (respectiv A și B) aparțin lui ∂P^1 (respectiv ∂P^{-1}), deci se pot uni în P^1 (respectiv în P^{-1}) printr-un arc λ (respectiv μ) situat în $\mathring{P}^1$ (respectiv în $\mathring{P}^{-1}$), exceptînd extremitățile. În ipoteza că punctele A', B' ar separa punctele A, B, arcele λ și μ ar avea un punct comun, care ar aparține mulțimii $\mathring{P}^1 \cap \mathring{P}^{-1}$, ceea ce este absurd.

2°. Procedînd din nou prin reducere la absurd, să presupunem că $a' = T(a)$ nu ar coincide cu b, ci ar avea în comun numai extremitățile A' și B' (ceea ce are întotdeauna loc înlocuind a printr-un subarc convenabil). Rezultă că A' și B' sînt vîrfuri, iar $a' \cup b$ limitează un domeniu jordanian D. Cum P este compact în U, domeniul D constă dintr-un număr finit N de poligoane fundamentale. Distingem două cazuri:

2°. 1. $P \not\subset D$.

2°. 1.1. În acest caz, $P^1 \not\subset D$. Într-adevăr, din ipoteza $P^1 \subset D$, deducem $T(A') = T^2(A) \in D \cap P^2$; dar $A' \notin a$, deci $T(A') \notin a'$; prin urmare $P^2 \subset D$ și repetînd raționamentul $P^k \subset D$, k număr natural oarecare, ceea ce este absurd. În concluzie, $\mathring{P}^1$ este situat în exteriorul lui D, iar $(a' - \{A', B'\}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{D \cup P^1}}$ sau $(a' - \{A', B'\}) \cap P = \varnothing$.

2°. 1.2. Fie $P^* = T^*(P)$ un poligon din D. Evident, $T^* \neq T$. Totodată, $T^* \neq T^{-1}$, deoarece $T^* = T^{-1}$ ar implica $T^*(A') = A \in D$ și cum, după concluzia punctului 2°. 1.1, $A \notin a' \cup b$, am avea $A \in P \cap \mathring{D}$ sau $P \subset D$, ceea ce contrazice ipoteza 2°. 1.

2°. 1.3. Să arătăm că $T^*(P^1) \subset D$. Transformarea T^* nu poate duce punctele A' și B' în B' respectiv A', deoarece T^{*2} ar fi identitatea (observația 3.3); prin urmare, unul dintre aceste puncte, de exemplu A', va avea imaginea $C = T^*(A')$, diferită de A' și B'. Deoarece $C \in D$, din cele de mai sus rezultă că $C \in \overset{\circ}{\overbrace{P \cup D \cup P^1}}$. Atunci $T^*(P^1) \subset P \cup D \cup P^1$ sau, folosind relația $T^* \neq T^{-1}$, demonstrată la punctul 2°. 1.2, obținem că $T^*(P^1) \subset D$.

2°. 1.4. Deoarece $T^*(P \cup P^1) \subset D$, rezultă că $T^*(a' \cup b) = T^*(\partial D) \subset D$ sau că $T^*(D) \subset D$. Domeniul $T^*(D)$ conține N poligoane

fundamentale. Fiindcă $T^*(P)$ este inclus în D, dar nu în $T^*(D)$, domeniul D conține cel puțin $N+1$ poligoane, ceea ce este absurd.

2°. 2. $P \subset D$.

2°. 2.1. Vom arăta că arcul a nu este inclus în întregime în a'. În cazul contrar, $T^{-1}(a)$ ar fi inclus în a și s-ar afla pe frontiera a trei poligoane distincte P^{-1}, P și P^1. Prin urmare, a' nu coincide cu arcul c, complementul lui b relativ la ∂P și există două puncte A^*, $B^* \in a' \cap c$, care determină un arc $a^* \subset a'$ situat, exceptînd extremitățile, în exteriorul lui c. (Eventual $A^* = A'$ sau $B^* = B'$.) Notînd cu c^* arcul determinat de $A^* B^*$ pe c, arcele a^* și c^* limitează un domeniu jordanian D^* format din N^* poligoane fundamentale, căruia îi vom aplica un raționament analog cu cel de mai sus.

2°. 2.2. Poligonul $P \not\subset D^*$, pentru că $P \subset D$ și putem uni un punct din $\mathring{P}$ cu ∂U printr-un drum continuu, care taie o dată arcul b, dar nu intersectează a' și c, deci ∂D^*. Ca și la punctul 2°. 1.1, deducem că $P^1 \not\subset D^*$.

2°. 2.3. Domeniul D^* conține un poligon $P^* = T^*(P)$ cu $T^* \neq T^{-1}$ și T. Pentru a demonstra aceasta, vom studia din nou două posibilități:

2°. 2.3.1. Dacă $a \subset c^*$, vom lua un punct $C' \in a^* - \partial P$, care aparține frontierei unui poligon $\widetilde{P} \neq P$ și P^1. Poligonul $P^* = T^{-1}(\widetilde{P})$ este diferit de P^{-1} și P. Cum $T^{-1}(C') \in a \cap \partial P^* \subset c^* \cap \partial P^*$ și $P^* \neq P$, deducem că $P^* \subset D^*$, iar conform punctului 2°. 2.2 avem $P^* \neq P^1$.

2°. 2.3.2. Să presupunem că una dintre extremitățile lui a, de exemplu A, nu aparține lui c^*, deci nici lui D^* și să luăm un poligon arbitrar $P^* = T^*(P)$ din D^*. Evident, $P^* \neq P$ și P^1; pe de altă parte, $P^* \neq P^{-1}$, deoarece $P^{-1} \ni A$.

2°. 2.4. Ca și la punctele 2°. 1.3 și 2°. 1.4 se arată că $T^*(P^1) \subset D^*$ și apoi că D^* cuprinde cel puțin $N^* + 1$ poligoane fundamentale, deoarece include $T^*(D^*)$ și P^*, care nu este cuprins în $T^*(D^*)$.

3°. Această afirmație se obține din rezultatele 1° și 2° și din propoziția 3.6. [9]).

Observația 3.4. Dacă P este un poligon fundamental compact în U, în care s-au redus eventualele vîrfuri cu un singur echivalent în P, conform observației 3.2, atunci perechi diferite de laturi echivalente determină transformări fundamentale diferite.

6. Propoziția 3.9. *Orice grup Fuchs G are un poligon fundamental.*

---

[9]) În enunțul propoziției 3.8 se puteau presupune distincte doar punctele A și B, deoarece atunci rezultă că toate cele patru puncte A, B, A' și B' sînt diferite între ele. Dacă am avea de exemplu $A' = B$, atunci $B' \neq A$. În ipoteza că arcele a' și b limitează un domeniu jordanian D, după cum $P \subset D$ sau $P \not\subset D$ se arată succesiv că $P^k \subset D$, $k > 0$ respectiv < 0, ținînd seama că T păstrează orientarea. Prin urmare arcele a' și b au cel puțin un punct de intersecție C' diferit de A' și B', iar $C = T^{-1}(C') \in a$ și este diferit de A și B. Putem aplica propoziția 3.8 punctelor A, C și A', C' și contrazicem punctul 3°.

Fie z_0 un punct arbitrar din U, dar fixat în cele ce urmează și T_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, transformările lui G (T_0 transformarea identică). Să notăm cu M mulțimea punctelor $z \in U$, care satisfac relațiile

$$\mathrm{d}(z, z_0) \leqslant \mathrm{d}[T_k(z), z_0], \tag{3.4}$$

pentru orice $T_k \in G$. Închiderea $\overline{M}$ a mulțimii M în raport cu planul complex formează un poligon fundamental, numit *poligonul fundamental metric*.

1°. Evident, relațiile (3.4) sînt echivalente cu următoarele:

$$\mathrm{d}(z, z_0) \leqslant \mathrm{d}[z, T_k(z_0)], \tag{3.5}$$

deoarece $\mathrm{d}[T_k(z), z_0] = \mathrm{d}[z, T_k^{-1}(z_0)]$ și $T_k^{-1} = T_h$ pentru un anume indice h.

2°. Mulțimea punctelor $z \in U$, care pentru un k fix, $k \neq 0$, satisfac relația

$$\mathrm{d}(z, z_0) \leqslant \mathrm{d}[z, T_k(z_0)],$$

formează un semiplan (neeuclidian) S_k închis în U, limitat de dreapta (neeuclidiană) D_k

$$\mathrm{d}(z, z_0) = \mathrm{d}[z, T_k(z_0)].$$

Prin urmare, $M = \bigcap S_k$ și M este o mulțime convexă.

3°. Interiorul lui M este format din punctele $z \in U$, astfel încît

$$\mathrm{d}(z, z_0) < \mathrm{d}[z, T_k(z_0)],$$

oricare ar fi $T_k \in G$, exteriorul — din punctele ce verifică inegalitatea contrară cel puțin pentru un indice k, iar frontiera lui M în U — din punctele lui M, care satisfac relațiile (3.5) cu semnul egal cel puțin pentru un indice k (și evident pentru un număr finit).

Fie $z \in U$ un punct astfel încît $\mathrm{d}(z, z_0) < \mathrm{d}[z, T_k(z_0)]$, oricare ar fi $T_k \in G$. Să luăm un cerc $\varkappa$ cu centrul z_0 și o rază finită $\rho > \mathrm{d}(z, z_0)$. Un număr finit de drepte D_k intersectează acest cerc, astfel încît pentru un număr natural N suficient de mare, $\varkappa \subset \overset{\infty}{\underset{N}{\bigcap}} \overset{\circ}{S}_k$. Dar $z \in \overset{\circ}{S}_k$ pentru orice indice k, deci există un cerc $\varkappa_1$, care conține z, astfel încît $\varkappa_1 \subset \overset{N-1}{\underset{1}{\bigcap}} \overset{\circ}{S}_k$. Prin urmare, $\overset{\infty}{\underset{1}{\bigcap}} \overset{\circ}{S}_k \subset \overset{\circ}{M}$. Incluziunea contrară fiind evidentă, rezultă $\overset{\circ}{M} = \overset{\infty}{\underset{1}{\bigcap}} \overset{\circ}{S}_k$.

Cum M este mulțime închisă în U, exteriorul lui M coincide cu complementul lui M relativ la U, deci cu mulțimea punctelor z astfel încît există cel puțin un indice k pentru care $\mathrm{d}(z, z_0) > \mathrm{d}[z, T_k(z_0)]$. (Evident, există doar un număr finit de astfel de valori k, după observația de mai sus: oricare ar fi cercul $\varkappa$ cu centrul z_0, avem $\varkappa \subset \overset{\infty}{\underset{N}{\bigcap}} \overset{\circ}{S}_k$

pentru N suficient de mare). Rezultă de asemenea caracterizarea dată frontierei lui M în U.

4°. Să presupunem că $l_k = D_k \cap M \neq \varnothing$. În virtutea proprietății de convexitate, l_k se reduce la un punct, este un segment, o semidreaptă sau toată dreapta D_k.

Punctele interioare lui l_k, dacă există, sînt caracterizate prin relațiile

$$\mathrm{d}\,(z,\ z_0) = \mathrm{d}\,[z,\ T_k(z_0)] \tag{3.6}$$

și

$$\mathrm{d}\,(z,\ z_0) < \mathrm{d}\,[z,\ T_h\,(z)],\ \text{oricare ar fi } h \neq 0 \text{ și k.}$$

Fie z punct interior lui l_k. Evident, $\mathrm{d}\,(z,\ z_0) = \mathrm{d}\,[z,\ T_k\,(z_0)]$ și $\mathrm{d}\,(z, z_0) \leqslant \leqslant \mathrm{d}\,[z,\ T_h\,(z_0)]$ pentru $h \neq 0$ și k, deoarece $z \in D_k \cap M$. Dacă ar exista însă un indice h, pentru care $\mathrm{d}\,(z,\ z_0) = \mathrm{d}\,[z,\ T_h\,(z_0)]$, punctul z_0 ar aparține și dreptei D_h, astfel încît pe l_k s-ar găsi puncte din exteriorul lui S_h și l_k nu ar fi inclus în M, ceea ce este absurd. Invers, dacă z verifică relațiile (3.6), există o vecinătate v a lui z formată din puncte, care satisfac aceleași inegalități stricte ca și z, iar $v \cap D_k$ constituie o vecinătate a lui z în l_k; prin urmare z este punct interior lui l_k.

Dacă o extremitate z^* a lui l_k este un punct din U, atunci z^* este extremitate și pentru un alt l_h, iar dacă $z^* \in \partial U$, atunci z^* este extremitate sau pentru un alt l_h sau pentru un segment din ∂U. Fie $D_k = D_{k_0}$, D_{k_1}, $\ldots D_{k_r}$ dreptele D_n, care trec prin $z^* \in U$, scrise în ordinea ciclică în care se întîlnesc, cînd descriem un cerc mic cu centrul z^*, începînd cu punctul său de intersecție cu l_k, în sensul de la l_k în exteriorul lui S_k. Se arată că atît l_k cît și ultimul dintre arcele determinate de z^* pe D_{k_r}, pe care îl întîlnim și pe care îl vom nota l_h, sînt incluse în ∂M, singurele arce determinate de z^* pe $D_{k_0}, \ldots D_{k_r}$, care aparțin lui M fiind l_k și l_h. Într-adevăr, notînd $S_n^* = \mathrm{ext}\ S_n$, punctul z^* divide fiecare dreaptă D_{k_j} în două arce: $\alpha_j \subset S_{k_j+1}$ și $\beta_j \subset S^*_{k_j+1}$, $(j = 0, 1, \ldots r-1)$ respectiv $\alpha_r \subset S^*_{k_0}$ și $\beta_r \subset S_{k_0}$. Evident, $\alpha_j \subset S^*_{k_j-1}$ și $\beta_j \subset S_{k_j-1}$, $(j = 1, \ldots r)$ în timp ce $\alpha_0 \subset S_{k_r}$ și $\beta_0 \subset S^*_{k_r}$. Rezultă deci că α_0 și β_r sînt singurele dintre arcele de mai sus, care ar putea fi incluse în M. Prin ipoteză pe α_0 se află arcul l_k din ∂M. Cum $\beta_r \subset \bigcap_{j=0}^{r} S_{k_j}$ și $\mathrm{d}\,(z^*,\ z_0) < \mathrm{d}\,[z^*,\ T_n\,(z_0)]$ pentru $n \neq k_j$ $(j = 0, \ldots r)$, o întreagă vecinătate a lui z^* este inclusă în $\bigcap_{n \neq k_j} \overset{\circ}{S}_n$, prin urmare un arc l_h de pe β_r aparține frontierei lui M. Cazul $z^* \in \partial U$ se tratează analog.

Am demonstrat astfel că frontiera lui M în planul complex se compune: 1) din segmente, semidrepte sau drepte (neeuclidiene) și eventual segmente din ∂U, în fiecare extremitate a unui astfel de arc începînd un altul, și 2) din eventualele puncte de acumulare ale acestor arce de pe ∂U. Prin urmare, $\overline{M}$ este un poligon.

5°. Să verificăm că $\overline{M}$ este poligon fundamental:

Orice punct $z \in U$ are un echivalent în M, deoarece printre punctele $T_k(z)$, $T_k \in G$, există unul (sau un număr finit), care face minimă distanța $d[T_k(z), z_0]$, deci aparține lui M.

Dacă z' și z'' ar fi două puncte echivalente, care ar aparține lui $\overset{\circ}{M}$, să notăm cu T_n transformarea din G cu proprietatea $T_n(z') = z''$. Din relația $d(z', z_0) < d[z', T_n^{-1}(z_0)]$ deducem, aplicînd T_n, inegalitatea $d[z'', T_n(z_0)] < d(z'', z_0)$, care contrazice ipoteza $z'' \in \overset{\circ}{M}$.

Orice punct $z' \in M$, interior unei laturi interioare l_k, inclusă exceptînd eventual extremitățile în U, are exact un echivalent în M. Într-adevăr, avem $d[z', T_k(z_0)] = d(z', z_0)$, în timp ce $d[z', T_h(z_0)] > d(z', z_0)$, pentru orice $h \neq 0$ și k. Atunci $z'' = T_k^{-1}(z')$ va verifica relațiile $d(z'', z_0) = d[z'', T_k^{-1}(z_0)]$ și $d[z'', T_k^{-1} \circ T_h(z_0)] > d(z'', z_0)$, deci z' are un echivalent $z'' \in M$, care este punct interior laturii $T_k^{-1}(l_k)$. Pe de altă parte, în general, dacă $z \sim_G \hat{z}$ și $z, \hat{z} \in M$, atunci $d(z, z_0) = d(\hat{z}, z_0)$. Prin urmare, dacă $z^* \in M$ și $z^* = T^*(z')$ cu $T^* \in G$, atunci $d(z', z_0) = d[z', T^{*-1}(z_0)]$, ceea ce implică $T^{*-1} = T_k$, deoarece z' este punct interior lui l_k și $z^* = z''$.

Transformarea T_k^{-1} duce latura interioară l_k în latura interioară $l_{k'} = T_k^{-1}(l_k)$ și laturile interioare ale poligonului $\overline{M}$ se grupează astfel în perechi echivalente.

Să remarcăm că *transformările, care stabilesc echivalența în perechi diferite de laturi, sînt diferite.*

7. Orice poligon fundamental se reduce prin *transformări elementare* la o *formă normală*, caracterizată prin faptul că pe frontieră apar anumite succesiuni de laturi. Ne vom mărgini [10]) să prezentăm numai reducerea la forma normală a unui poligon fundamental P compact în U, normat după observația 3.2, deci cu un număr finit de laturi și astfel încît transformările fundamentale din G corespunzătoare la perechi diferite de laturi ale lui P să fie diferite, deoarece vom aplica aceste considerații suprafețelor riemanniene închise, după cum se va vedea în § 4.

Orientînd frontiera lui P, o vom scrie sub forma unui produs $a\,b \ldots l$, unde fiecare literă reprezintă o latură. Fixăm un vîrf inițial pe ∂P și convenim să notăm pentru fiecare pereche de laturi echivalente cu x prima și cu x^{-1} a doua dintre laturile întîlnite, cînd descriem ∂P [11]). Două laturi echivalente nu pot fi consecutive, conform consecinței 3.1. Prin urmare, fiecărei perechi x și x^{-1} îi putem asocia numărul (pozitiv) de laturi din ∂P întîlnite între x și x^{-1}, cînd parcurgem ∂P în sensul ales. Vom nota cu a și a^{-1} o pereche astfel încît acest număr să fie minim

---

[10]) Alte cazuri sînt tratate în [31], p. 257.

[11]) Această notație își găsește justificare în considerarea suprafeței U/G, în care se identifică laturile echivalente din P, luate cu orientări opuse.

și cu b latura ce urmează lui a în ordinea luată pe ∂P. Atunci ∂P se va scrie

$$abXa^{-1}\,Yb^{-1}\,Z \tag{3.7}$$

unde X, Y și Z reprezintă grupe de laturi și eventual pot lipsi. Să presupunem că X și Y există efectiv.

Mai înainte de a continua procedeul, dăm următoarele definiții: Vom numi *diagonală* a unui poligon un arc analitic, care unește două vîrfuri ale poligonului și este situat, exceptînd extremitățile, în interiorul lui. Vom numi *transformare elementară* a poligonului fundamental P relativă la o pereche de laturi echivalente x și $x^{-1} = T(x)$, $T \in G$, următoarea operație, prin care se obține din P un nou poligon fundamental: ducem în P o diagonală d, care descompune P în două poligoane P' și P'', notate astfel încît $x \subset \partial P'$ și $x^{-1} \subset \partial P''$; cum $T(P') \cap P''$ coincide cu x^{-1}, rezultă că $T(P') \cup P''$ este un poligon fundamental compact în U.

Fie d o diagonală care unește extremitatea lui a cu originea lui a^{-1}. Aplicînd transformarea elementară corespunzătoare perechii de laturi b, b^{-1} și notînd după transformare fiecare latură cu litera inițială, obținem un poligon fundamental pe a cărui frontieră se află laturile

$$ada^{-1}\,YXd^{-1}\,Z. \tag{3.8}$$

Să ducem acum o diagonală e unind originea lui d^{-1} cu extremitatea lui d și să efectuăm transformarea elementară relativă la perechea a, a^{-1}. Se formează astfel un poligon fundamental cu următoarea ordine a laturilor

$$ede^{-1}\,d^{-1}\,ZYX. \tag{3.9}$$

Evident, dacă $X = \varnothing$, se aplică numai ultima etapă a procedeului, iar dacă $X \cup Y = \varnothing$, avem de la început ordinea (3.9). În gruparea ZYX suprimăm eventualele succesiuni de laturi xx^{-1} sau $x^{-1}x$ și, notînd cu V gruparea de laturi rămasă, repetăm procedeul relativ la laturile din V, ceea ce nu va influența gruparea deja formată

$$ede^{-1}\,d^{-1}. \tag{3.10}$$

Vom obține astfel un poligon fundamental cu două grupări de forma (3.10) și, dacă mai rămîn laturi, procedeul va continua. Remarcăm că la o etapă oarecare se poate să pornim de la o frontieră de forma

$$\tilde{a}\widetilde{W}\tilde{b}\,\widetilde{X}\tilde{a}^{-1}\,\widetilde{Y}\tilde{b}^{-1}\,\widetilde{Z} \tag{3.7'}$$

în loc de (3.7), unde după $\tilde{a}$ urmează scrisă în $\widetilde{W}$ o grupare (3.10) deja construită, în timp ce toate grupările construite sînt cuprinse în grupările de laturi $\widetilde{W}$, $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ și $\widetilde{Z}$. Metoda se aplică însă și în acest caz, ducînd la

$$\tilde{e}\tilde{d}\tilde{e}^{-1}\,\tilde{d}^{-1}\,\widetilde{W}\widetilde{Z}\widetilde{Y}\widetilde{X}. \tag{3.9'}$$

Într-un număr finit de etape obținem, cu o notație convenabilă a laturilor, forma normală

$$a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{2g-1} a_{2g} a_{2g-1}^{-1} a_{2g}^{-1}, \tag{3.11}$$

unde $g \geqslant 1$ [12]). Putem enunța astfel

PROPOZIȚIA 3.10. *Orice poligon fundamental P compact în U se poate aduce la forma normală* (3.11).

În cele ce urmează vom folosi după [11] forma normală

$$a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} a_1 \dots a_{2g} a_{2g-1}^{-1} a_{2g}^{-1} a_{2g-1}, \tag{3.11'}$$

care se deduce din (3.11) printr-o schimbare evidentă de notație.

Observația 3.5. În forma normală (3.11) sau (3.11') toate vîrfurile poligonului fundamental sînt echivalente între ele, iar suma unghiurilor poligonului este 2π.

Fie, de exemplu, forma (3.11'). Să notăm cu $\mathcal{T}_j$ transformarea fundamentală din G, care duce latura a_j în a_j^{-1}, $(j = 1, \dots, 2g)$ și să numerotăm vîrfurile lui P de la 1 la $4g$ începînd cu originea lui a_2 în sensul dat de (3.11'). Se verifică imediat că aplicînd succesiv transformările $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2^{-1}$, $\mathcal{T}_1^{-1}$, $\dots$ $\mathcal{T}_{2g}$, $\mathcal{T}_{2g-1}$, $\mathcal{T}_{2g}^{-1}$, $\mathcal{T}_{2g-1}^{-1}$, vîrful 1 trece în 4, 3, 2, 5,... $4g-3$, $4g$, $4g-1$, $4g-2$, 1. Avem deci relația

$$\mathcal{T}_{2g-1}^{-1} \circ \mathcal{T}_{2g}^{-1} \circ \mathcal{T}_{2g-1} \circ \mathcal{T}_{2g} \circ \dots \circ \mathcal{T}_1^{-1} \circ \mathcal{T}_2^{-1} \circ \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = 1_U. \tag{3.12}$$

8. Iată cîteva proprietăți ale grupurilor Fuchs cu poligon fundamental compact în U:

Se numește *translație neeuclidiană* a lui U o transformare liniară, care invariază o dreaptă neeuclidiană. O translație neeuclidiană are deci două puncte fixe diferite σ și τ pe $\mathcal{J}z = 0$, este de tip iperbolic și se scrie sub forma canonică

$$\frac{Z - \sigma}{Z - \tau} = \lambda \frac{z - \sigma}{z - \tau} \tag{3.13}$$

cu $\lambda > 1$. Punctul σ se numește punct de respingere, τ punct de atragere, iar λ invariantul transformării.

PROPOZIȚIA 3.11. *Dacă grupul Fuchs G are poligonul fundamental P compact în U, atunci el este format din translații neeuclidiene și transformarea identică* $T_0 = 1_U$.

Fie $T \in G$, $T \neq T_0$ și $d_T = \inf_{z \in U} d[z, T(z)]$. Cum pentru orice punct $z \in U$, există $\zeta \in P$ și $A \in G$ cu $z = A(\zeta)$, iar $d[z, T(z)] = d[A(\zeta), T \circ A(\zeta)] = d[\zeta, A^{-1} \circ T \circ A(\zeta)]$, rezultă că $d_T = \inf_{\zeta \in P, A \in G} d[\zeta, A^{-1} \circ T \circ A(\zeta)]$. Există deci șirurile $\zeta_n \in P$ și $A_n \in G$, astfel încît

[12]) Va rezulta din consecința 4.2 că $g > 1$, deoarece se va arăta că g este genul suprafeței riemanniene compacte $R = U/G$, care este de tip iperbolic.

$d_T = \lim_{n\to\infty} d[\zeta_n, T_n(\zeta_n)]$, unde $T_n = A_n^{-1} \circ T \circ A_n$. Deoarece P este compact, din ζ_n putem extrage un subșir convergent, pe care îl vom nota tot ζ_n. Fie $\zeta_0 = \lim_{n\to\infty} \zeta_n$. Șirul $T_n(\zeta_n)$ este de asemenea inclus într-un compact din U, fiindcă $d[\zeta_0, T_n(\zeta_n)] \leqslant d(\zeta_0, \zeta_n) + d[\zeta_n, T_n(\zeta_n)]$. Prin urmare, putem extrage din ζ_n un subșir, pe care îl vom nota din nou ζ_n, astfel încît și $T_n(\zeta_n)$ să conveargă. Fie atunci $\zeta_0' = \lim_{n\to\infty} T_n(\zeta_n)$. Evident, $d_T = d(\zeta_0, \zeta_0')$. Să arătăm că $\zeta_0' = \lim_{n\to\infty} T_n(\zeta_0)$. Într-adevăr, $d[T_n(\zeta_0), \zeta_0'] \leqslant d[T_n(\zeta_0), T_n(\zeta_n)] + d[T_n(\zeta_n), \zeta_0'] = d(\zeta_0, \zeta_n) + d[T_n(\zeta_n), \zeta_0']$. Cum șirul $T_n(\zeta_0)$ este o mulțime de puncte izolate, fără punct de acumulare în U, deducem că $T_n(\zeta_0) = \zeta_0'$, începînd de la un rang N, deci că $T_n = T_N$.

Fie $\zeta_0'' = T_N^2(\zeta_0)$, z' mijlocul segmentului de dreaptă neeuclidiană $\zeta_0\,\zeta_0'$, iar $z'' = T_N(z')$ mijlocul segmentului de dreaptă neeuclidiană $\zeta_0'\,\zeta_0''$. Deoarece $d_T \leqslant d(z', z'') \leqslant d(z', \zeta_0') + d(\zeta_0', z'') = d_T$, deducem că punctele ζ_0, ζ_0' și ζ_0'' sînt situate pe aceeași dreaptă neeuclidiană și că transformarea T_N, care invariază această dreaptă, este o translație neeuclidiană. Prin urmare $T = A_N \circ T_N \circ A_N^{-1}$ este de asemenea o translație neeuclidiană.

În cele ce urmează vom folosi și următoarele proprietăți ale translațiilor neeuclidiene :

PROPOZIȚIA 3.12. *Dacă transformarea $B \in H$, diferită de identitate, comută cu o translație neeuclidiană A, atunci B este translație neeuclidiană cu aceleași puncte duble ca și A, și reciproc.*

Fie σ și τ punctele duble ale lui A. Cum $B \circ A = A \circ B$, deducem pentru $z = \sigma$ și τ, că $B(z) = A[B(z)]$, deci sau $B(z) = z$, și propoziția este demonstrată, sau $B(\sigma) = \tau$ și $B(\tau) = \sigma$. Acest caz nu poate avea însă loc. Într-adevăr, B^2 ar avea ca puncte duble pe σ și pe τ, în timp ce B^2 are aceleași puncte duble ca și B.

Reciproc, dacă A și B sînt două translații neeuclidiene cu aceleași puncte duble σ și τ, aplicînd automorfismul interior al lui H determinat de transformarea $T : Z = \dfrac{z-\sigma}{z-\tau}$, ele devin omotetii $\tilde{A} = T \circ A \circ T^{-1}$ și $\tilde{B} = T \circ B \circ T^{-1}$, avînd ca centru originea. Cum $\tilde{A} \circ \tilde{B} = \tilde{B} \circ \tilde{A}$, rezultă $A \circ B = B \circ A$.

PROPOZIȚIA 3.13. *Două transformări A și B dintr-un grup Fuchs de translații neeuclidiene G, care nu sînt permutabile între ele, au puncte duble distincte.*

Conform propoziției precedente, A și B nu pot avea aceleași puncte duble. Dacă A ar avea punctele duble α și γ, iar B punctele duble β și γ, $\alpha \neq \beta$, atunci $C = A \circ B^{-1} \circ A^{-1} \circ B$ ar fi de tip parabolic, cum rezultă dintr-un calcul imediat, aplicînd automorfismul interior al lui H

determinat de T: $Z = \dfrac{z-\alpha}{z-\gamma}$ și verificînd că $\widetilde{C} = T \circ C \circ T^{-1}$ este de tip parabolic. Cum $C \in G$, contrazicem propoziția 3.11.

9. Am văzut la pct. 6 că orice grup Fuchs are un poligon fundamental. Vom încheia acest paragraf analizînd un exemplu, care se încadrează în problema inversă : fiind dat un poligon în $\overline{U}$, să se stabilească condițiile în care el este poligonul fundamental al unui grup Fuchs.

1°. *Există în U un poligon regulat neeuclidian P cu $4g$ laturi ($g>1$) și suma unghiurilor 2π.*

Printr-o reprezentare conformă a lui U pe cercul unitate, ne putem limita să construim în acest cerc un poligon P cu centrul originea sau să înscriem într-un unghi, cu vîrful în origine și deschiderea $\dfrac{\pi}{2g}$, un triunghi cu laturi egale pe cele două laturi ale unghiului și cu o a treia latură, dreaptă neeuclidiană, triunghiul avînd suma unghiurilor $\dfrac{\pi}{g}$ [13]).

2°. Să notăm cu $1, 2, \ldots 4g$ vîrfurile unui poligon regulat P din U cu suma unghiurilor 2π și $g > 1$, în ordinea determinată prin alegerea vîrfului 1 și orientarea lui ∂P; fie a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}, a_1, $\ldots$, a_{2g}, a_{2g-1}^{-1}, a_{2g}^{-1}, a_{2g-1} laturile lui P în ordinea corespunzătoare, a_2 avînd originea în punctul 1 și $\mathfrak{T}_j$ transformarea din H, care duce a_j în a_j^{-1} cu orientări opuse.

Transformările $\mathfrak{T}_j$ generează un grup Fuchs G.

Vom deduce aceasta din următoarea formă particulară a unui rezultat datorit lui Poincaré ([33]; [10], Cap. XIV, p. 125) privitor la construcția grupurilor Fuchs, cînd se dă un poligon fundamental.

Propoziția 3.14. *Fie P_0 un poligon din U cu un număr finit, par de laturi — segmente de drepte neeuclidiene, grupate în perechi echivalente, cu proprietățile :*

a) *Două laturi echivalente sînt congruente în geometria neeuclidiană, deci există o transformare liniară $T \in H$, care le transformă una în alta cu orientări opuse (ca în propoziția 3.6). Vom numi fundamentale aceste transformări și vom nota cu G subgrupul lui H generat de ele.*

b) *Vîrfurile echivalente cu un vîrf $z_0 \in P_0$ formează un ciclu, suma unghiurilor respective fiind 2π (ca în propoziția 3.4 și consecința 3.2).*

În aceste condiții, G este un grup Fuchs, iar P_0 un poligon fundamental corespunzător lui G.

Aplicînd lui P_0 transformările $T \in G$, vom obține o mulțime de poligoane $P = T(P_0)$, pe care le considerăm ca imagini ale lui P_0 prin T : în cele ce urmează vom spune că poligoanele $P = T(P_0)$ și $P^* = T^*(P_0)$

[13]) Un calcul elementar dă raza cercului, care constituie dreapta neeuclidiană a triunghiului : $R = \sin \dfrac{\pi}{4g} \Big/ \sqrt{\cos \dfrac{\pi}{2g}}$, iar distanța de la 0 la centru este $\sqrt{1+R^2}$.

coincid, atunci și numai atunci cînd $T = T^*$. Dacă T este o transformare fundamentală : $l \to l^{-1}$, atunci P este adiacent la P_0 în lungul lui l^{-1}; iar poligoanele incidente cu un vîrf al lui P_0 formează un ciclu, acoperind o dată, fără a se impieta, o vecinătate a acestui vîrf.

Pentru a demonstra că G este un grup Fuchs cu poligonul fundamental P_0, este suficient să arătăm că *poligoanele P formează, cînd T descrie G, o descompunere poligonală a lui U*. Într-adevăr, în acest caz G cuprinde *transformări fără punct fix* : dacă ar exista $T \in G$, diferit de identitate și $z \in U$, astfel încît $T(z) = z$, atunci ar exista $z_0 \in P_0$ și $T_1 \in G$ cu $T_1(z_0) = z$, deci pentru $T_2 = T_1^{-1} \circ T \circ T_1$ am avea $T_2(z_0) = z_0$. Deoarece $z_0 \in P_0 \cap T_2(P_0)$, iar $T_2 \neq 1_U$, am avea $z_0 \in \partial P_0$. Dacă z_0 ar fi punct interior unei laturi l, $T_2(P_0)$ ar coincide cu poligonul adiacent la P_0 în lungul lui l, iar $T_2(z_0)$ ar fi interior laturii l^{-1}, deci ar fi diferit de z_0. Dacă z_0 ar fi un vîrf al lui P_0, atunci $T_2(P_0)$ ar fi unul din poligoanele ciclului vîrfului z_0 și T_2^{-1} nu ar invaria z_0, ci l-ar transforma în unul din vîrfurile echivalente z_j ale lui P_0. Ajungem astfel la o contradicție. De asemenea, G este grup *discontinuu* : deoarece punctele $T_n(z)$, corespunzătoare unui șir T_n de transformări diferite din G, aparțin la poligoane $T_n(P_0)$ diferite și orice punct din U are o vecinătate, care intersectează un număr finit de poligoane.

Să luăm un punct $z_0 \in \mathring{P}_0$ și să unim orice alt punct $z \in U$ cu z_0 printr-un drum continuu $\lambda \subset U$. Dacă $\lambda \subset P_0$, vom spune că λ ajunge în z_0 cu poligonul P_0. Dacă λ părăsește P_0 printr-un punct interior unei laturi a lui P_0 respectiv printr-un vîrf al lui P_0, fie P_1 poligonul (unul din poligoanele din ciclul vîrfului) în care intră λ. Se poate ca $\lambda \subset P_0 \cup P_1$, caz în care procedeul se încheie : spunem că λ ajunge în z cu poligonul P_1. În cazul contrar, λ părăsește P_1 printr-o latură sau un vîrf intrînd într-un poligon P_2 ales în același mod. După cum procedeul se termină după un număr finit de etape sau continuă indefinit, spunem că λ este de *primul* respectiv de al *doilea tip*. Dacă λ este de primul tip și a străbătut poligoanele $P_0, P_1, \ldots P_N$, spunem că λ ajunge în z cu poligonul P_N. Convenim să introducem următoarea *normare* a drumurilor considerate : ori de cîte ori λ intră din nou într-un poligon $P = T(P_0)$, suprimăm porțiunea respectivă din λ, înlocuind-o cu un drum inclus în P de aceleași extremități. În particular, se înlătură astfel cazul în care λ ar străbate succesiv de o infinitate de ori latura comună la două poligoane adiacente sau poligoanele ciclului unui vîrf. Normarea nu modifică poligonul cu care λ ajunge în z sau îl înlocuiește cu un poligon adiacent în lungul unei laturi respectiv din același ciclu.

Deoarece $\bigcup P = U$, este suficient să arătăm că :

1) Orice drum λ, unind z_0 cu un punct $z \in U$, devine prin normare drum de primul tip și

2) Două drumuri λ_1 și λ_2 de primul tip, unind z_0 cu z, ajung în punctul z cu același poligon sau cu două poligoane pentru care z este punct interior unei laturi comune respectiv vîrf comun.

1) Fie $P_0, P_1, \ldots P_\nu, \ldots$ poligoanele străbătute succesiv de drumul normat λ și $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$ arcele respective din λ. Dacă λ_ν unește două laturi din ∂P_ν, care nu sînt vecine, ținînd seama că $P_\nu = T_\nu(P_0)$, lungimea (neeuclidiană) a lui λ_ν are o margine inferioară pozitivă, deci există un număr finit de astfel de arce λ_ν, fiindcă λ are lungime (neeuclidiană) finită. Dacă λ_ν unește laturi vecine din P_ν, spunem că subîntinde vîrful comun. În cazul cînd $\lambda_{\nu+1}$ nu subîntinde același vîrf în $P_{\nu+1}$, lungimea lui λ_ν $\lambda_{\nu+1}$ este din nou mai mare decît o constantă pozitivă și există un număr finit de arce λ_ν de acest fel. Prin urmare, pentru $\nu > \nu_0$, arcele λ_ν subîntind același vîrf. Există însă un număr finit de poligoane care au acel vîrf comun, deci din nou un număr finit de arce λ_ν. În concluzie, λ este de primul tip și $U = \bigcup P$.

2) Construim următoarea acoperire a lui U, procedînd ca la propoziția 2.7 din Cap. I.

Considerăm, pentru fiecare punct $z \in U$, drumurile λ normate, care unesc în U punctele z_0 cu z și grupăm în clasa $\{\lambda\}$ drumurile λ', care ajung în z cu același poligon P ca și λ sau, în cazul cînd z e punct interior unei laturi l a lui P respectiv vîrf al lui P, care ajung în z cu poligonul adiacent la P în lungul lui l respectiv cu un poligon din ciclul lui z. Notăm cu $\widetilde{X}$ mulțimea acestor clase și cu $f: \widetilde{X} \to U$, aplicația care asociază clasei $\{\lambda\}$ extremitatea z a lui λ. Organizăm $\widetilde{X}$ ca spațiu topologic luînd ca vecinătăți ale lui $\{\lambda\}$ mulțimile $\tilde{u}_{\{\lambda\}}$, construite astfel: Dacă $z \in \mathring{P}$, fie u un domeniu simplu conex, conținînd punctul z și inclus în $\mathring{P}$, z' un punct din u și λ' un drum unind în u punctul z cu z'; mulțimea $\tilde{u}_{\{\lambda\}}$ este formată de clasele drumurilor $\lambda\lambda'$, cînd z' descrie u. Dacă z e punct interior laturii l comune poligoanelor P și $\widetilde{P}$, luăm $u \subset \overset{\circ}{\overbrace{P \cup \widetilde{P}}}$, iar dacă z e vîrf comun ciclului $P, P', \ldots P^{N-1}$ luăm $u \subset \overset{\circ}{\overbrace{P \cup P' \cup \ldots \cup P^{N-1}}}$. Se verifică imediat că $\widetilde{X}$ este spațiu topologic, liniar conex și local simplu conex, $f|\tilde{u}_{\{\lambda\}}$ fiind omeomorfism local: $\tilde{u}_{\{\lambda\}} \underset{\text{pe}}{\to} u$, iar ridicarea drumurilor de pe U pe $\widetilde{X}$ fiind posibilă totdeauna, univoc. După propoziția 2.6 din Cap. I, acoperirea $(\widetilde{X}, f, U)$ este neramificată fără frontieră, iar după teoremele 2.1 și 2.2 din Cap. I, aplicația f este un omeomorfism surjectiv, deci toate drumurile normate unind z_0 cu z aparțin aceleiași clase, ceea ce demonstrează 2).

3°. Vom stabili acum o proprietate a transformărilor fundamentale $\mathfrak{T}_j$ ale grupului Fuchs corespunzător poligonului regulat P cu $4g$ laturi și suma unghiurilor 2π.

PROPOZIȚIA 3.15. *Punctele s_h și t_h de respingere și atragere ale transformării $\mathfrak{T}_h$ $(h = 1, \ldots, 2g)$ sînt astfel așezate încît perechea s_{2j+1}, t_{2j+1} separă perechea s_{2j+2}, t_{2j+2} $(j = 0, 1, \ldots, g-1)$.*

Pentru simplificarea expunerii, presupunem din nou P poligon cu centrul 0 în cercul unitate, ca la punctul 1° :

Cercul euclidian (iperciclul) c_{2j+2}, care trece prin punctele s_{2j+2}, t_{2j+2}, $4j+2$ și $4j+3$, este ortogonal dreptelor (neeuclidiene) a_{2j+2} și a_{2j+2}^{-1}. Într-adevăr, unghiul format în punctul $4j+2$ de arcul $4j+1$, $4j+2$ din a_{2j+2} cu arcul $4j+2$, $4j+3$ din c_{2j+2} este egal atît cu unghiul format în $4j+3$ de arcul $4j+2$, $4j+3$ din c_{2j+2} cu arcul $4j+3$, $4j+4$ din a_{2j+2}^{-1} (din simetria figurii) cît și cu unghiul format în $4j+3$ de arcul $4j+4$, $4j+3$ din a_{2j+2}^{-1} cu arcul $4j+3$, t_{2j+2} din c_{2j+2} (deoarece $\mathcal{T}_{2j+2}$ îl transformă în acest unghi). Ultimele două unghiuri sînt însă suplimentare.

Arcul $4j+2$, $4j+3$ din c_{2j+2} se află deci în afara poligonului P_0, iar arcul din frontiera cercului unitate cuprins între s_{2j+2} t_{2j+2} este $> \frac{\pi}{2g}$. Din simetria figurii toate arcele s_h t_h au aceeași proprietate, iar t_{2j+1} s_{2j+1} se deduce din s_{2j+2} t_{2j+2} printr-o rotație de centrul 0 și unghi $\frac{\pi}{2g}$. Prin urmare, avem ordinea s_{2j+2}, t_{2j+1}, t_{2j+2}, s_{2j+1} pe frontiera cercului unitate.

§ 4. Reprezentarea unei suprafețe riemanniene închise cu ajutorul unui poligon fundamental

1. După propoziția 3.1, orice grup Fuchs G determină o suprafață riemanniană $U/G = R$, iar după propoziția 3.9, orice grup Fuchs are un poligon fundamental.

PROPOZIȚIA 4.1. *Fie P un poligon fundamental corespunzător grupului Fuchs G. Prin identificarea punctelor din $P \cap U$ echivalente relative la G, se obține un spațiu topologic omeomorf cu U/G, care se organizează în mod natural ca suprafață riemanniană, conform echivalentă cu R. Dacă P este compact în U,* i.e. *dacă $P \subset U$, atunci R este suprafață riemanniană închisă.*

Relația de echivalență determinată de grupul G induce în $P \cap U$ o relație de echivalență. Să notăm cu $\{z\}$ clasa de echivalență relativ la G a punctului $z \in U$ și cu $[z] = \{z\} \cap P$. Dacă $z \in P \cap U$, atunci $[z]$ este clasa de echivalență determinată de G în $P \cap U$ și ea constă din unul, două sau un număr finit de puncte, după cum $z \in \mathring{P}$, z este punct interior unei laturi interioare a lui P sau z este vîrf al lui P. Mulțimea $P \cap U/G$, care se obține din $P \cap U$ prin identificarea punctelor echivalente relativ la G, este în corespondență biunivocă cu U/G, de exemplu prin aplicația $F : U/G \to P \cap U/G$, care asociază clasei $\{z\}$ clasa $[z]$. Cu ajutorul lui F, organizăm $P \cap U/G$ ca suprafață riemanniană, conform

echivalentă cu U/G, luînd ca vecinătăți parametrice imaginile prin F ale următoarei familii de vecinătăți parametrice, care definesc structura conformă pe U/G:

Fie z_0 un punct interior lui P; luăm ca vecinătate parametrică a lui $\{z_0\}$ în U/G: $v_{\{z_0\}} = \Pi_G(\mathring{\delta})$, unde $\mathring{\delta} = u_{z_0} = C_r(z_0)$ este cerc deschis (neeuclidian) cu centrul z_0 și cu raza r suficient de mică ca $C_r(z_0)$ să fie inclus în $\mathring{P}$. (Cu u_{z_0} notăm mulțimea din $P \cap U$, care prin identificarea punctelor echivalente ne dă o vecinătate a lui $[z_0]$).

Fie z_0 un punct interior unei laturi interioare l a lui P, $l' = T(l)$ latura echivalentă cu l a lui P și $p_0' = T(p_0)$. În demonstrația propoziției 3.7 am construit într-un cerc neeuclidian $C_r(z_0) \subset \overset{\circ}{\overbrace{P \cup T^{-1}(P)}}$, cu $r>0$ arbitrar de mic, un domeniu jordanian δ, conținînd z_0 în interior și descompus de l în două domenii jordaniene $\delta' \subset P$ și $\delta'' \subset T^{-1}(P)$. Luăm $v_{\{z_0\}} = \Pi_G(\mathring{\delta})$. Evident, $v_{\{z_0\}} = \Pi_G(u_{z_0})$, unde notînd cu $d' = \mathring{\delta} \cap P$ și cu $d'' = T[\mathring{\delta} \cap T^{-1}(P)]$, avem $u_{z_0} = d' \cup d'' \subset P$.

Fie z_0 un vîrf din $P \cap U$. Folosind consecința 3.2 și notațiile respective, în jurul punctului z_0 se grupează ciclic poligoanele $P^0 = P$, $P^1 = T_1^{-1}(P), \ldots, P^{N-1} = T_1^{-1} \circ \ldots \circ T_{N-1}^{-1}(P)$. Fie $L_0 = l_1$, $L_1, \ldots L_{N-1} = l_N'$ laturile din $P \cap P^1$, $P^1 \cap P^2, \ldots, P^{N-1} \cap P$. Pentru $r > 0$ suficient de mic, cercul $C_r(z_0)$ este inclus în $\overset{\circ}{\overbrace{P \cup P^1 \cup \ldots \cup P^{N-1}}}$. Să alegem pe fiecare din arcele L_k un punct b_k situat în interiorul subarcului $z_0 a_k$ din L_k, unde a_k este primul punct de intersecție al lui L_k cu circumferința lui $C_r(z_0)$, cînd descriem L_k pornind din z_0, și să unim b_k cu b_{k+1} printr-un arc simplu λ_k situat în $\overset{\circ}{\overbrace{C_r(z_0) \cap P^k}}$, exceptînd extremitățile ($k = 0, 1, \ldots, N-1$, $b_N = b_0$). Arcele λ_k limitează un domeniu jordanian δ, format din N sectoare $\delta^k = \delta \cap P^k$. Luăm $v_{\{z_0\}} = \Pi_G(\mathring{\delta}) = \Pi_G(u_{z_0})$, unde $u_{z_0} = \bigcup_{k=0}^{N-1} d^k \subset P$, $d^k = T_k \circ \ldots \circ T_1 \circ T_0(\mathring{\delta} \cap P^k)$ și $T_0 = 1_U$.

Vecinătățile $v_{\{z_0\}}$ împreună cu omeomorfismul $\varphi_{z_0} \circ (\Pi_G|_{\mathring{\delta}})^{-1}$, unde φ_{z_0} este o reprezentare conformă a lui $\mathring{\delta}$ pe cercul unitate, definesc structura conformă a lui U/G [14]).

Dacă $P \subset U$, rezultă imediat că P/G sau U/G este suprafața riemanniană închisă: fie $\{z_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ un șir de clase din U/G cu $z_n \in P$; există un subșir $z_{n'}$ al șirului z_n, convergent la un punct $z_0 \in P$ și cum aplicația Π_G este continuă, $\{z_{n'}\} \to \{z_0\}$ în U/G.

---

[14]) Se verifică imediat că suprafața riemanniană astfel obținută din $P \cap U/G$ coincide cu suprafața riemanniană dedusă din suprafața riemanniană bordată $P \cap U$, prin identificarea punctelor echivalente relativ la G.

2. Oricărei suprafețe riemanniene R îi corespunde o suprafață universală de acoperire $\hat{R}$ și un grup G al transformărilor de acoperire. Dacă R este de tip iperbolic, luăm $\hat{R} = U$ și G este un grup Fuchs. Suprafeței R i se poate asocia orice poligon fundamental (de exemplu, un poligon fundamental metric sau normal) P corespunzător lui G, astfel încît R este conform echivalentă cu $P \cap U/G$.

PROPOZIȚIA 4.2. *Condiția necesară și suficientă pentru ca suprafața riemanniană R de tip iperbolic să fie compactă este ca P să fie compact în U sau ca $P \subset U$.*

Conform propoziției precedente, trebuie să demonstrăm numai necesitatea acestei condiții.

Fie R compact și P un poligon fundamental corespunzător. Dacă $P \not\subset U$, ar exista un șir de puncte $z_n \in \mathring{P}$, tinzînd la un punct $\zeta_0 \in P \cap \partial U$. Fie $p_n \in R \equiv U/G$ cu $p_n = \{z_n\}$. Cum R este compact, există un subșir, pe care îl vom nota tot p_n, convergent la un punct $p_0 \in R$. Dacă $\tilde{z}_0$ este un punct din $\Pi_G^{-1}(p_0) \cap P$ și $\tilde{z}_n \in \Pi_G^{-1}(p_n)$ tind la $\tilde{z}_0$, folosind omeomorfismul F din demonstrația propoziției 4.1, din $\{\tilde{z}_n\} \to \{\tilde{z}_0\}$ rezultă $[z_n] \to [\tilde{z}_0]$ și începînd de la un anumit rang, $z_n \in u_{\tilde{z}_0}$, mulțime relativ compactă din U, deci am contrazis ipoteza $z_n \to \zeta_0$.

Observația 4.1. Cum transformările grupului G invariază metrica iperbolică (3.1), oricare ar fi $p \in R$ și $z_1, z_2 \in \Pi_G^{-1}(p)$, avem

$$d\sigma_{z_1} = d\sigma_{z_2},$$

astfel încît putem introduce pe R metrica iperbolică, definind

$$d\sigma_p = d\sigma_z, \text{ pentru } z \in \Pi_G^{-1}(p) \quad [15]). \tag{4.1}$$

În acest mod, R devine un *spațiu metric*. Dacă R este compact, distanța între două puncte din R are un maxim finit d_0.

Fie P un poligon metric fundamental corespunzător lui G, construit plecînd de la un punct $z_0 \in U$ și z_1 un alt punct arbitrar din $\mathring{P}$. Distanța iperbolică pe R între punctele $p_0 = \Pi_G(z_0)$ și $p_1 = \Pi_G(z_1)$ este :

$$d(p_0, p_1) = d(z_0, z_1).$$

Evident, $d(p_0, p_1) \leqslant d(z_0, z_1)$, deoarece $\hat{\gamma}_0$ fiind segmentul de dreaptă neeuclidiană ce unește z_0 cu z_1, curba $\Pi_G(\hat{\gamma}_0)$ unește p_0 cu p_1 și are aceeași lungime iperbolică. Cum $d(p_0, p_1) = \inf \int_\gamma d\sigma_p$, pentru toate drumurile continue rectificabile γ unind p_0 cu p_1, cum γ se ridică din z_0 într-un drum $\hat{\gamma}$, unind z_0 cu un punct $T(z_1)$, pentru un anume $T \in G$ și cum γ are aceeași lungime iperbolică ca și $\hat{\gamma}$, iar aceasta este cel puțin egală cu $d[z_0, T(z_1)]$, rezultă că $d(p_0, p_1) \geqslant \inf_{T \in G} d[z_0, T(z_1)] =$

[15]) Procedeul a fost folosit în cazul R domeniu plan cu cel puțin trei puncte frontieră în [40], Cap. V, VII.

$= d(z_0, z_1)$. Prin urmare, P este inclus în cercul (neeuclidian) închis cu centrul z_0 și raza d_0.

Consecința 4.1. *Un poligon fundamental, normat după observația 3.2, asociat unei suprafețe riemanniene compacte de gen $g>1$, are un număr finit de laturi, deci grupul G corespunzător are un număr finit de generatori.*

De asemenea, poligonul metric fundamental are un număr finit de laturi, deoarece dacă l_k este o latură corespunzătoare transformării T_k, atunci $d[z_0, T_k(z_0)] \leqslant 2\,d_0$. Existența unei infinități de laturi ar implica existența unei infinități de puncte $T_k(z_0)$ într-un compact din U, ceea ce este absurd.

3. Dacă R este o suprafață riemanniană închisă de gen 1, conform § 2, pct. 2, putem lua $\hat{R}$ planul euclidian, iar G este un grup de translații cu doi generatori, căruia îi corespunde ca poligon fundamental redus la forma normală, un paralelogram, astfel încît (3.11) sau (3.11′) se păstrează pentru $g = 1$. Poligonul metric fundamental se formează lucrînd acum cu metrica euclidiană din plan.

O suprafață riemanniană R închisă de gen 0 — conform echivalentă cu o sferă — se reprezintă de asemenea cu ajutorul unui poligon, unind două puncte ale ei printr-un arc jordanian λ și tăind R în lungul lui λ. Poligonul corespunzător are două laturi, între care există o relație de echivalență (sînt echivalente puncte ce provin din același punct din λ) și pe care le vom nota a și a^{-1}, astfel încît poligonul se scrie sub forma normală

$$a \cdot a^{-1}. \tag{4.2}$$

Consecința 4.2. *Orice suprafață riemanniană închisă se poate reprezenta printr-un poligon*, cu un număr par de laturi, grupate în perechi, între laturile fiecărei perechi fiind dat un omeomorfism, astfel încît suprafața se obține din poligon identificînd punctele, care se corespund prin aceste omeomorfisme. Conform propozițiilor precedente și propozițiilor 3.6, 3.9 și 3.10, poligonul poate fi luat cu laturi — arce analitice, iar omeomorfismele dintre laturile echivalente — analitice în fiecare punct interior unei laturi; orientînd frontiera poligonului, aceste omeomorfisme transformă fiecare latură în latura echivalentă orientată invers.

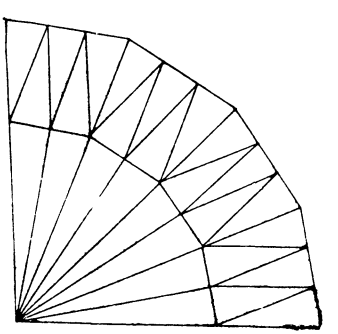


Fig. 1

Deosebit de importantă este *reprezentarea suprafeței riemanniene închise R printr-un poligon redus la forma normală* (3.11′) *sau* (4.2). Numărul $g \geqslant 1$, care intervine în forma (3.11′) este *genul* suprafeței, după cum se verifică imediat, alegînd o triangulare a lui R, care să corespundă triangulării poligonului fundamental normal din figura 1 și aplicînd formula lui Euler (1.1). Prin urmare, forma normală (3.11′) corespunde

torului (discului) cu g găuri. Identificînd laturile echivalente ale poligonului normal, obținem un sistem de *retrosecțiuni* pe suprafața R, iar secționarea lui R în lungul lor, operație prin care regăsim poligonul normal, este *descompunerea canonică* a lui R, ([40], p. 241—242).

Consecința 4.3. Pe baza teoremei lui Stoilow de caracterizare topologică a suprafețelor riemanniene, am obținut totodată *reprezentarea suprafețelor triangulabile și orientabile, compacte, printr-un poligon, în particular printr-un poligon normal de forma* (3.11′) *pentru genul* $g>1$ *sau* (4.2) *pentru genul* $g = 0$.

Într-adevăr, o suprafață de acest fel se poate organiza ca suprafață riemanniană închisă, deci îi corespunde un poligon normal. Ca și mai sus, poligonul constituie *descompunerea canonică* a suprafeței [16]).

§ 5. Grupul fundamental și grupurile de omologie ale suprafețelor riemanniene compacte

1. Folosind reprezentarea suprafețelor riemanniene închise cu ajutorul poligonului normal, vom determina grupul fundamental al acestor suprafețe. Rezultatele, pe care le vom stabili, sînt topologice și după teorema lui Stoilow și consecința 4.3, le putem formula și demonstra pentru suprafețe triangulabile și orientabile, compacte.

TEOREMA 5.1. *Grupul fundamental al unei suprafețe triangulabile și orientabile închise* R *de gen* g *este generat de* $2g$ *elemente* $a_1, \ldots, a_{2g}$ *între care există relația* :

$$a_2\, a_1^{-1}\, a_2^{-1} a_1 \ldots a_{2g}\, a_{2g-1}^{-1}\, a_{2g}^{-1}\, a_{2g-1} = 1, \tag{5.1}$$

dacă $g \geqslant 1$, *și se reduce la elementul unitate, dacă* $g = 0$.

1.1. Fie R o suprafață triangulabilă și $\mathcal{T}$ o triangulare a ei. Numim *drum poligonal* al triangulării $\mathcal{T}$, un drum obținut prin descrierea succesivă a unui număr finit de 1-simplexe ale triangulării $\mathcal{T}$, originea fiecăruia coincizînd cu extremitatea precedentului. Admitem că drumul nul este de asemenea drum poligonal. Notînd laturile din $\mathcal{T}$, orientate într-un mod determinat, cu $a_1, a_2, \ldots$, un drum poligonal l va fi un produs de drumuri $l = a_{n_1}^{\varepsilon_1} a_{n_2}^{\varepsilon_2} \ldots a_{n_N}^{\varepsilon_N}$ cu $\varepsilon_j = \pm 1$ (unde originea lui $a_{n_{j+1}}^{\varepsilon_{j+1}}$ coincide cu extremitatea lui $a_{n_j}^{\varepsilon_j}$ $(j = 1, \ldots, N-1)$) sau drumul nul. Compunerea sau produsul drumurilor poligonale se definește ca și pentru drumurile continue arbitrare.

---

[16]) Construirea suprafețelor triangulabile prin identificarea laturilor unui poligon este un procedeu topologic. Am folosit aici grupurile Fuchs, deoarece ne trebuia rezultatul doar pentru suprafețe riemanniene închise. A se vedea reprezentarea prin poligoane normale a suprafețelor orientabile sau nu, precum și a suprafețelor bordate în [31], Cap. II 2.100 — 2.104, Cap. V, § 1, Cap. VIII, § 1 ; [38] 5—5 ; [45] p. 168—171 ; [37], Cap. VI.

Numim *drum frontieră* al unui triunghi din $\mathcal{T}$, un drum poligonal închis, obținut descriind frontiera triunghiului într-un anumit sens, plecînd dintr-unul din vîrfuri. Fiecare triunghi determină șase drumuri frontieră.

PROPOZIȚIA 5.1. *Orice drum pe R cu extremitățile în vîrfuri din $\mathcal{T}$ se deformează continuu într-un drum poligonal din $\mathcal{T}$.*

Fie λ un drum pe R, definit de aplicația $f : I \to R$. Luînd o diviziune suficient de fină a lui I și folosind teorema 5.7 din Cap. I, deducem că f se deformează continuu într-o aplicație simplicială $F : I \to R$, care definește un drum poligonal Λ din $\mathcal{T}$, cu aceleași extremități ca și λ.

1.2. Numim *deformare combinatorică* a unui drum poligonal al lui $\mathcal{T}$ într-un alt drum poligonal al lui $\mathcal{T}$, aplicarea de un număr finit de ori a uneia din următoarele două operații :

(α) *Înserarea sau reducerea unei laturi descrisă în ambele sensuri între două laturi succesive ale drumului.* Fie $l = a_{n_1}^{\varepsilon_1} \ldots a_{n_N}^{\varepsilon_N}$ și a_n^{ε} o latură cu originea în extremitatea lui $a_{n_j}^{\varepsilon_j}$; atunci operația (α) determină drumul $l' = a_{n_1}^{\varepsilon_1} \ldots a_{n_j}^{\varepsilon_j} a_n^{\varepsilon} a_n^{-\varepsilon} a_{n_{j+1}}^{\varepsilon_{j+1}} \ldots a_{n_N}^{\varepsilon_N}$ și reciproc. Remarcăm că, operația (α) păstrează extremitățile drumurilor : Dacă l este un drum închis și $a_{n_N}^{\varepsilon_N} = a_{n_1}^{-\varepsilon_1}$, aceste laturi nu se reduc, *decît* în cazul $N = 2$. Evident, repetînd de un număr finit de ori operația (α) putem insera într-un drum de laturi de forma $l = l_1 l_2$ între drumurile l_1 și l_2 un drum poligonal arbitrar λ cu originea în extremitatea lui l_1, descris în ambele sensuri : $l = l_1 \lambda \lambda^{-1} l_2$.

(β) *Înserarea sau reducerea unui drum frontieră de triunghi din $\mathcal{T}$.* Dacă $l = l_1 l_2$ (l_1 sau l_2 putînd fi eventual drumul nul) și dacă λ este drum frontieră al unui triunghi din $\mathcal{T}$, avînd originea în extremitatea lui l_1, atunci operația (β) ne conduce la drumul $l'' = l_1 \lambda l_2$ și reciproc.

Aplicînd operațiile (β) și (α), putem înlocui o latură $a_i^{\varepsilon_i}$ dintr-un drum l, care aparține drumului frontieră al unui triunghi $a_j^{\varepsilon_j} a_k^{\varepsilon_k} a_i^{\varepsilon_i}$ prin drumul $a_i^{-\varepsilon_i} a_k^{-\varepsilon_k}$, și reciproc, un grup de astfel de laturi $a_i^{-\varepsilon_i} a_k^{-\varepsilon_k}$ prin latura $a_j^{\varepsilon_j}$.

Se verifică imediat că operațiile (α) și (β) se pot realiza prin deformare continuă.

Două drumuri poligonale, care se obțin unul din altul printr-o deformare combinatorică, se numesc *combinatoric omotope*[17]). Ele sînt evident omotope, dar are loc și reciproc :

---

[17]) Se verifică imediat că omotopia combinatorică este o relație de echivalență. Se definește pentru fiecare vîrf $p \in R$, analog cu $\pi_1(R, p)$, grupul claselor de drumuri poligonale închise cu originea p, combinatoric omotope : $\pi_{1,c}(R, p)$ și, pe baza unui izomorfism permis realizat prin drumuri poligonale, grupul fundamental combinatoric $\pi_{1,c}(R)$. Propozițiile 5.1 și 5.2 arată că $\pi_{1,c}(R, p)$ și $\pi_1(R, p)$ sînt izomorfe (clasei de drumuri combinatoric omotope cu un drum poligonal închis l cu originea p, i se asociază clasa $[l]_p$). Grupul $\pi_{1,c}(R, p)$ poate fi folosit pentru a calcula grupul $\pi_1(R, p)$.

PROPOZIȚIA 5.2. *Dacă drumul poligonal închis l este nul-omotop, atunci el este combinatoric nul-omotop.*

Prin definiție (Cap. I, § 1, pct. 2), drumul l dat de $f: I \to R$ este nul-omotop, dacă există o aplicație continuă $F: I \times I \to R$, astfel încît: a) $F(\tau, 0) = f(\tau)$ și $F(\tau, 1) = f(0)$, oricare ar fi $\tau \in I$; b) $F(0, t) = F(1, t) = f(0)$, oricare ar fi $t \in I$.

Fie λ segmentul $t = 0$ din $I \times I$, care corespunde lui l prin F. Preimaginile prin F ale vîrfurilor lui l formează o diviziune a lui λ. Să alegem o subdiviziune a ei și o diviziune a laturei $\tau = 0$ din $I \times I$, suficient de fine ca, ducînd paralele la laturile lui $I \times I$ prin aceste puncte, să descompunem $I \times I$ în dreptunghiuri cu proprietatea următoare: dreptunghiurile cu un vîrf comun sînt transformate de F în interiorul unei stele de triunghiuri din $\mathcal{C}$. Prin diagonale care pleacă din vîrful de coordonate (τ, t) minime al fiecărui dreptunghi, triangulăm $I \times I$. Notăm cu λ' drumul obținut din λ prin punctele de diviziune considerate mai sus, cu $P_0, P_1, \ldots, P_N$ punctele de diviziune de pe latura $\tau = 0$, în ordinea crescătoare a ordonatelor și cu $Q_0, Q_1, \ldots, Q_N$ punctele de aceleași ordonate de pe latura $\tau = 1$. Drumul $F(\lambda')$ coincide cu drumul l divizat, iar $F(P_0 P_N Q_N Q_0)$ este drumul nul redus la $f(0)$.

Folosind din nou teorema 5.7 din Cap. I, deformăm F într-o aplicație simplicială G, astfel încît imaginea fiecărui punct din $I \times I$ să nu părăsească în cursul deformării simplexul în care era cuprinsă inițial. Fie V un vîrf din λ'; după cum $F(V)$ este vîrf în l sau punct interior unei laturi a din l, punctul $G(V)$ coincide cu $F(V)$ sau este extremitate a lui a. Prin urmare, o latură din λ' este dusă de G într-o latură sau un vîrf al lui l, iar $G(\lambda')$ constă din laturile lui l descrise eventual de mai multe ori în ambele sensuri și eventuale drumuri nule reduse la vîrfuri din l. Rezultă astfel că $G(\lambda')$ se obține din l printr-un număr finit de operații (α). Observăm totodată că $G(P_0 P_N Q_N Q_0)$ este drumul nul redus la $f(0)$.

În dreptunghiul $I \times I$, drumul $\lambda' (= P_0 Q_0)$ se deformează însă combinatoric în drumul $P_0 P_N Q_N Q_0$. Într-adevăr, prin operațiile (β) și (α) înlocuim fiecare segment din $P_0 Q_0$ cu drumul format de celelalte două laturi ale triunghiului adiacent (diagonala dreptunghiului și latura verticală); înlocuim apoi diagonalele cu drumurile formate de laturile triunghiurilor adiacente de deasupra lor (latura verticală și cea orizontală) și reducînd cu ajutorul operației (α) laturile verticale descrise în sensuri opuse, obținem drumul $P_0 P_1 Q_1 Q_0$; repetînd procedeul, ajungem la drumul $P_0 P_N Q_N Q_0$.

Fiecărui simplex din $I \times I$ îi corespunde prin G un simplex din R, astfel încît fiecărei operații (α) sau (β) din $I \times I$ îi corespunde o operație (α) sau identitatea respectiv o operație (β), o operație (α) sau identitatea în R. Prin urmare, drumul $G(\lambda')$ deci și drumul l este combinatoric nul omotop.

1.3. Plecînd de la o triangulare a lui R se obține o *descompunere poligonală* aplicînd de un număr finit de ori următoarele operații:

I. Reducerea unei laturi astfel încît să se obțină un poligon [18]).

II. Reducerea unui vîrf comun numai la două laturi.

Într-o descompunere poligonală $\mathcal{P}$ a lui R se definesc din nou drumuri poligonale și deformări combinatorice (α) și (β), unde în loc de drum frontieră al unui triunghi, vom considera un drum frontieră de poligon (eventual cu două laturi) al descompunerii $\mathcal{P}$. Două drumuri de laturi din $\mathcal{P}$, care se obțin unul dintr-altul printr-o deformare combinatorică în $\mathcal{P}$ (i.e. un număr finit de deformări combinatorice (α) și (β) în $\mathcal{P}$) se numesc *combinatoric omotope* în $\mathcal{P}$ [19]).

PROPOZIȚIA 5.3. *Să presupunem că descompunerea poligonală $\mathcal{P}''$ se obține din descompunerea poligonală $\mathcal{P}'$ a lui R, aplicînd una din operațiile I sau II.*

1° *Orice drum poligonal în $\mathcal{P}'$ cu extremități în vîrfuri din $\mathcal{P}''$ se deformează combinatoric în $\mathcal{P}'$ într-un drum poligonal în $\mathcal{P}''$.*

2° *Orice drum poligonal din $\mathcal{P}''$ nul-omotop combinatoric în $\mathcal{P}'$ este nul-omotop combinatoric în $\mathcal{P}''$.*

I. Cazul în care $\mathcal{P}''$ se obține din $\mathcal{P}'$ prin operația I: suprimarea unei laturi a comună poligoanelor P_1 și P_2.

Notăm cu l_1 și l_2 drumurile poligonale din frontierele lui P_1 respectiv P_2, astfel încît aceste poligoane să aibă drumurile frontiere al_1^{-1} respectiv al_2^{-1}.

1° Fie l' un drum poligonal din $\mathcal{P}'$. Dacă l' nu conține latura a, atunci el coincide cu un drum poligonal l'' din $\mathcal{P}''$. Dacă în l' intră latura a^ε, aplicînd deformările (β) și (α) în $\mathcal{P}'$, înlocuim această latură cu drumul l_1^ε și obținem astfel un drum poligonal l'' din $\mathcal{P}''$.

2° Fie l'' un drum poligonal din $\mathcal{P}''$ combinatoric nul-omotop în $\mathcal{P}'$. Evident, l'' este drum poligonal din $\mathcal{P}'$. Cum printr-un număr finit de deformări (α) sau (β) din $\mathcal{P}'$, drumul l'' se deformează în drumul nul, să notăm cu $l'_0 = l''$, l'_1, $l'_2, \ldots, l'_r = 1$ (drumul nul) drumurile poligonale din $\mathcal{P}'$, care se deduc unul dintr-altul prin aplicarea unei singure operații (α) sau (β) în $\mathcal{P}'$. Fiecărui drum l'_j îi asociem, după procedeul de la punctul 1°, un drum poligonal l''_j din $\mathcal{P}''$. Punînd $l''_0 = l''$, se verifică imediat că l''_{j+1} se deduce din l''_j prin deformări combinatorice în $\mathcal{P}''$ (eventual prin identitate) ($j = 0, 1, 2, \ldots, r-1$). Într-adevăr, dacă l'_{j+1} se obține din l'_j prin operația (α) (respectiv (β)), l''_{j+1} rezultă din l''_j prin operații (α) (respectiv prin operația (β), operații (α) sau identitate) Cum l''_r este drumul nul, afirmația 2° este stabilită.

[18]) Suprafața formată de interiorul laturii și de interioarele poligoanelor adiacente la ea să fie omeomorfă cu un poligon.

[19]) Considerînd drumurile poligonale închise din $\mathcal{P}$ cu originea într-un vîrf p a lui $\mathcal{P}$, se poate defini un grup al claselor de drumuri combinatoric omotope în $\mathcal{P}$, iar consecința 5.1 de mai jos arată că acest grup este izomorf cu $\pi_1(R, p)$. El poate fi folosit de asemenea pentru a calcula $\pi_1(R, p)$. (A se vedea procedeul general, aplicabil complexelor finite, în [37], § 44—46).

II. Cazul în care $\mathcal{P}''$ se obţine din $\mathcal{P}'$ prin operaţia II : suprimarea unui vîrf, comun numai la două laturi b şi c şi înlocuirea drumului bc din $\mathcal{P}'$ prin latura $a = bc$ în $\mathcal{P}''$.

1° Fie l' un drum poligonal din $\mathcal{P}'$ cu extremităţi vîrfuri din $\mathcal{P}''$. Dacă în l' intră drumurile bb^{-1}, cc^{-1}, $b^{-1}b$ sau $c^{-1}c$, cu ajutorul operaţiei (α) le suprimăm. Fie l'_1 drumul astfel obţinut.

Dacă în l'_1 intră latura b (sau b^{-1}), ea este urmată (precedată) de fiecare dată de c (respectiv c^{-1}) şi înlocuim drumul bc cu a (respectiv $c^{-1}b^{-1}$ cu a^{-1}). Prin această operaţie, $l'_1 = l''$, drum poligonal din $\mathcal{P}''$, deoarece c sau c^{-1} nu mai intervin. Aceeaşi concluzie : $l'_1 = l''$ are loc, dacă în l'_1 nu intră b sau b^{-1}.

2° Procedînd ca în cazul I, fie l'', $l'_1, \ldots, l'_r = 1$ drumuri ce se deduc fiecare din precedentul aplicînd o operaţie (α) sau (β) în $\mathcal{P}'$. Asociem fiecărui drum l'_j un drum poligonal l''_j din $\mathcal{P}''$, înlocuind latura b cu a şi latura c cu drumul nul, ori de cîte ori intervin. Verificăm apoi că l''_{j+1} se deduce din l''_j prin deformări combinatorice din $\mathcal{P}''$ (eventual reduse la identitate) iar $l''_r = 1$.

Consecinţa 5.1. *Fie $\mathcal{P}$ o descompunere poligonală a suprafeţei R dedusă din triangularea $\mathcal{T}$.*

1° *Orice drum poligonal din $\mathcal{T}$ cu extremităţi vîrfuri ale lui $\mathcal{P}$ se deformează combinatoric în $\mathcal{T}$ într-un drum poligonal din $\mathcal{P}$.*

2° *Orice drum poligonal din $\mathcal{P}$ nul-omotop combinatoric în $\mathcal{T}$ este nul-omotop combinatoric în $\mathcal{P}$.*

1.4. Cu ajutorul propoziţiilor de mai sus, putem demonstra teorema 5.1 relativă la grupul fundamental al unei suprafeţe R triangulabile, orientabile şi închise, de gen $g \geqslant 1$. Fie P un poligon normal corespunzător suprafeţei R, cu vîrfurile echivalente cu un punct $p \in R$ şi laturile două cîte două echivalente notate a_j respectiv a_j^{-1} (consecinţa 4.3). Presupunem laturile numeroatate astfel încît să avem drumul frontieră al lui P :

$$\partial P = a_2\, a_1^{-1}\, a_2^{-1}\, a_1 \ldots a_{2g}\, a_{2g-1}^{-1}\, a_{2g}^{-1}\, a_{2g-1}. \tag{5.2}$$

Considerăm o triangulare $\mathcal{T}$ a lui R, care să fie totodată triangulare a lui P (fig. 1, § 4); prin urmare P constituie o descompunere poligonală a lui R dedusă din $\mathcal{T}$. Conform propoziţiei 5.1 şi consecinţei 5.1.1°, orice drum închis cu originea p de pe R se deformează continuu într-un drum poligonal din P. Prin urmare, $\pi_1(R, p)$ este generat de clasele $[a_j]_p$, pe care, pentru prescurtare, le vom nota tot a_j.

Evident, între generatori are loc relaţia (5.1), deoarece drumul ∂P, (5.2), este nul-omotop. Să arătăm că aceasta este singura relaţie, i.e. orice relaţie $\mathfrak{R}(a_j) = 1$ se reduce la identitate, aplicînd relaţia (5.1) şi relaţiile banale

$$a_j\, a_j^{-1} = 1, \quad a_j^{-1}\, a_j = 1. \tag{5.3}$$

Trecînd de la clase la reprezentanți, relația $\mathfrak{R}(a_j) = 1$, (de fapt $\mathfrak{R}([a_j]_p) = 1$) ne dă drumul $l = \mathfrak{R}(a_j)$ nul-omotop, care este drum de laturi în P, deci și în $\mathcal{T}$. Conform propoziției 5.2 și consecinței 5.1.2°, drumul l este combinatoric nul-omotop în P. Fie atunci $l_0 = l$, l_1, l_2, ..., ..., $l_r = 1$ (drumul nul) un șir de drumuri poligonale din P, care se obțin fiecare din precedentul prin aplicarea unei singure deformări (α) sau (β) în P. Relațiile corespunzătoare $\mathfrak{R}(a_j) = \mathfrak{R}_0(a_j)$, $\mathfrak{R}_1(a_j)$, ... $\mathfrak{R}_r(a_j) \equiv 1$ se deduc fiecare din precedenta, aplicînd o relație (5.3) respectiv (5.2), după cum l_{j+1} se obține din l_j prin operația (α) respectiv (β).

2. Relativ la omologie, amintim

TEOREMA 5.2. *O suprafață triangulabilă și orientabilă, închisă R de gen g are următoarele grupuri de omologie:*

1° $\mathcal{H}^0(R)$ *și* $\mathcal{H}^2(R)$ *sînt grupuri ciclice libere cu un generator.*

2° $\mathcal{H}^1(R)$ *este grupul abelian liber cu* $2g$ *generatori.*

3° $\mathcal{H}^k(R)$ *este grupul nul pentru* $k>2$. (A se vedea demonstrația în [45], p. 91, p. 168—171 sau [38], Cap. V).

Observăm că $\mathcal{H}^0(R)$ este generat de clasa de omologie a unui 0-ciclu format dintr-un singur 0-simplex oarecare.

Grupul $\mathcal{H}^2(R)$ este generat de clasa de omologie a 2-ciclului format de toate triunghiurile unei triangulări $\mathcal{T}$ a lui R, orientate coerent.

Drept generatori ai lui $\mathcal{H}^1(R)$ se pot lua clasele de omologie ale 1-ciclurilor a_j corespunzătoare unei descompuneri canonice a lui R (laturi ale poligonului normal P, pct. 1.4). Acest rezultat se poate deduce și din teorema 5.1 folosind [20]:

TEOREMA 5.3. *Grupul de omologie* $\mathcal{H}^1(X)$ *al unui spațiu topologic liniar conex este izomorf cu grupul factor al grupului fundamental* $\pi_1(X)$ *prin subgrupul său comutatorial.*

2.1. Oricărui drum λ de pe un spațiu topologic oarecare X dat prin aplicația continuă $f: I \to X$ i se poate asocia un 1-lanț singular λ^1, descompunînd I într-un număr finit, dar arbitrar, N de subsegmente $'\sigma_k^1$ ($k = 1, \ldots, N$), notînd cu σ_k^1 1-simplexul singular definit de $'\sigma_k^1$ și f, și luînd $\lambda^1 = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^1$. Deși λ^1 nu este unic determinat, clasa sa de omologie $\dot{\lambda}^1$ este unică, după cum rezultă din

PROPOZIȚIA 5.4. *Dacă* λ_0 *și* λ_1 *sînt două drumuri cu aceleași extremități, omotope și dacă* λ_0^1 *respectiv* λ_1^1 *sînt două cicle asociate lor prin procedeul de mai sus, atunci* λ_0^1 *și* λ_1^1 *sînt omologe.*

Într-adevăr, să alegem ca preimagini ale drumurilor λ_k ($k = 0, 1$) două segmente $'\lambda_k$, formînd laturile $t = 0$ și $t = 1$ în pătratul $\Delta = I \times I$ reprezentat în X de aplicația $p = F(\tau, t)$, care dă o deformare continuă

[20]) Cu privire la legătura între grupurile de omologie și cele de omotopie a se vedea [45], Cap. IV, A.

a lui λ_0 în λ_1 (Cap. I, § 1, pct. 2). Prelungim descompunerile luate pe $'\lambda_k$ pentru definirea ciclelor λ_k^1 la o descompunere a lui Δ în triunghiuri. Orientînd în sens direct aceste triunghiuri și reprezentîndu-le prin F în X, obținem un 2-lanț singular α^2 cu $\partial\alpha^2 = \lambda_0^1 - \lambda_1^1$.

Putem defini deci o aplicație $\psi : \pi_1(X, p) \to \mathcal{H}^1(X)$, $p \in X$, asociind fiecărei clase de drumuri închise, cu originea p, omotope $[\lambda]_p$, clasa de 1-cicle omologe λ^1. Se verifică imediat că ψ este un *omomorfism*.

2.2. *Să introducem de aici înainte ipoteza că* X *este liniar conex* și să demonstrăm mai întîi că ψ este un *omomorfism surjectiv*, stabilind

PROPOZIȚIA 5.5. *Un* 1*-lanț singular* α^1 *cu proprietatea* $\partial\alpha^1 = \sigma^0 - \sigma_0^0$, *unde* σ^0 *și* σ_0^0 *sînt* 0*-simplexe (egale sau nu), se poate scrie sub forma* $\alpha^1 = \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j^1$, *unde* $\tilde{\sigma}_j^1$ *este un* 1*-simplex singular și originea lui* $\tilde{\sigma}_{j+1}^1$ *coincide cu extremitatea lui* $\tilde{\sigma}_j^1$, $(j = 1, \ldots, m-1)$, *originea lui* $\tilde{\sigma}_1^1$ *este* σ_0^0 *și extremitatea lui* $\tilde{\sigma}_m^1$ *este* σ^0.

Fie $\alpha^1 = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \sigma_\nu^1$ și k_ν numere naturale, ceea ce se poate realiza alegînd σ_ν^1 cu orientarea convenabilă [21]).

Vom demonstra proprietatea prin inducție relativ la $s = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu$.

Dacă $s = 1$, α^1 se reduce la un simplex σ^1. 1) Dacă extremitatea lui σ^1 este σ^0, propoziția este verificată (originea lui σ^1 este σ_0^0). 2) Dacă extremitatea lui σ^1 este $\sigma_1^0 \neq \sigma^0$, atunci $\sigma^0 = \sigma_0^0$ și σ_1^0 este totodată originea lui σ^1. Considerăm un drum arbitrar λ unind σ^0 cu σ_1^0 și λ^1 un lanț asociat lui λ. Putem scrie $\alpha^1 = \lambda^1 + \sigma^1 + (-\lambda^1)$, ceea ce demonstrează din nou propoziția.

Presupunem că ea este adevărată pentru $s \leqslant N$ și o vom demonstra pentru $s = N + 1$. Distingem din nou două cazuri:

1) Există printre σ_ν^1 un 1-simplex σ^1 cu extremitatea σ^0. Lanțul $\tilde{\alpha}^1 = \alpha^1 - \sigma^1$ îndeplinește ipoteza inducției, deci se poate scrie sub forma $\tilde{\alpha}^1 = \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{\sigma}_j^1$ astfel încît originea lui $\tilde{\sigma}_1^1$ este σ_0^0, originea lui $\tilde{\sigma}_{j+1}^1$ este extremitatea lui $\tilde{\sigma}_j^1$ $(j = 1, \ldots, m-2)$ și extremitatea lui $\tilde{\sigma}_{m-1}^1$ este originea lui σ^1. Notînd $\tilde{\sigma}_m^1 = \sigma^1$, $\alpha^1 = \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j^1$ constituie reprezentarea căutată.

2) Nici un simplex σ_ν^1 nu are extremitatea σ^0. Atunci $\sigma^0 = \sigma_0^0$. Alegem de exemplu $\sigma^1 = \sigma_1^1$ și notăm σ_1^0 originea, σ_2^0 extremitatea lui σ^1. Lanțul $\tilde{\alpha}^1 = \alpha^1 - \sigma^1$, pentru care luăm $\partial\tilde{\alpha}^1 = \sigma_1^0 - \sigma_2^0$, satisface ipoteza inducției, deci se scrie ca mai sus $\tilde{\alpha}^1 = \sum_{j=1}^{N} \hat{\sigma}_j^1$, originea lui $\hat{\sigma}_1^1$ fiind σ_2^0, originea lui $\hat{\sigma}_{j+1}^1$ fiind extremitatea lui $\hat{\sigma}_j^1$ $(j = 1, \ldots, N-1)$, iar extremitatea lui $\hat{\sigma}_N^1$ fiind σ_1^0. Considerăm din nou un drum λ, unind σ^0

[21]) Presupunem $\alpha^1 \neq 0$, în cazul $\alpha^1 = 0$ propoziția fiind evidentă.

cu σ_2^0 și scriem $\alpha^1 = \lambda^1 + \sum_{j=1}^{N} \hat{\sigma}_j^1 + \sigma^1 + (-\lambda^1)$, ceea ce trebuia demonstrat. La o notare convenabilă a 1-simplexelor $\alpha^1 = \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j^1$.

2.3. Vom arăta acum tot în ipoteza X liniar conex că *nucleul omomorfismului* ψ *este* $\mathcal{C}(X, p)$, *subgrupul comutatorial al lui* $\pi_1(X, p)$.

Evident, Ker $\psi \supset \mathcal{C}(X, p)$, deoarece $\mathcal{H}^1(X)$ e comutativ.

Incluziunea contrară se demonstrează în următoarele etape:

1) Dacă drumului λ îi corespunde un 1-ciclu λ^1 omolog cu 0, atunci λ este omotop cu un drum μ, căruia îi corespunde $\mu^1 = 0$.

Într-adevăr, există un 2-lanț $\sigma^2 = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \sigma_\nu^2$ cu $\partial\sigma^2 = \lambda^1$. Alegem în fiecare σ_ν^2 un vîrf p_ν și unim p (originea lui λ) cu p_ν printr-un drum l_ν. Notăm s_ν drumul format de $\partial\sigma_\nu^2$ cu originea p_ν și orientarea indusă de σ_ν^2. Drumul $l_\nu\, s_\nu\, l_\nu^{-1}$ este omotop cu zero, deci drumul

$$\mu = \lambda\,(l_1\, s_1\, l_1^{-1})^{-k_1} \ldots (l_n\, s_n\, l_n^{-1})^{-k_n}$$

este omotop cu μ, iar $\mu^1 = 0$.

2) Fie deci λ un drum pentru care $\lambda^1 = 0$. Drumul λ are o descompunere sub forma de produs de drumuri

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m,$$

astfel încît oricare λ_k are în produs suma exponenților 0. Vom arăta că λ este omotop cu

$$\lambda^* = \lambda_1^* \lambda_2^* \ldots \lambda_m^*,$$

unde λ_k^* sînt drumuri închise cu originea p și intră în produs cu suma exponenților 0.

În acest scop unim p cu originea lui λ_k printr-un drum Λ_k, convenind că Λ_1 este drumul nul și că $\Lambda_k = \Lambda_h$, dacă λ_k și λ_h au aceeași origine. Evident, λ este omotop cu

$$\lambda^* = (\lambda_1 \Lambda_2^{-1})(\Lambda_2 \lambda_2 \Lambda_3^{-1}) \ldots (\Lambda_m \lambda_m).$$

Să arătăm că luînd $\lambda_k^* = \Lambda_k\, \lambda_k\, \Lambda_{k+1}^{-1}$ ($k = 1, \ldots, m$, $\Lambda_{m+1} = \Lambda_1$), descompunerea $\lambda^* = \lambda_1^* \ldots \lambda_m^*$ satisface condiția cerută. Pentru aceasta să remarcăm că $\lambda_k = \lambda_j$ implică $\lambda_k^* = \lambda_j^*$ (deoarece λ_k și λ_j avînd aceeași origine și aceeași extremitate, $\Lambda_k = \Lambda_j$ și $\Lambda_{k+1} = \Lambda_{j+1}$). De asemenea, $\lambda_k = \lambda_j^{-1}$ implică $\lambda_k^* = \lambda_j^{*-1}$ (fiindcă avem $\Lambda_k = \Lambda_{j+1}$ și $\Lambda_{k+1} = \Lambda_j$). Prin urmare, λ_k^* are în produs același exponent total 0 ca și λ_k.

3) Fie deci $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m$ un drum, astfel încît λ_k sînt drumuri închise cu originea p, avînd în produs suma exponenților 0 și $\lambda_{k+1} \neq \lambda_k^{-1}$ ($k = 1, 2, \ldots, m-1$) [22]. Atunci λ este omotop cu un produs de comutatori.

[22]) Reducerea factorilor consecutivi cu exponenți opuși păstrează clasa de omotopie.

Într-adevăr, fie j primul indice pentru care $\lambda_1^{-1} = \lambda_j$; notînd $U = \lambda_2 \dots \lambda_{j-1}$ și $V = \lambda_{j+1} \dots \lambda_m$ (dacă există), λ se scrie sub forma $\lambda = \lambda_1 U \lambda_1^{-1} V$ și este omotop cu $\lambda_1 U \lambda_1^{-1} U^{-1} W$, unde W se obține din UV suprimînd eventualii factori consecutivi cu exponenți opuși. Drumul W are cel mult $m-2$ factori și procedeul se poate repeta. După un număr finit de etape obținem un produs de comutatori omotop cu λ.

Prin urmare,

$$\mathcal{H}^1(X) \simeq \pi_1(X, p)/\mathcal{C}(X, p) \tag{5.4}$$

sau, aplicînd izomorfismul $i_p : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X)$, și notînd cu $\mathcal{C}(X)$ subgrupul comutatorial al lui $\pi_1(X)$,

$$\mathcal{H}^1(X) \simeq \pi_1(X)/\mathcal{C}(X). \tag{5.4'}$$

2.4. *Observația* 5.1. Fie X un spațiu topologic liniar conex și local simplu conex. Aplicînd propoziția 2.7 din Cap. I, pentru subgrupul $\mathcal{G} = \mathcal{C}(X, p)$ al lui $\pi_1(X, p)$, $p \in X$, obținem o acoperire $(\check{X}, \check{f}, X)$ regulată (consecința 2.3, Cap. I), avînd grupul fundamental izomorf cu $\mathcal{C}(X)$ (teorema 2.1, Cap. I) și grupul transformărilor de acoperire izomorf cu $\mathcal{H}^1(X)$ (teorema 3.2, Cap. I). După teorema 5.3, $\mathcal{H}^1(\check{X}) = 0$, deci $\check{X}$ este prin definiție *omolog simplu conex*. Această acoperire a fost introdusă de H. Weyl ([47], p. 74) în cazul $X = R$ suprafață riemanniană, iar $\check{R}$ a fost numită suprafața de acoperire a funcțiilor integrale.

Capitolul III

Clase de aplicații omotope ale suprafețelor riemanniene

§ 1. Caracterizarea claselor de aplicații continue omotope

1. Fie R și R' două suprafețe riemanniene. Am arătat în Cap. I că orice aplicație continuă (omeomorfism surjectiv) $f: R \to R'$ induce, pentru fiecare punct $p \in R$, un omomorfism (izomorfism surjectiv) $f_p: \pi_1(R, p) \to \pi_1[R', f(p)]$ (teorema 1.1), deci raportîndu-ne la grupurile fundamentale, un omomorfism (izomorfism surjectiv) $F: \pi_1(R) \to \pi_1(R')$ determinat abstracție făcînd de un automorfism interior al lui $\pi_1(R')$ (teorema 1.1'). Mai mult, clasei de aplicații omotope cu f îi corespunde clasa de omomorfisme echivalente cu f_p respectiv clasa de omomorfisme, ce se obțin din F prin automorfismele interioare ale grupului $\pi_1(R')$ (teoremele 5.3, 5.4 și 5.3'''). Se definește astfel o *aplicație* Γ *de la mulțimea claselor de aplicații omotope* $R \to R'$ *la mulțimea claselor de omomorfisme* $\pi_1(R) \to \pi_1(R')$, *ce diferă prin automorfisme interioare.*

2. Vom demonstra acum, *în ipoteza că* R' *nu este conform echivalentă cu sfera, că aplicația* Γ *este injectivă*, stabilind următoarea reciprocă a teoremei 5.1 din Cap. I:

TEOREMA 1.1. *Fie* R *și* R' *două suprafețe riemanniene,* R' *neechivalentă conform cu o sferă; fie* $f_k: R \to R'$, $(k = 0, 1)$, *două aplicații continue,* $\hat{f}_k: \hat{R} \to \hat{R}'$ *și* $\chi_k = \chi_{\hat{f}_k}: G \to G'$ *aplicațiile determinate de* f_k *după teorema* 5.1. *Dacă există* $A' \in G'$, *astfel încît*

$$\chi_1(T) = A' \circ \chi_0(T) \circ A'^{-1},$$

aplicațiile f_k *sînt omotope.*

Conform relației (5.4), Cap. I, avem $\chi_{A'^{-1} \circ \hat{f}_1} = \chi_0$. Putem deci presupune, înlocuind $\hat{f}_1$ cu $A'^{-1} \circ \hat{f}_1$, pe care-l vom nota tot $\hat{f}_1$, că $\chi_1 = \chi_0$. Vom construi atunci o deformare continuă a lui $\hat{f}_0$ în $\hat{f}_1$ prin aplicații continue $\hat{f}_t: \hat{R} \to \hat{R}'$, $t \in I$, care induc omomorfismul χ_0. După teorema 5.2, 3° din Cap. I, aplicația $\hat{f}_t$ induce și aplicația continuă $f_t: R \to R'$. Vom obține teorema 1.1, arătînd că, pentru $t \in I$, aplicațiile f_t formează o deformare continuă a lui f_0 în f_1.

După discuția din Cap. II, § 2, pct. 2, $\hat{R}$ este planul euclidian sau semiplanul, deci pe $\hat{R}$ avem o metrică euclidiană respectiv neeuclidiană (formula (3.1) din Cap. II). Transformările grupului G' invariază această metrică și dreptele (euclidiene sau neeuclidiene) corespunzătoare.

Fie $\hat{p}$ un punct din $\hat{R}$. Definim $\hat{f}_t(\hat{p})$, $t \in (0,1)$, ca fiind punctul de pe segmentul de dreaptă ce unește $\hat{f}_0(\hat{p})$ cu $\hat{f}_1(\hat{p})$, care împarte acest segment în raportul $t : 1 - t$. Aplicația $\hat{f}_t : \hat{R} \to R$ este continuă și, cînd t descrie I, dă o deformare continuă a lui $\hat{f}_0$ în $\hat{f}_1$.

Vom verifica relația

$$\hat{f}_t\ [T\ (\hat{p})] = \chi_0\,(T)\ [\hat{f}_t\ (\hat{p})], \tag{1.1}$$

oricare ar fi $T \in G$. Pentru $t = 0$ sau 1, egalitatea (1.1) este adevărată prin ipoteză. Transformarea $\chi_0(T)$ duce segmentul de dreaptă $\sigma : \hat{f}_0(\hat{p})\,\hat{f}_1(\hat{p})$ în segmentul de dreaptă $\chi_0(T)(\sigma) : \hat{f}_0[T(\hat{p})]\,\hat{f}_1[T(\hat{p})]$. Ea transformă punctul $\hat{f}_t(\hat{p})$, care divide σ în raportul $t : 1 - t$, în punctul $\chi_0(T)\ [\hat{f}_t\ (\hat{p})]$, care divide $\chi_0(T)(\sigma)$ în același raport, deci $\chi_0(T)\ [\hat{f}_t(\hat{p})]$ coincide cu $\hat{f}_t\,[T(\hat{p})]$.

Fiecare aplicație $\hat{f}_t$ induce omomorfismul $\chi_{f_t} = \chi_0$, prin urmare induce o aplicație continuă $f_t : R \to R'$, astfel încît

$$f_t \circ \Pi_G = \Pi_{G'} \circ \hat{f}_t.$$

Cînd t descrie I, aplicațiile f_t definesc o deformare continuă a lui f_0 în f_1 (continuitatea lui $f_t(p)$ în raport cu ambele variabile t și p, rezultînd din continuitatea lui $\hat{f}_t(\hat{p})$ și din faptul că Π_G și $\Pi_{G'}$ sînt omeomorfisme locale).

Consecința 1.1. *Aplicația* Γ *este injectivă, dacă* R' *nu este conform echivalentă cu sfera.*

Dacă aplicațiile continue $f_k : R \to R'$, $k = 1, 2$, induc omomorfismele $F_k : \pi_1(R) \to \pi_1(R')$ din aceeași clasă, atunci după propoziția 1.8 din Cap. I, oricare ar fi $p \in R$, omomorfismele f_{kp} sînt echivalente. Prin urmare, din teorema 5.4, Cap. I și teorema 1.1 de mai sus, rezultă că f_k sînt omotope [1]).

Observația 1.1. *Dacă* R' *este conform echivalentă cu sfera, teorema 1.1. nu mai este adevărată,* după cum arată următorul exemplu : R și R' sfere, f_0 omeomorfism și f_1 aplicația constantă. După teorema 3.1, consecința 2.2 și propoziția 2.4, care vor fi demonstrate în acest capitol, f_0 nu se deformează continuu în f_1, dar $G = \{1\}$ astfel încît $\chi_0 = \chi_1$.

Observația 1.2. *Fie* R *și* R' *două suprafețe riemanniene,* R *echivalentă, iar* R' *neechivalentă conform cu sfera. Orice aplicație continuă* $R \to R'$ *este omotopă cu o aplicație constantă.*

---

[1]) Consecința 1.1 constituie o reciprocă a teoremei 5.3‴ din Cap. I, în condițiile $X = R$, $X' = R'$, suprafețe riemanniene, R' neechivalentă conform cu sfera. În aceleași condiții, în raționamentul de mai sus este stabilită și reciproca teoremei 5.3″ din Cap. I.

3. Presupunînd R și R' suprafețe riemanniene compacte, vom deduce că *aplicația* Γ *este surjectivă*, din

TEOREMA 1.2. (Hopf, [24]). *Fie R și R' două suprafețe riemanniene compacte. Orice omomorfism $F: \pi_1(R) \to \pi_1(R')$ este indus de o aplicație continuă $f: R \to R'$.*

Dacă R sau R' este sfera, teorema este banală, F fiind unic determinat și indus de orice aplicație continuă $R \to R'$, de exemplu de aplicația constantă.

Vom nota cu g respectiv g' genul lui R respectiv R' și vom presupune: $g,\ g' \geqslant 1$.

Fie $p_0 \in R$ și $p_0' \in R'$. Să notăm cu $a_1, \ldots, a_{2g}$ un sistem de drumuri închise cu originea p_0, care formează o descompunere canonică a lui R, astfel încît tăind R în lungul acestor drumuri să obținem poligonul normal P (consecința 4.2, Cap. II). Frontiera ∂P este alcătuită din laturile: $a_{2j}, a_{2j-1}^{-1}, a_{2j}^{-1}, a_{2j-1}$, $j = 1, \ldots, g$, care, descrise succesiv, dau drumul nul-omotop pe R: $a = a_2\, a_1^{-1} a_2^{-1}\, a_1 \ldots a_{2g-1}$ (după formula (3.11') din Cap. II).

Folosind notațiile din Cap. I, § 1, pct. 4, formăm omomorfismul $f_{p_0} = i_{p_0'} \circ F \circ i_{p_0}: \pi_1(R, p_0) \to \pi_1(R', p_0')$. Alegem în clasa $f_{p_0}([a_k]_{p_0})$ un drum a_k' cu originea p_0' și definim pe mulțimea $\bigcup_{k=1}^{2g} a_k$ aplicația continuă f, astfel încît $f(p_0) = p_0'$ și $f(a_k) = a_k'$ (a_k și a_k' considerate ca drumuri continue).

Ne propunem să extindem f la R. În acest scop, stabilim mai întîi o aplicație continuă $\psi: P \to \hat{R}'$, unde $(\hat{R}', \Pi_{G'}, R')$ este acoperirea universală a lui R', în modul următor:

Dacă $\tilde{p}_0$ este punctul din P origine a lui a_2, iar $\hat{p}_0'$ este un punct din $\Pi_{G'}^{-1}(p_0')$, luăm $\psi(\tilde{p}_0) = \hat{p}_0'$.

Pe ∂P deducem ψ din f prin compunere cu aplicația obținută ridicînd $a' = f(a)$ din $\hat{p}_0'$ prin drumul $\hat{a}'$[2]). Deoarece a' este nul-omotop, $\hat{a}'$ se închide (teorema 2.1, 2°, Cap. II), deci ψ este o aplicație continuă univocă a lui ∂P în $\hat{R}'$.

Fie $\tilde{p} \in \overset{\circ}{P}$ și $\hat{p}' \in \hat{R}'$; h o reprezentare conformă a lui $\overset{\circ}{P}$ pe cercul unitate $c: |\zeta| < 1$, prelungită topologic la P, prin care $h(\tilde{p}) = 0$; g aplicația continuă a lui $\bar{c}$ în $\hat{R}'$, cu $g(0) = \hat{p}'$, care transformă prin omotetie raza 0ζ, $|\zeta| = 1$, în segmentul (euclidian sau nu, după cum $g' = 1$ sau > 1) de extremități $\hat{p}'$ și $\psi \circ h^{-1}(\zeta)$ din $\hat{R}'$; definim $\psi = g \circ h$.

Luînd $f(p) = \Pi_{G'}[\psi(\tilde{p})]$, pentru orice $p \in R - a$ și $\tilde{p}$ punctul corespunzător lui p din $\overset{\circ}{P}$, obținem o aplicație continuă $f: R \to R'$, care induce omomorfismul f_{p_0}, deci pe F.

Observația 1.3. Dacă A' este un automorfism interior al lui $\pi_1(R')$, iar F un omomorfism: $\pi_1(R) \to \pi_1(R')$, indus de o aplicație continuă

[2]) După procedeul de transport al drumurilor descris în Cap. I, pct. 2.1, aplicația $\Pi_{G'}$ stabilește un omeomorfism între $\hat{a}'$ și a'.

$f:R \to R'$, teorema 1.2 arată că orice omomorfism $F_1 = A' \circ F$ este indus de o aplicație continuă $f_1:R \to R'$ și din teorema 1.1 rezultă f_1 omotop cu f, (evident, presupunînd satisfăcute condițiile relative la R și R' de aplicare a acestor teoreme).

Observația 1.4. Teoremele 1.1 și 1.2 arată că clasele de aplicații omotope ale unei suprafețe riemanniene compacte R în suprafața riemanniană compactă R' de gen $g' \geqslant 1$ sînt caracterizate prin clasele de omomorfisme ale grupurilor fundamentale induse de aceste aplicații. În cazul cînd $g' = 0$, caracterizarea acestor clase a fost dată de L. J. Brouwer, și va fi prezentată în §3, teoremele 3.1 și 3.2, folosind în acest scop noțiunea de *grad*, pe care o vom defini în §2.

4. *Consecința* 1.2. *Aplicînd din nou teorema lui S. Stoilow de caracterizare topologică a suprafețelor riemanniene, rezultatele din acest paragraf iau forma următoare*:

Fie R și R' *suprafețe triangulabile și orientabile.* Fiecărei clase de aplicații continue omotope $f:R \to R'$ i se asociază clasa de omomorfisme ce se obțin dintr-un omomorfism $F: \pi_1(R) \to \pi_1(R')$, indus de f după teorema 1.1′, Cap. I, prin automorfisme interioare ale grupului $\pi_1(R')$. Această corespondență, pe care o notăm Γ, este injectivă dacă R' nu este omeomorfă cu sfera și surjectivă, dacă R și R' sînt compacte.

Teorema 1.1 rămîne adevărată în ipoteza: R și R' suprafețe triangulabile și orientabile, R' neomomorfă cu o sferă.

Teorema 1.2 (Hopf) se păstrează pentru R și R' suprafețe triangulabile, orientabile, compacte. Analog se extind și celelalte observații.

§ 2. Gradul unei aplicații continue

În teoria lui Teichmüller intervin clasele de omotopie ale omeomorfismelor $R \to R'$, unde R și R' sînt suprafețe riemanniene. Pentru a preciza rezultatele din paragraful precedent în acest caz, vom demonstra după H. Seifert [36] o formulă a lui H. Kneser [26]. În acest scop, grupăm în paragraful de față mai multe rezultate auxiliare.

Noțiunile, propozițiile și demonstrațiile pe care le vom întîlni în §§ 2—5 ale acestui capitol au caracter topologic (exceptînd observația 2.1 și diferitele ei aplicații). De aceea le vom da în formularea lor obișnuită, pentru *suprafețe triangulabile și orientabile, în genere compacte.* Ele vor fi însă aplicate în teoria lui Teichmüller pentru suprafețe riemanniene.

1. *Acoperiri triangulare.* Fie R și R' două suprafețe *triangulabile.* Alături de acoperirile simpliciale (Cap. I, § 5, pct. 5.3), vom aprofunda în cazul acesta particular de complexe, un nou tip special de acoperire:

Acoperirea (R, f, R') se numește *triangulară*, dacă există triangulări convenabile $\mathcal{T}$ pe R și $\mathcal{T}'$ pe R', astfel încît fiecare triunghi din $\mathcal{T}$ să fie reprezentat topologic de f pe un triunghi din $\mathcal{T}'$.

Seifert distinge următoarele trei tipuri de acoperiri triangulare (R, f, R'):

I. Acoperirea este neramificată (f este omeomorfism local).

II. Acoperirea este ramificată, dar f este o transformare interioară.

III. Acoperirea prezintă cute: două triunghiuri adiacente abc și abd din $\mathcal{T}$ sînt proiectate de f peste același triunghi $a'b'c'$ din $\mathcal{T}'$, astfel încît acoperirea prezintă o cută peste latura $a'b'$.

Observația 2.1. Pe orice suprafață triangulabilă și orientabilă R se poate introduce o metrică cu curbură constantă. După teorema lui Stoilow, pe R se poate defini o structură conformă. Folosind procedeul dezvoltat în observația 4.1 din Cap. I, pe R se poate introduce o metrică cu ajutorul aceleia de pe $\hat{R}$. Această metrică va fi iperbolică, euclidiană sau sferică, după cum $\hat{R}$ este semiplanul, planul euclidian sau sfera.

PROPOZIȚIA 2.1. (Kneser). *Fie* $f_k : R \to R'$ $(k = 0,1)$ *două aplicații continue. Presupunem suprafața* R' *înzestrată cu o metrică cu curbură constantă. Dacă distanța între punctele* $f_0(p)$ *și* $f_1(p)$ *este mai mică decît un număr* $\varepsilon > 0$ *suficient de mic, oricare ar fi* $p \in R$, *atunci* f_0 *și* f_1 *sînt omotope.*

Să unim $f_0(p)$ și $f_1(p)$ rectiliniu în metrica considerată și să definim f_t astfel încît $f_t(p)$ să descompună segmentul $f_0(p)f_1(p)$ în raportul $t : 1-t$, $t \in [0,1]$.

PROPOZIȚIA 2.2. *Orice aplicație continuă se deformează într-o aplicație corespunzătoare unei acoperiri triangulare* [3]).

Să considerăm o aplicație continuă $f : R \to R'$, să înzestrăm R' cu o metrică de curbură constantă și să luăm pe R o triangulare suficient de fină (Cap. I, pct. 5.2). Un triunghi de vîrfuri a, b, c din R este reprezentat prin f pe un triunghi singular de vîrfuri a', b', c'. Punctele a', b', c' determină un triunghi geodezic pe R'. Dacă acest triunghi este degenerat într-un segment sau într-un punct, vom alege un vîrf nou respectiv două vîrfuri noi, suficient de apropiate de poziția inițială, dar astfel încît să avem un triunghi geodezic nedegenerat. Păstrăm pentru vîrfuri notația a', b', c' și construim o aplicație continuă ψ, care reprezintă topologic fiecare triunghi abc pe triunghiul $a'b'c'$. Pe R avem un număr finit de triunghiuri $\Delta_j (j = 1, \ldots, N)$ și notăm Δ_j' triunghiurile geodezice de vîrfuri corespunzătoare; reprezentăm topologic Δ_1 pe Δ_1', prelungim reprezentarea la triunghiurile Δ_j adiacente cu Δ_1, astfel încît omeomorfismele să coincidă pe laturile comune și repetăm procedeul ([40], p. 211). Cum triangularea lui R este oricît de fină și imaginile vîrfurilor acestei triangulări prin f respectiv ψ sînt oricît de apropiate vrem, pentru orice $p \in R$, distanța între $f(p)$ și $\psi(p)$ va fi mai mică decît un număr $\varepsilon > 0$ arbitrar luat; deci, după propoziția 2.1, aplicațiile ψ și f sînt omotope. Pe de altă parte, acoperirea (R, ψ, R') este triangulară. Triunghiurile $a'b'c'$ nu for-

[3]) Propoziția 2.2 este analogă teoremei 5.7 din Cap. I.

mează în general o triangulare a lui R', dar cum laturile lor sînt geodezice, au un număr finit de puncte de intersecție și la o subdiviziune convenabilă a acestor triunghiuri în triunghiuri $\alpha'\beta'\gamma'$, putem construi o triangulare a lui R', în care $\alpha'\beta'\gamma'$ să fie triunghiuri. Transportăm această diviziune prin ψ pe R, deoarece ψ este un omeomorfism al fiecărui triunghi *abc* pe *a'b'c'* și obținem o triangulare a lui R, astfel încît fiecare triunghi $\alpha\beta\gamma$ al ei este reprezentat topologic de ψ pe un triunghi $\alpha'\beta'\gamma'$ al triangulării lui R'.

2. *Gradul unei aplicații continue.* Fie R și R' suprafețe *triangulabile și orientabile, compacte*, iar f o *aplicație continuă a* lui R în R'. Conform teoremei 5.5 din Cap. I, f induce un omomorfism între grupurile de omologie 2-dimensionale :

$$\varphi^2 : \mathcal{H}^2(R) \to \mathcal{H}^2(R'),$$

iar după teorema 5.2 din Cap. I, grupurile $\mathcal{H}^2(R)$ și $\mathcal{H}^2(R')$ sînt ciclice libere, generate de exemplu de $\dot{\gamma}^2$ respectiv $\dot{\gamma}'^2$, unde γ^2 și γ'^2 sînt 2-ciclele formate de triunghiurile unei triangulări a lui R respectiv R', orientate coerent. *Alegînd o orientare pe* R și R', să presupunem triunghiurile din γ^2 și γ'^2 orientate cu orientarea indusă. Omomorfismul φ^2 determină atunci univoc și este complet determinat de întregul c pentru care :

$$\varphi^2(\dot{\gamma}^2) = c\,\dot{\gamma}'^2 \tag{2.1}$$

întreg numit *gradul aplicației* f (Brouwer [16]).

Din teorema 5.6, Cap. I, rezultă

Consecința 2.1. *Două aplicații continue omotope* : $R \to R'$ *au același grad.*

Observația 2.2. În cazul cînd f este o aplicație simplicială, gradul c primește următoarea interpretare : Deoarece 2-lanțurile de 2-simplexe ale unei triangulări a unei suprafețe sînt omologe, atunci și numai atunci cînd coincid (singurul 2-ciclu frontieră fiind ciclul nul), relația (2.1) devine, cu notația de la teorema 5.5, Cap. I,

$$\Phi^2(\gamma^2) = c\,\gamma'^2. \tag{2.2}$$

Într-un 2-simplex σ'^2 din γ'^2 se transformă c_+ 2-simplexe din γ^2 cu păstrarea și c_- 2-simplexe cu schimbarea orientării și avem :

$$c = c_+ - c_-. \tag{2.3}$$

Rezultatul se păstrează în cazul cînd f determină o acoperire triangulară : $\Phi^2(\gamma^2)$ este acum un 2-ciclu singular, dar peste fiecare σ'^2 se proiectează topologic c_+ respectiv c_- simplexe σ^2 din γ^2 cu păstrarea respectiv schimbarea orientării. Aceste simplexe $f(\sigma^2)$ nu mai sînt în genere egale cu $\pm\sigma'^2$, dar sînt omologe singular cu el astfel încît $c\,\gamma'^2$ este omolog singular cu un lanț al triangulării lui R', în care σ'^2 intră cu coeficientul $c_+ - c_-$; cele două lanțuri sînt omologe și în triangularea lui R', deci ca mai sus $c = c_+ - c_-$.

PROPOZIȚIA 2.3. *Fie R, R' și R'' suprafețe triangulabile, orientate și compacte, iar $f: R \to R'$ respectiv $f': R' \to R''$ două aplicații continue de grade c și c'. Gradul aplicației $f' \circ f$ este cc'.*

Într-adevăr, păstrînd notațiile de mai sus, să însemnăm cu γ''^2 clasa care generează $\mathcal{H}^2(R'')$ și cu φ'^2 omomorfismul: $\mathcal{H}^2(R') \to \mathcal{H}^2(R'')$ indus de f' și să observăm cu $f' \circ f$ induce omomorfismul $\varphi'^2 \circ \varphi^2 : \mathcal{H}^2(R) \to \mathcal{H}^2(R'')$. Putem scrie atunci

$$\varphi'^2 \circ \varphi^2(\dot{\gamma}^2) = cc' \dot{\gamma}''^2. \tag{2.4}$$

Consecința 2.2. Un omeomorfism surjectiv $f: R \to R'$ are gradul $+1$ sau -1.

Deoarece $f^{-1} \circ f = 1_R$ și 1_R are gradul 1, notînd cu c respectiv c^* gradele aplicațiilor f și f^{-1}, din (2.4) deducem $cc^* = 1$ deci $c = \pm 1$ [4]).

Evident, o aplicație continuă $R \to R$ omotopă cu 1_R are gradul 1.

PROPOZIȚIA 2.4. *O aplicație continuă $f: R \to R'$, care se poate deforma într-o aplicație continuă, nesurjectivă, are gradul 0.*

Fie $f_1 : R \to R'$ o aplicație continuă, nesurjectivă, omotopă cu f, și $p'_0 \in R' - f_1(R)$. Să alegem o triangulare a lui R', avînd p'_0 ca vîrf și suficient de fină ca steaua cu vîrful p'_0 să nu intersecteze $f_1(R)$ (ceea ce este posibil, după propoziția 5.8 din Cap. I). Să deformăm f_1 într-o aplicație simplicială f_2, astfel încît oricare ar fi $p \in R$, punctul $f_2(p)$ să aparțină simplexului de dimensiune minimă, care conține pe $f_1(p)$, după teorema 5.7 din Cap. I. Un triunghi din steaua cu vîrful p'_0 nu va fi acoperit de nici un triunghi din R prin aplicația f_2, deci formula (2.3) arată că gradul lui f_2 este 0.

Observația 2.3. Noțiunea de grad al unei aplicații continue $K^n \to K'^n$ se definește în același mod cînd K^n și K'^n sînt complexe simpliciale orientate cu proprietatea că grupurile lor de omologie n-dimensională $\mathcal{H}^n(K^n)$ respectiv $\mathcal{H}^n(K'^n)$ sînt grupuri ciclice libere, generate de clasele $\dot{\gamma}^n$ și $\dot{\gamma}^n$ ale lanțurilor formate de n-simplexele descompunerii cu orientarea indusă [5]). În particular, definiția se păstrează în cazul aplicațiilor continue a unei n-sfere într-o n-sferă. (Numim n-sferă S^n respectiv $(n+1)$-bulă B^{n+1} imaginea topologică unei sfere $\sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = R$ respectiv a interiorului unei sfere $\sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 < R$ din spațiul euclidian E_{n+1} $(n \geqslant 0)$. Bula 0-dimensională este redusă la un punct. Grupul $\mathcal{H}^n(S^n)$ este izomorf cu Z ([45], p. 131)). Îndată ce putem defini gradul c al unei aplicații continue $K^n \to K'^n$ prin formula analogă cu (2.1), $\varphi^n(\dot{\gamma}^n) = c\,\dot{\gamma}'^n$, propozițiile 2.3 și 2.4, consecințele 2.1 și 2.2, observația 2.2 în partea relativă la aplicații simpliciale se păstrează împreună cu demonstrațiile lor.

[4]) Omeomorfismele f pentru care $c = 1$ se numesc *omeomorfisme care păstrează orientarea.*

[5]) De exemplu, pentru pseudovarietăți (în particular, varietăți) închise, orientabile [37], § 78. A se vedea și definiția gradului cu ajutorul coomologiei, [25], p. 77.

§ 3. Teorema lui Brouwer

1. Consacrăm acest paragraf claselor de aplicații continue, omotope $R \to R'$, unde R este o suprafață triangulabilă și orientabilă închisă oarecare, iar R' o sferă [6]). Presupunem R și R' orientate, astfel încît fiecărei clase de aplicații continue omotope $R \to R'$ i se asociază univoc gradul aplicațiilor, după consecința 2.1.

TEOREMA 3.1. (Brouwer, [17]). *Dacă R și R' sînt sfere, două aplicații continue $R \to R'$ sînt omotope atunci și numai atunci cînd au același grad.*

În demonstrație vom folosi rezultatul corespunzător din cazul aplicațiilor continue ale unei curbe jordaniene într-o curbă jordaniană și cum trecerea de la dimensiunea 1 la dimensiunea 2 este analogă cu cea de la $n-1$ la n, ([28], p. 132), vom prezenta cazul general:

TEOREMA 3.1'. (H. Hopf, [23]). *Condiția necesară și suficientă pentru ca două aplicații f și g ale sferei n-dimensionale S^n în sfera n-dimensională S'^n să fie omotope, este ca f și g să aibă același grad* [7]).

Presupunem că f și g au același grad și demonstrăm teorema 3.1' prin inducție după n.

Cazul $n = 1$. Fie S^1 și S'^1 date prin $|z| = 1$ respectiv $|z'| = 1$ în planul complex și ξ variabila pe dreapta reală E_1. Notăm $\varphi : E_1 \to S^1$ aplicația exponențială

$$\varphi(\xi) = e^{2\pi i \xi}. \tag{3.1}$$

PROPOZIȚIA 3.1. *Orice aplicație continuă $f : S^1 \to S'^1$ este omotopă cu o aplicație $f^* : S^1 \to S'^1$, pentru care $f(1) = 1$.*

Într-adevăr, dacă θ este un număr real, astfel încît $\varphi(\theta) = f(1)$, obținem o deformare a lui f în f^* definind

$$\Phi(t, z) = \frac{f(z)}{\varphi(t\,\theta)}, \quad (t, z) \in I \times S^1.$$

PROPOZIȚIA 3.2. *Orice aplicație continuă $f : S^1 \to S'^1$ de grad c se deformează continuu în aplicația $\varphi_c : z^c = z'$.*

Putem presupune $f(1) = 1$ și asocia lui f aplicația $F : I \to E_1$, $F(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \ln [f(e^{2\pi i \xi})]$, luînd ramura ln care pentru $\xi = 0$ dă valoarea 0 [8]). Evident, $F(1) = m$ este un întreg. Aplicației φ_m i se asociază astfel $\Phi_m(\xi) = m\xi$. Deformăm F în Φ_m prin

$$\Psi(t, \xi) = (1 - t)F(\xi) + t\,\Phi_m(\xi), \quad (t, \xi) \in I \times I$$

[6]) Convenim să numim în acest paragraf sferă — o suprafață omeomorfă cu sfera euclidiană 2-dimensională. (A se vedea observația 2.3).

[7]) Evident, sferele se presupun orientate.

[8]) Aplicația $z' = f(e^{2\pi i \xi})$ definește un drum pe S'^1, iar $F(\xi)$ constituie ridicarea lui din punctul 0 pe acoperirea universală (E_1, φ, S'^1).

și prin procedeul invers, $\psi(t, z) = e^{2\pi i \Psi\left(t \cdot \frac{1}{2\pi i} \ln z\right)}$ deformează f în φ_m[9]). Cum f și φ_m sînt omotope, iar φ_m are gradul m, deducem $m = c$.

Teorema 3.1′ rezultă acum imediat pentru $n = 1$.

Cazul general. Vom presupune teorema 3.1′ demonstrată pentru $n-1$ și vom stabili unele propoziții auxiliare.

1°. O aplicație continuă $f: B^n \to B'^n$, unde B^n și B'^n sînt bule n-dimensionale, avînd ca frontieră sferele S^{n-1} respectiv S'^{n-1}, se numește *regulată*, dacă $f(S^{n-1}) \subset S'^{n-1}$. Dacă f este o aplicație regulată, notăm cu $f_* = f|_{S^{n-1}}$, care este o aplicație continuă : $S^{n-1} \to S'^{n-1}$. Două aplicații continue regulate f și g de la B^n în B'^n se numesc *regulat omotope*, dacă se pot deforma continuu una în alta prin aplicații regulate. Prin urmare, $\Phi : I \times B^n \to B'^n$ realizează o deformare regulată a lui f în g, atunci cînd $\Phi_* = \Phi|_{I \times S^{n-1}}$ deformează f_* în g_*; în acest caz, vom spune că Φ extinde omotopia Φ_*.

Propoziția 3.3. *Dacă f, g, f_* și g_* sînt definite ca mai sus, orice omotopie Φ_* a lui f_* în g_* se extinde la o omotopie regulată Φ a lui f în g.*

Putem presupune B^n și B'^n bule euclidiene cu centrul originea, notată O respectiv O', și raza 1.

1) *Cazul $f_* = g_*$* și $\Phi_*(t, p) = f_*(p)$, $(t, p) \in I \times S^{n-1}$. Pentru $(t, p) \in I \times B^n$, luăm $\Phi(t, p)$ punctul din B'^n, ce împarte în raportul $t : 1-t$ segmentul $f(p)\, g(p)$.

2) *Cazul general.* Construim $\tilde{f} : B^n \to B'^n$, astfel încît $\tilde{f}_* = f_*$: Luăm $\tilde{f}(O) = O'$ și $\tilde{f}(p) = p'$, unde notînd cu q punctul din S^{n-1} de pe raza Op și cu $q' = f(q)$, punctul p' este situat pe raza $O'q'$ la aceeași distanță de centrul ca și p. Analog definim $\tilde{g}$. Conform cazului 1), f și g sînt regulat omotope cu $\tilde{f}$ respectiv $\tilde{g}$. Deformăm regulat $\tilde{f}$ în $\tilde{g}$, definind $\Phi(t, p)$ — punctul de pe raza O' $\Phi_*(t, q)$ la aceeași distanță de O' ca și p de O.

2°. Revenim la demonstrația teoremei 3.1′ în cazul general. Presupunem că S'^n este sfera euclidiană cu centrul O' descompusă simplicial omeomorf cu frontiera unui $(n+1)$-simplex liniar : fie K'^n complexul simplicial corespunzător, A, A_0, $A_1, \ldots, A_n$ vîrfurile lui, alese astfel încît A', antipodul lui A, să fie interior simplexului $\mathfrak{S}^n$ de vîrfuri $A_0, \ldots, A_n$, iar S'^{n-1}—frontiera lui $\mathfrak{S}^n$ — să fie intersectată de orice semicerc mare prin A și A' exact într-un punct.

Definim aplicația $\beta : S'^n \to S'^n$, omotopă cu identitatea, care pentru orice punct $Q \in S'^{n-1}$ duce arcul de cerc mare QA în punctul A și transformă orice punct P din arcul de cerc mare $A'Q$ în punctul $\hat{P}$, care

[9]) Din nou pentru $z = 1$ se ia inițial $\ln 1 = 0$; aplicația $\ln$ este univoc determinată pe $S^1 - \{1\}$, pe care îl transformă în intervalul $(0, 1)$; prin continuitate obținem după un ocol al cercului în sens direct, valoarea $\ln 1 = 2\pi i$, dar $\psi(t, 1) = 1$ în ambele cazuri ($z = 1$ luat cu argumentul 0 și cu argumentul 2π).

împarte semicercul mare $A'QA$ în același raport, în care P împarte $A'Q$. Evident, f este omotopă cu $\beta \circ f$, iar $\beta \circ f$ aplică în punctul A toate punctele, pe care f nu le aplică în $\overset{\circ}{\mathfrak{G}}^n$.

Numim *parte esențială* a lui f, mulțimea $f^{-1}(\mathfrak{G}^n)$.

PROPOZIȚIA 3.4. *Fie f și g două aplicații continue $S^n \to S'^n$ cu aceeași parte esențială care constă dintr-un număr finit de n-bule B_j^n, astfel încît*

a) *dacă B_j^n și B_h^n, $j \neq h$, se intersectează, atunci ele au numai puncte frontieră comune și*

b) *notînd $f_j = f|_{B_j^n}$ și $g_j = g|_{B_j^n}$, aplicațiile f_j și g_j: $B_j^n \to \mathfrak{G}^n$ sînt regulate.*

Atunci omotopia regulată a aplicațiilor f_j și g_j, pentru fiecare j, implică omotopia lui f cu g.

Prin ipoteză, există omotopiile regulate $\Phi_j : I \times B_j^n \to \mathfrak{G}^n$. Definim deformarea $\Phi : I \times S^n \to S'^n$ a lui $\beta \circ f$ în $\beta \circ g$, punînd: $\Phi|_{I \times B_j^n} = \beta \circ \Phi_j$ pentru fiecare j și $\Phi|_{I \times (S^n - \bigcup_j B_j^n)}$ — aplicația constantă cu valoarea A. Rezultă că f și g sînt omotope.

PROPOZIȚIA 3.5. *Dacă partea esențială a lui f cuprinde o n-bulă B_j^n, astfel încît f_j este omotopă regulat cu aplicația constantă, atunci f se poate deforma într-o aplicație f', pentru care B_j^n nu intră în partea esențială.*

Fie $f' : S^n \to S'^n$, aplicația constant egală cu A pe B_j^n și egală cu $\beta \circ f$ pe $S^n - B_j^n$. Dacă $\varphi : I \times B_j^n \to \mathfrak{G}^n$ dă o deformare regulată a lui f_j în aplicația constant egală cu Q, unde Q este un punct din S'^{n-1}, atunci

$$\Phi = \begin{cases} \beta \circ \varphi & \text{pe } I \times B_j^n \\ \beta \circ f & \text{pe } I \times (S^n - B_j^n) \end{cases}$$

deformează $\beta \circ f$ în f'.

3°. Presupunem S^n înzestrată cu o descompunere simplicială și notăm cu K^n complexul simplicial corespunzător.

PROPOZIȚIA 3.6. *Orice aplicație simplicială $f : S^n \to S'^n$ este omotopă cu o aplicația $\tilde{f}$, având următoarea proprietate:*

Dacă gradul c al lui f este nenul, partea esențială a lui $\tilde{f}$ constă din $|c|$ n-simplexe σ_i^n din K^n, alese arbitrar, fiecare reprezentat topologic de $\tilde{f}$ pe $\mathfrak{G}^n$, cu păstrarea respectiv schimbarea orientării, după cum $c > 0$ sau < 0.

Dacă $c = 0$, $\tilde{f}$ nu are parte esențială, deci $\beta \circ \tilde{f} = A$ și $\tilde{f}$ este omotopă cu aplicația constantă.

Fie σ_i^n n-simplexele din K^n aplicate de f pe $\mathfrak{G}^n$ și numerotate astfel încît primele c_+ acoperă $\mathfrak{G}^n$ cu păstrarea, iar celelalte c_- cu schimbarea orientării. După observația 2.2, avem $c_+ - c_- = c$. Să presupunem că ambele numere c_+ și c_- sînt nenule. (Dacă unul dintre ele, cel puțin, este nul, propoziția este verificată).

Să notăm cu S_i^{n-1} sfera frontieră a lui σ_i^n, avînd orientarea indusă de σ_i^n, cu b_i^n o n-bulă mică convexă din σ_i^n, cu p un punct din $\overset{\circ}{b}{}_i^n$ și cu $s_i^{n-1} = \partial\, b_i^n$, orientată astfel încît proiecția ei din p pe S_i^{n-1} să aibă gradul 1. Vom spune că această orientare este concordantă cu cea a lui S^n, definiția fiind independentă de p. (La o schimbare a punctului p, proiecția rămîne în aceeași clasă de omotopie, deci gradul se păstrează). Definim aplicația omotopă cu identitatea $\alpha : S^n \to S^n$ în modul următor : Oricare ar fi punctul $q \in S_i^{n-1}$, raza pq întîlnește s_i^{n-1} într-un punct r. Pe $S^n - \sigma_i^n$ aplicația α este identitatea ; pe segmentul rq, aplicația α este constant egală cu q iar pe raza pr, ea este aplicația liniară $pr \to pq$. Aplicația $f \circ \alpha$ reprezintă topologic b_i^n pe $\mathfrak{S}^n$ cu păstrarea sau schimbarea orientării, după cum acționa f asupra lui σ_i^n. Vom numi acest procedeu *concentrarea* lui f în σ_i^n pe b_i^n. Aplicîndu-l pentru toate simplexele σ_i^n, înlocuim f cu o aplicație omotopă f', a cărei parte esențială este concentrată la un număr finit de n-bule disjuncte b_i^n, primele c_+ aplicate pe $\mathfrak{S}^n$ cu păstrarea, iar celelalte c_- cu schimbarea orientării.

Putem deplasa evident b_i^n oriunde în σ_i^n, dar mai mult, alegînd b_i^n suficient de mic, putem să-l deplasăm oriunde pe S^n, cu condiția să nu intersectăm în acest proces un alt b_j^n, $j \neq i$. Într-adevăr, putem închide b_i^n într-un n-simplex $\tilde{\sigma}_i^n$ de pe S^n, care nu aparține lui K^n și prin procedee elementare să construim o aplicație omotopă cu 1_{S^n}, ce invariază punctele exterioare lui $\tilde{\sigma}_i^n$, dar transformă b_i^n într-o mulțime convexă suficient de mică din $\tilde{\sigma}_i^n$.

Presupunem că b_i^n și b_j^n sînt două n-bule reprezentate topologic de f' pe $\mathfrak{S}^n$ cu orientări opuse. Prin deplasare includem b_i^n și b_j^n respectiv în n-simplexele σ'^n și σ''^n din K^n, incidente cu $(n-1)$-simplexul σ^{n-1} și avînd vîrfuri diferite p' respectiv p''. În acest mod, f' se înlocuiește cu o aplicație omotopă f''. Presupunem σ^{n-1} orientat astfel încît orientarea lui σ''^n respectiv σ'^n dată de $p'\,\sigma^{n-1}$ și $-(p''\,\sigma^{n-1})$ să corespundă cu orientarea bulelor incluse. Tot prin omotopie obținem din f'' o aplicație f''', care reprezintă topologic σ'^n respectiv σ''^n pe $\mathfrak{S}^n$ cu păstrarea respectiv schimbarea orientării [10]). Bula n-dimensională $b^n = \sigma'^n \cup \sigma''^n$ este transformată regulat de $f'''|_{b^n}$ pe $\mathfrak{S}^n$, iar aplicația $f'''|_{\partial b^n}$ între sferele $n-1$ dimensionale $\partial\, b^n$ și S'^{n-1} are gradul 0. După ipoteza inducției, $f'''|_{\partial b^n}$ este omotopă cu aplicația constantă, deci din propoziția 3.3, aplicația $f'''|_{b^n}$ este și ea regulat omotopă cu o aplicație constantă. Putem folosi acum propoziția 3.5 și deducem că există f^{iv} omotopă cu f''', pentru care b^n nu este în partea esențială, deci pentru care numerele c_+ și c_- s-au micșorat cu o unitate. După un număr finit de etape, obținem o aplicație f^{Λ} avînd cel puțin unul din

[10]) De exemplu, prin omotopie deplasăm bulele în simplexele $\hat{\sigma}'^n$ și $\hat{\sigma}''^n$ deduse din σ'^n respectiv σ''^n prin omotetie cu centrul într-un punct $p \in \sigma^{n-1}$. Fie f^* aplicația obținută din f' și d un domeniu convex din S^n, care include $b^n = \sigma'^n \cup \sigma''^n$ și este suficient de vecină de el. O rază din p taie $\partial(\hat{\sigma}'^n \cup \hat{\sigma}''^n)$ în $\hat{p}$, ∂b^n în $\tilde{p}$ și ∂d în p^*. Definim omeomorfismul $\alpha^* : S^n \to S^n$ care invariază exteriorul lui d și transformă liniar $p^*\tilde{p}$ în $p^*\hat{p}$, iar $\tilde{p}\hat{p}$ în $\hat{p}\hat{p}$, și luăm $f''' = f^* \circ \alpha^*$.

numerele c_+ sau c_- nul. Dacă $c \neq 0$ pentru a obține $\tilde{f}$, înlocuim prin omotopie bulele din partea esențială a lui f^N cu $|c|$ n-simplexe, pe care le putem alege arbitrar din K^n, iar dacă $c = 0$, luăm $\tilde{f} = f^N$.

4°. Fie acum f și g două aplicații continue $S^n \to S'^n$ cu același grad c. Dacă descompunerea simplicială corespunzătoare lui K^n este suficient de fină, putem deforma f și g în aplicații simpliciale după teorema 5.7 din Cap. I și păstrăm notația f și g pentru aplicațiile obținute. După propoziția 3.6 putem înlocui f și g cu aplicațiile omotope $\tilde{f}$ respectiv $\tilde{g}$, având în partea esențială aceleași simplexe σ_i^n și reprezentînd topologic σ_i^n pe $\mathfrak{S}^n$ cu păstrarea orientării pentru toți indicii i sau cu schimbarea orientării pentru toți indicii i. Condițiile a) și b) din propoziția 3.4 sînt îndeplinite. (Aplicațiile $\tilde{f}_{i*}$ și $\tilde{g}_{i*}$ au același grad, deci sînt omotope prin inducție, iar $\tilde{f}_i$ și $\tilde{g}_i$ sînt regulat omotope după propoziția 3.3). Propoziția 3.4 implică atunci omotopia lui $\tilde{f}$ cu $\tilde{g}$. În cazul $c = 0$, $\tilde{f}$ și $\tilde{g}$ sînt evident omotope.

Observația 3.1. Se arată că pentru orice întreg c există o aplicație $S^n \leftarrow S'^n$ de grad c. În cazul 2-dimensional, un exemplu îl constituie aplicația $\varphi_c : z^c = z'$, unde S^2 și S'^2 s-au luat sferele lui Riemann cu variabila z respectiv z'.

2. În demonstrația teoremei 3.2 vom folosi faptul că propozițiile 3.4, 3.5 și 3.6 se extind și la cazul aplicațiilor continue ale unei n-bule Δ^n în n-sfera S'^n, care transformă $\partial \Delta^n$ în punctul A. Vom numi *permisă* o astfel de aplicație și vom numi *omotopie permisă* o deformare continuă a două aplicații permise realizată prin aplicații permise. Verificînd în demonstrațiile de mai sus că se pot folosi de fiecare dată omotopii permise, obținem :

PROPOZIȚIA 3.4'. *Dacă f și g sînt două aplicații permise $\Delta^n \to S'^n$, cu aceleași părți esențiale B_j^n, satisfăcînd condițiile a) și b) din propoziția 3.4, omotopia regulată a aplicațiilor f_j și g_j, pentru fiecare j, implică omotopia permisă a lui f în g.*

PROPOZIȚIA 3.5'. *Dacă f este o aplicație permisă $\Delta^n \to S'^n$, iar partea ei esențială cuprinde bula B_j^n astfel încît f_j să fie regulat omotopă cu aplicația constantă, atunci f este permis omotopă cu o aplicație permisă f', care nu cuprinde B_j^n în partea esențială.*

PROPOZIȚIA 3.6'. *O aplicație simplicială, permisă f este permis omotopă cu o aplicație permisă $\tilde{f}$ cu proprietatea din enunțul propoziției 3.6, c fiind egal cu diferența dintre numărul simplexelor din K^n reprezentate de f pe $\mathfrak{S}^n$ cu păstrarea orientării și numărul celor reprezentate cu schimbarea orientării. Simplexele σ_i^n din K^n sînt alese de data aceasta arbitrar în $\mathring{\Delta}^n$, dacă $c \neq 0$, iar $\tilde{f}$ este permis omotopă cu aplicația constantă, dacă $c = 0$.*

3. TEOREMA 3.2. (Brouwer, [17]). *Condiția necesară și suficientă pentru ca două aplicații continue f_k ($k = 0,1$) ale unei suprafețe triangu-*

labile și orientabile, închise R în sfera R' să fie omotope este ca ele să aibe același grad.

Ca și în teorema 3.1', presupunem că $R' = S'^2$ este o sferă euclidiană, orientată și triangulată astfel încît complexul corespunzător K'^2 să aibe vîrfurile A, A_0, A_1, A_2, punctele A_j aflîndu-se într-un plan ortogonal diametrului AA', 1-simplexele AA_j fiind arce de cerc mare, iar frontiera 2-simplexului $\mathfrak{G}^2$ fiind cercul $A_1A_2A_3$. Presupunem suprafața R de gen $g \geqslant 1$ orientată și alegem un punct $a \in R$. Prin compunere cu o rotație a sferei de exemplu, putem înlocui f_k cu aplicații omotope, care transformă a în A. Luăm pe R o descompunere canonică prin care a trece în vîrfurile poligonului P cu $4g$ laturi, grupate în perechi echivalente, asociat lui R. Considerăm, de asemenea, pe R o triangulare corespunzătoare acestei descompuneri și suficient de fină pentru ca prin omotopie să putem înlocui aplicațiile noastre prin aplicații simpliciale $R \to R'$, pe care le notăm tot f_k. Triangularea determină pe poligonul P un complex K^2, iar aplicațiilor f_k le corespund aplicațiile F_k: $P \to R'$, care duc puncte echivalente din ∂P în același punct din R' (în particular, vîrfurile lui P în punctul A). Orice aplicație continuă F: $P \to R'$, care duce puncte echivalente din ∂P în același punct din R' se ridică la o aplicație f: $R \to R'$ și va fi numită *admisă*. Pentru a demonstra că f_k, despre care presupunem că au același grad c, sînt omotope, va fi suficient să arătăm că F_k sînt omotope printr-o omotopie $I \times P \to R'$ realizată de aplicații admise, pe care o vom numi *omotopie admisă*.

Aplicațiile simpliciale F_k acopăr $\mathfrak{G}^2$ cu $c_{k+} + c_{k-}$ triunghiuri din K^2, unde $c_{k+} - c_{k-} = c$. Ele sînt omotope respectiv cu aplicațiile $G_k = \beta \circ F_k$, unde β este definit ca la punctul 1.2°, iar omotopia este admisă. Triunghiurile din K^2, care nu erau cuprinse în partea esențială a lui F_k, și în particular ∂P, sînt transformate de G_k în punctul A. Fiecare triunghi σ^2 din partea esențială a lui F_k este reprezentant de G_k pe R' : frontiera — în punctul A, iar interiorul — topologic pe $R' - A$. Preimaginea 1-simplexelor din K'^2 și alte trei 1-simplexe descompun σ^2 în șapte 2-simplexe : $\tilde{\sigma}^2$ complet interior lui σ^2 și transformat topologic de G_k pe $\mathfrak{G}^2$, $\sigma_j'^2$ adiacente la cîte o latură a lui $\tilde{\sigma}^2$ și $\sigma_j''^2$ adiacente la cîte o latură a lui σ^2 ($j = 1, 2, 3$). Obținem astfel din K^2 complexul $\tilde{K}^2$. Deformăm G_k într-o aplicație simplicială Γ_k : $P \to R'$, care coincide cu G_k pe triunghiurile lui K^2 nemodificate (în particular pe ∂P) și pe triunghiurile $\tilde{\sigma}^2$, reprezintă topologic $\sigma_j'^2$ pe triunghiurile $G_k(\sigma_j'^2 \cup \sigma_j''^2)$ și aplică $\sigma_j''^2$ pe 1-simplexe AA_{h_j}($h_j = 0$, 1 sau 2). Această omotopie este de asemenea admisă, deoarece după teorema 5.7 din Cap. I, putem efectua deformarea astfel încît imaginea fiecărui punct să rămînă în timpul deformării în simplexul de dimensiune minimă din K'^2, în care se găsea inițial, în particular imaginea lui ∂P să rămînă mereu punctul A. Aplicațiile Γ_k acopăr $\mathfrak{G}^2$ tot cu c_{k+} triunghiuri din $\tilde{K}^2$ reprezentate topologic cu păstrarea orientării și cu c_{k-} triunghiuri din $\tilde{K}^2$ reprezentate topologic cu schimbarea orientării. După

propoziția 3.6′,[11]) putem înlocui Γ_k printr-o omotopie admisă cu o aplicație $\tilde{\Gamma}_k : P \to R'$ astfel încît, dacă $c \neq 0$, $\tilde{\Gamma}_k$ $(k = 0, 1)$ să aibă aceeași parte esențială, formată din $|c|$ triunghiuri din $\tilde{K}^2$ și din $\overset{\circ}{P}$, fiecare reprezentat topologic cu păstrarea sau schimbarea orientării după semnul lui c; iar dacă $c = 0$, $\tilde{\Gamma}_k$ să fie omotope admis cu aplicația constantă. În cazul $c \neq 0$, procedînd ca la punctul 1.4°, dar aplicînd propoziția 3.4′, rezultă că $\tilde{\Gamma}_k$ $(k = 0, 1)$ sînt omotope admis.

Observația 3.2. Teorema 3.2 a fost extinsă și ea de Hopf la cazul aplicațiilor continue ale varietăților orientabile, închise n-dimensionale în sfera n-dimensională [23]. Există și în acest caz corespondența biunivocă între clasele de omotopie caracterizate prin grad și Z. Astfel în cazul 2-dimensional pentru a forma o aplicație de grad 1 este suficient să luăm pe R un disc mic Δ, să aplicăm topologic $\overset{\circ}{\Delta}$ pe $R' - A$ și să transformăm $R - \overset{\circ}{\Delta}$ în A. O aplicație de grad c se obține, compunînd aplicația de mai sus cu o aplicație de grad c a lui R' în R'.

§ 4. Relația lui Kneser între gen și gradul aplicației

1. Teorema 4.1. (Kneser). *Fie R și R' două suprafețe triangulabile, orientabile și închise de gen $g \geqslant 1$ respectiv g', pe care le presupunem orientate. Dacă $f : R \to R'$ este o aplicație continuă de grad c, atunci*

$$g - 1 \geqslant |c| \ (g' - 1). \tag{4.1}$$

Pentru $g = 0$, relația (4.1) nu este adevărată, deoarece putem avea $c = 0$, de exemplu în cazul cînd f aplică pe R într-un punct din R'. Cum pentru $g' = 0$, relația este banală, vom presupune g și $g' \geqslant 1$. Evident (4.1) este echivalentă cu inegalitatea

$$\rho \geqslant |c| \ \rho', \tag{4.1′}$$

unde $\rho = 2 \ (g - 1)$ și $\rho' = 2(g' - 1)$ sînt caracteristicile lui Euler ale suprafețelor R și R' (Cap. II, §1, pct. 2, (1.1′)). Conform observațiilor de mai sus, vom presupune ρ și $\rho' \geqslant 0$.

Seifert stabilește relația (4.1′) pentru acoperiri triangulare; aplicînd apoi propoziția 2.2 și consecința 2.1, deduce (4.1′) pentru o aplicație continuă oarecare.

În cazul acoperirilor triangulare de primele două tipuri (§2, pct. 1), f este o transformare interioară, deci (R', f, R) este o acoperire totală cu n foi ([40], p. 216). Luînd triangulări convenabile $\mathcal{T}$ și $\mathcal{T}'$ pe R și R' (astfel încît în cazul tipului II punctele de ramificare se află printre

[11]) O aplicație (omotopie) permisă în sensul definiției de la pct. 2, este evident admisă.

vîrfurile din $\mathcal{T}'$), orice triunghi din $\mathcal{T}'$ este acoperit de n triunghiuri cu aceeași orientare din $\mathcal{T}$, astfel încît după formula (2.3) avem

$$|c| = n.$$

Pe de altă parte, formula lui Hurwitz ([40], p. 216) ne dă

$$\rho = n\rho' + r,$$

unde r este suma ordinelor punctelor de ramificare. Prin urmare,

$$\rho \geqslant |c|\,\rho', \tag{4.2}$$

egalitatea avînd loc atunci și numai atunci cînd acoperirea este de tipul I[12]).

Pentru a demonstra inegalitatea (4.1'), în cazul unei acoperiri de tipul III, vom admite *acoperiri triangulare* (R, f, R'), pe care le vom numi *generale*, considerînd și cazul în care R este o reuniune finită de suprafețe triangulate și orientate, închise R_i, $(i = 1,\ldots,m)$, de caracteristici $\rho_i \geqslant 0$, sau eventual cazul $R = \varnothing$. Fiecare $(R_i, f|_{R_i}, R')$ este, prin ipoteză, o acoperire triunghiulară. Notăm cu c_i gradul acestei acoperiri, care pentru orice triunghi $\Delta' \in \mathcal{T}'$ este egal cu diferența dintre numărul triunghiurilor de pe R_i, care acoperă Δ' cu aceeași orientare ca Δ' și numărul celor care-l acoperă cu orientarea opusă (observația 2.1). După formula lui Euler și relația (2.3) putem scrie pentru R

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \quad \text{și} \quad c = \sum_{i=1}^{m} c_i. \tag{4.3}$$

Evident, dacă R este conex, ρ și c coincid cu caracteristica și gradul definite inițial.

Dacă acoperirea (R, f, R') nu are cute, fiecare dintre acoperirile $(R_i, f|_{R_i}, R')$ este de tipul I sau II, astfel încît conform (4.2) putem scrie $\rho_i \geqslant |c_i|\,\rho'$ și conform (4.3) deducem (4.1').

În cele ce urmează, vom considera o acoperire de tipul III generală — cu R neconex — și vom arăta că prin „tăieturi" succesive obținem o acoperire generală de tipul I sau II, căreia i se aplică formula (4.1'). Procedeul „tăieturilor", pe care îl descriem mai jos, poate conduce însă la triangulări care nu satisfac condiția 2) din definiția triangulării (Cap. II, §1, pct. 2). De aceea vom admite pe R triangulări, care verifică condițiile 1) și 3) ale acestei definiții și pentru care intersecția a două

---

[12]) Se observă că pentru acoperiri, care se pot deforma în acoperiri de tipul I sau II, inegalitatea (4.2) este adevărată oricare ar fi ρ. Este necesar să considerăm însă și acoperiri de tipul III, deoarece există acoperiri care nu se pot deforma în acoperiri de tipul I sau II. Iată un exemplu: fie $g = 2$, $g' = 1$, γ o curbă Jordan care descompune R în doi torți R_1 și R_2, iar f o aplicație care duce R_1 într-un punct $p_0' \in R'$ și reprezintă R_2 omeomorf pe $R' - \{p_0'\}$. Deoarece la o orientare convenabilă a lui R și a lui R' obținem $c = 1$, dacă f s-ar deforma într-o acoperire de tipul I sau II, am avea $n = 1$ și R ar fi omeomorf cu R', ceea ce este absurd.

triunghiuri poate fi mulțimea vidă; un vîrf; o latură, dar și o latură și un vîrf; sau două laturi [13]). Printr-o subdiviziune baricentrică se trece imediat de la o astfel de triangulare la o triangulare obișnuită fără a schimba pe ρ. Evident, c rămîne de asemenea neschimbat. La o numerotare convenabilă a suprafețelor R_i, putem presupune că $(R_m, f|_{R_m}, R')$ este o acoperire de tipul III.

Dacă $(R_m, f|_{R_m}, R')$ prezintă o cută peste latura $A'B'$, pe care se proiectează latura AB comună triunghiurilor ABC_+ și ABC_- din $\mathcal{T}$, distingem următoarele trei posibilități, pentru descrierea cărora folosim notațiile laturilor $AC_+ = b_+$, $BC_+ = a_+$, $AC_- = b_-$ și $BC_- = a_-$:

1) C_+ și C_- sînt puncte diferite din R.

2) Triunghiurile ABC_+ și ABC_- au în comun pe lîngă AB încă o pereche de laturi, de exemplu $a_+ = a_-$. Evident, atunci $C_+ = C_- = C$.

3) $C_+ = C_- = C$, dar $a_+ \neq a_-$ și $b_+ \neq b_-$.

În cazul 1), tăiem din R_m triunghiurile ABC_+ și ABC_- în lungul curbei Jordan $AC_+ B C_- A$ și lipim bordurile rămase în R_m: a_+ cu a_- respectiv b_+ cu b_-. Prin această operație, R_m se înlocuiește printr-o suprafață $\tilde{R}_m$, care are tot caracteristica ρ_m și care acoperă cu cute R. Gradul acestei acoperiri este c_m, deoarece s-a scos un triunghi orientat pozitiv și un triunghi orientat negativ de pe $A'\,B'\,C'$.

În cazul 2), tăiem cele două triunghiuri ABC din R_m în lungul curbei Jordan formate de b_+ și b_- și apoi, lipind bordurile b_+ și b_- rămase, obținem o suprafață $\tilde{R}_m$. Din nou ρ_m și c_m nu se schimbă.

În cazul 3) tăiem R_m în lungul curbei Jordan formate de a_+ și a_-, lipim a_+ cu a_- atît pe bordul stîng cît și pe bordul drept și obținem cazul 2). Procedînd ca mai sus tăiem cele două triunghiuri ABC și lipim b_+ cu b_-. Obținem $\check{R}_m$ formată din una sau două suprafețe închise. Evident, $\check{c}_m = c_m$, dar $\check{\rho}_m = \rho_m - 2$ (deoarece lipind a_+ și a_- s-au pierdut două laturi). Dacă R_m este formată din două suprafețe, nu se poate ca ambele să fie sfere [14]), căci am avea $\check{\rho}_m = -4$ și $\rho_m = -2$, ceea ce ar contrazice ipoteza. Există deci două posibilități:

3.1) $\check{R}_m$ nu cuprinde nici o sferă. Atunci notăm $\tilde{R}_m = \check{R}_m$ și $\tilde{\rho}_m = \rho_m - 2$, $\tilde{c}_m = c_m$.

3.2) $\check{R}_m$ cuprinde o sferă, pe care o lăsăm de o parte și notăm cu $\tilde{R}_m$ suprafața rămasă (dacă $\check{R}_m$ avusese două componente) respectiv $\varnothing$ (dacă $\check{R}_m$ fusese o sferă). Avem $\tilde{\rho}_m = \check{\rho} + 2 = \rho_m$ și $\tilde{c}_m = c_m$, deoarece sfera care a fost îndepărtată realiza o acoperire de grad 0.

Prin acest procedeu, din R obținem $\tilde{R} = \bigcup_{i=1}^{m-1} R_i \cup \tilde{R}_m$, avînd un număr mai mic de triunghiuri decît R și pentru care $\tilde{\rho} \leqslant \rho$, iar $\tilde{c} = c$.

---

[13]) Două triunghiuri nu pot avea toate laturile comune, deoarece am presupus că R nu este omeomorfă cu sfera.

[14]) Pentru prescurtarea expunerii, vom scrie și în acest paragraf sferă în loc de suprafață omeomorfă cu sfera.

Dacă acoperirea realizată de $\widetilde{R}$ are cute, repetăm din nou procedeul și după un număr finit de etape vom ajunge la R^*, care determină o acoperire fără cute sau se reduce la $\varnothing$ și pentru care $\rho^* \leqslant \rho$, pe cînd $c^* = c$. Pentru R^*, inegalitatea (4.1') este adevărată : $\rho^* \geqslant |c^*|\,\rho'$, de unde rezultă $\rho \geqslant |c|\,\rho'$ pentru R.

2. *Cazul egalității în relația lui Kneser.* Am văzut mai sus că pentru o acoperire (R, f, R'), care se poate deforma într-o acoperire neramificată (i.e. f se poate deforma într-un omeomorfism local : $R \to R'$), avem $\rho = |c|\,\rho'$ și $c \neq 0$. Vom demonstra acum reciproc

TEOREMA 4.2. *O aplicație continuă* f : $R \to R'$, *pentru care*

$$\rho = |c|\,\rho' \tag{4.4}$$

și $c \neq 0$, *unde* ρ *și* ρ' *sînt caracteristicile lui* R *și* R', *iar* c *gradul lui* f, *se poate deforma într-o aplicație, care realizează o acoperire neramificată.*

Dacă $\rho' = -2$, egalitatea (4.4) și ipoteza $c \neq 0$ implică $\rho = -2$ și $c = \pm 1$; prin urmare, f este o aplicație continuă a sferei în sferă cu gradul $c = \pm 1$, iar după teorema 3.1 (Brouwer) și consecința 2.2, ea se poate deforma într-un omeomorfism. Același caz apare, dacă $\rho = -2$. Rămîne deci să demonstrăm teorema pentru ρ și $\rho' \geqslant 0$.

Conform propoziției 2.2, putem presupune că (R, f, R') este o acoperire triangulară. Dacă această acoperire nu prezintă cute, ea este neramificată, deoarece pentru acoperirile de tipul II inegalitatea (4.1') este strictă. Vom considera deci cazul în care (R, f, R') prezintă cute. Prin deformare vom înlătura aceste cute și vom obține o acoperire triangulară fără cute, care satisface (4.4), deci o acoperire neramificată.

α) Dacă $A'B'C'$ este un triunghi din R' și peste $A'B'$ se proiectează o *cută* AB *de tipul* 1) din demonstrația teoremei 4.1, comună triunghiurilor ABC_+ și ABC_-, delimităm pe R o bandă îngustă adiacentă la drumul format de laturile AC_+ și C_+B și una adiacentă la drumul format de BC_- și C_-A .Deformînd ABC_+ respectiv ABC_- în banda corespunzătoare (astfel încît mijlocul M al lui AB să fie așezat peste C' la sfîrșitul deformării, fig. 2) obținem o acoperire pentru care suprafața de acoperire are două triunghiuri mai puțin.

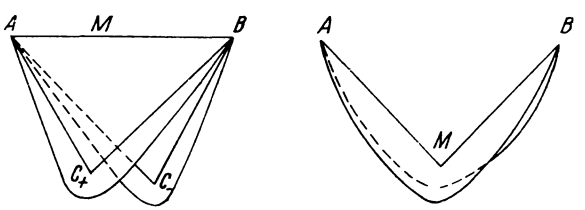


Fig. 2

β) Dacă peste $A'B'$ se proiectează o cută AB de tipul 2), deci dacă și peste $B'C'$ se proiectează cuta BC, iar AB și BC sînt laturi comune la două triunghiuri ABC, prin deformarea celor două triunghiuri într-o bandă adiacentă la b_+ respectiv b_- (fig. 3) obținem o suprafață de acoperire cu două triunghiuri mai puțin.

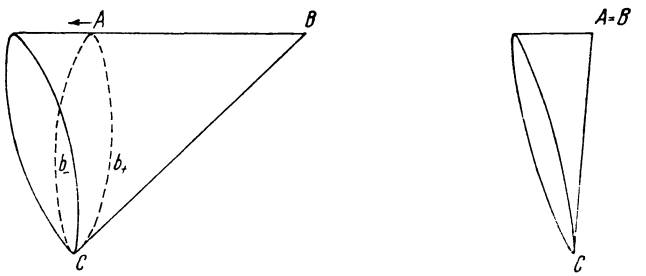


Fig. 3

γ) Dacă peste $A'B'$ se proiectează o cută AB de tipul 3), atunci acoperirea prezintă cel puțin o cută de tipul 1) sau 2).

Pentru a stabili această afirmație vom demonstra mai întîi că curba Jordan formată de a_+ și a_- delimitează pe R un domeniu simplu conex. Într-adevăr, am văzut că tăind R în lungul acestei curbe și lipind apoi atît cele două borduri stîngi cît și cele drepte se obține $\check{R}$ formată dintr-o suprafață sau din două suprafețe, dar pentru care $\check{\rho} = \rho - 2$ și care determină o acoperire cu $\check{c} = c$. Relația (4.4) implică $\check{\rho} < |\check{c}|\, \rho'$, deci $\check{R}$ nu satisface inegalitatea lui Kneser. Aceasta este posibil numai în următoarele cazuri :

3.1°) $\check{R}$ este o sferă sau

3.2°) $\check{R}$ constă dintr-o sferă și din altă suprafață.

Primul caz se exclude deoarece $\check{R}$ acoperind o suprafață R' cu gen $\geqslant 1$, $\check{c}$ ar fi 0 după observația 1.2 (formulată topologic ca la pct. 4, § 2) și propoziția 2.4, în timp ce prin ipoteză $\check{c} \neq 0$: Prin urmare, $\check{R}$ are două componente dintre care una este o sferă, deci curba formată de a_+ și a_- taie un domeniu Jordan D de pe R.

Deoarece gradul acoperirii determinată de sfera din $\check{R}$ este 0, conform observației 1.2, iar acoperirea determinată de D are același grad, orientînd triunghiurile din D cu orientarea indusă de triunghiurile acoperite din R', există în D triunghiuri orientate opus și există o latură A_1B_1 interioară lui D (exceptînd una dintre extremități) la care sînt adiacente două astfel de triunghiuri. Sau A_1B_1 determină o cută de tipul 1) sau 2) și afirmația este demonstrată, sau cele două triunghiuri adiacente la A_1B_1 au și vîrful opus C_1 comun. Repetînd raționamentul de

mai sus, deducem că ele închid un domeniu Jordan $D_1 \subset D$, care ca și D conține o cută, dar are numărul triunghiurilor cel puțin cu două unități mai mic decît D (fig. 4).

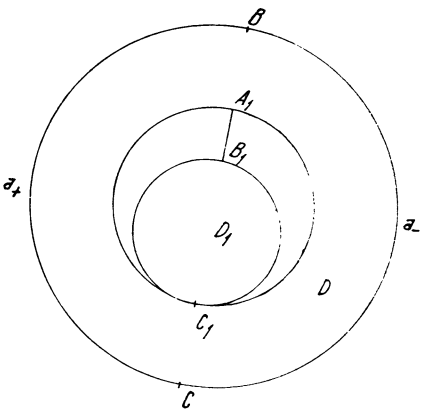


Fig. 4

După un număr finit de etape, vom ajunge la un domeniu D_N care prezintă numai cute de tipul 1) sau 2).

Am demonstrat astfel că orice acoperire triangulară cu cute, are cel puțin o cută de aceste tipuri. Deformînd prin procedeele α) și β) indicate mai sus, cutele de tipul 1) sau 2), obținem suprafețe de acoperire cu un număr tot mai mic de triunghiuri, dar care satisfac mereu relația (4.4), astfel încît după un număr finit de operații, găsim o acoperire triangulară neramificată.

Consecința 4.1. *Fie R o suprafață triangulabilă, orientabilă, închisă. Orice aplicație continuă $R \to R$, de grad $c = \pm 1$, se poate deforma într-un omeomorfism.*

Într-adevăr, dacă suprafața are genul $\geqslant 1$, din demonstrația de mai sus rezultă că aplicația se deformează într-o aplicație triangulară cu $n = 1$, deci un omeomorfism, iar dacă suprafața este o sferă, afirmația rezultă din teorema 3.1 și consecința 2.2, după cum am observat la începutul demonstrației teoremei 4.2.

§ 5. Caracterizarea claselor de omeomorfisme omotope

1. Să presupunem că R și R' sînt suprafețe triangulabile și orientabile, omeomorfe. Atunci printre aplicațiile continue $R \to R'$ se pot considera și omeomorfisme surjective. Dacă f este un astfel de omeomorfism surjectiv, putem forma atît clasa $\{f\}$ a tuturor aplicațiilor con-

tinue omotope cu f cît și submulțimea ei, clasa $[f]$ a omeomorfismelor omotope cu f. Prin aplicația Γ definită în § 1, clasei $\{f\}$ îi corespunde clasa izomorfismelor surjective : $\pi_1(R) \to \pi_1(R')$, obținute din izomorfismul F (indus de f după teorema 1.1′ din Cap. I) prin compunere cu automorfisme interioare ale lui $\pi_1(R')$. Corespondența Γ restrînsă la aceste clase $\{f\}$ (de aplicații continue omotope cu omeomorfisme) sau corespondența $\tilde{\Gamma}$ indusă de Γ asupra claselor $[f]$ este injectivă, dacă R și R' nu sînt omeomorfe cu sfera (consecința 1.1). Dacă R și R' sînt omeomorfe cu sfera, există două clase de omeomorfisme omotope între ele (cele care păstrează orientarea și cele care o schimbă, avînd gradul $+1$ respectiv -1, cînd se orientează R și R') și un singur izomorfism $\pi_1(R) \to \pi_1(R')$ (consecința 2.2 și teorema 3.1). Vom completa aceste rezultate, demonstrînd că în ipoteza că R și R' sînt *compacte*, $\tilde{\Gamma}$ este *surjectivă* :

TEOREMA 5.1 (Dehn, Nielsen, Acta Math., **50** (1927)). *Fie R și R' două suprafețe triangulabile și orientabile, închise. Orice izomorfism surjectiv $F : \pi_1(R) \to \pi_1(R')$ este indus, abstracție făcînd de un automorfism interior al lui $\pi_1(R')$, de un omeomorfism surjectiv $f : R \to R'$.*

După teorema lui Hopf (consecința 1.2), există o aplicație continuă $f_1 : R \to R'$, care induce F și o aplicație continuă $f_2 : R' \to R$, care induce F^{-1}. Cum $f_2 \circ f_1$ induce $1_{\pi_1(R)}$, rezultă din raționamentul dezvoltat la demonstrația consecinței 1.1, că $f_2 \circ f_1$ este omotopă cu 1_R, deci orientînd R și R', după consecința 2.1 și propoziția 2.3, produsul gradelor lui f_1 și f_2 este 1 sau gradul lui f_1 este ± 1. Pentru acoperirea (R, f, R') are loc egalitatea lui Kneser (4.4), prin urmare din consecința 4.1 deducem că f_1 se deformează continuu într-un omeomorfism f și după teorema 5.3‴, din Cap. I, f induce pe F (pînă la un automorfism interior al lui $\pi_1(R')$).

2. Identificînd R cu R', rezultatele de mai sus admit următoarea interpretare :

Să notăm cu $\mathcal{C}$, $\mathcal{O}$ și $\mathcal{J}$: monoidul unitar al aplicațiilor continue ale lui R în R, grupul omeomorfismelor surjective ale lui R pe R și subgrupul său normal format de omeomorfismele surjective omotope cu 1_R (luate relativ la operația de compunere a aplicațiilor). Fie $\mathcal{R}$ relația de omotopie în $\mathcal{C}$ și $\widetilde{\mathcal{R}}$ restricția ei la $\mathcal{O}$. Evident, $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ este monoid, iar $\mathcal{O}/\widetilde{\mathcal{R}}$ grup izomorf cu $\mathcal{O}/\mathcal{J}$.

Să notăm cu $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{J}$-monoidul unitar al omomorfismelor lui $\pi_1(R)$ în $\pi_1(R)$, grupul automorfismelor surjective și subgrupul normal al automorfismelor interioare.

Aplicațiile $\Gamma : \mathcal{C}/\mathcal{R} \to \mathfrak{D}/\mathfrak{J}$ și $\tilde{\Gamma} : \mathcal{O}/\mathcal{J} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ sînt omomorfisme. Dacă R nu este omeomorfă cu sfera, Γ și $\tilde{\Gamma}$ sînt izomorfisme, iar dacă R este compactă, ele sînt omomorfisme surjective.

În cazul cînd R este compact, clasele de omotopie ale omeomorfismelor surjective ale lui R pe R sînt caracterizate deci prin clasele de

automorfisme ale lui $\pi_1(R)$, determinate de automorfismele interioare,[15]) dacă $g > 0$ și de grad, dacă $g = 0$.

3. *Consecința* 5.1. Fie R o suprafață triangulabilă și orientabilă, închisă, de gen $g > 0$. Fiind dat un automorfism $\chi : G \to G$, unde G este grupul transformărilor de acoperire pentru $(\hat{R}, \Pi_G, R)$, prin izomorfismul $\Lambda_{G,\hat{p}}$, $\hat{p} \in \hat{R}$ (Cap. I, §4, pct. 2) și după propoziția 1.7 din Cap. I, i se asociază un automorfism surjectiv $F : \pi_1(R) \to \pi_1(R)$.

Aplicînd teorema 5.1, deducem că există un omeomorfism surject $f : R \to R$, care induce χ în sensul teoremei 5.1 din cap. I.

4. Evident, rezultatele din acest paragraf se aplică suprafețelor riemanniene compacte, dar au fost formulate în cadrul topologic, deoarece nici în demonstrația lor nu intervenea structura conformă.

§ 6. Suprafața riemanniană canonică

1. Vom reveni acum la cadrul suprafețelor riemanniene, deși după teorema lui Stoilow, definițiile și rezultatele de la punctele 1—3 din acest paragraf sînt valabile pentru suprafețe triangulabile și orientabile, compacte de gen $\geqslant 1$, deoarece aceste noțiuni și propoziții se aplică îndeosebi în teoria lui Teichmüller. În cazul $g = 0$ definițiile nu au sens.

Fie R o suprafață riemanniană închisă de gen $g \geqslant 1$.

Numim *mulțime standard de generatori* (după Bers) sau *sistem canonic de generatori* (după Ahlfors) în punctul $p \in R$ o mulțime ordonată $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{2g})$ de elemente din $\pi_1(R, p)$, care generează $\pi_1(R, p)$ și satisfac unica relație

$$\prod_{j=1}^{g} (a_{2j}\, a_{2j-1}^{-1}\, a_{2j}^{-1}\, a_{2j-1}) = 1, \tag{6.1}$$

unde s-a notat cu 1 clasa de drumuri nul-omotope din $\pi_1(R, p)$.

Descompunerea canonică a suprafeței R asigură, după cum am văzut în Cap. II, § 4, pct. 3 existența sistemelor canonice de generatori.

Definim în mulțimea sistemelor canonice de generatori ai suprafeței R următoarea *relație de echivalență*: două sisteme a în p și $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{2g})$ în q sînt echivalente, dacă există un izomorfism permis $\omega : \pi_1(R, p) \to \pi_1(R, q)$, astfel încît $\omega(a_j) = b_j$, $(j = 1, \ldots, 2g)$, ceea ce se va scrie $\omega(a) = b$.

Suprafața riemanniană închisă R împreună cu o clasă de echivalență α de sisteme canonice de generatori se numește *suprafață Teichmüller*, *suprafață riemanniană determinată topologic* (Teichmüller), *suprafață riemanniană marcată* (Bers) sau *suprafață riemanniană canonică* (Ahlfors) și va fi notată, în cele ce urmează, (R, α).

---

[15]) O astfel de clasă de automorfisme se numește automorfism exterior, ([6], p. 122).

PROPOZIȚIA 6.1. *O suprafață riemanniană canonică poate fi definită și ca asocierea între o suprafață R și o clasă de descompuneri canonice echivalente ale lui R,* unde prin *descompuneri canonice echivalente* înțelegem două descompuneri care se obțin una din alta printr-un omeomorfism surjectiv $f : R \to R$, omotop cu 1_R.

1°. Orice descompunere canonică d determină un poligon fundamental și un sistem canonic de generatori a. Fie d^* o descompunere echivalentă cu d prin omeomorfismul f și a^* sistemul canonic corespunzător. Să demonstrăm că a este echivalent cu a^* : Cum f este un omeomorfism surjectiv omotop cu 1_R, din teoremele 1.1,4° și 5.3″, Cap. I, rezultă că f_p este un izomorfism surjectiv echivalent cu $1_{\pi_1(R,p)}$. Există deci izomorfismele permise ω și ω^* generate de drumurile γ_{pp} și $\gamma^*_{f(p)p}$ astfel încît diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(R, p) & \xrightarrow{1_{\pi_1(R,p)}} & \pi_1(R, p) \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega^* \\ \pi_1(R, p) & \xrightarrow{f_p} & \pi_1[R, f(p)] \end{array}$$

să fie comutativă. Prin ipoteză $f_p(a) = a^*$, iar din această diagramă rezultă $f_p(a) = \omega^* \circ \omega^{-1}\ (a) = \omega_1(a)$, unde am notat cu ω_1 izomorfismul permis generat de drumul $\gamma^*_{f(p)p}\ \gamma^{-1}_{pp}$. Prin urmare, δ fiind o clasă de descompuneri canonice echivalente pe R, lui (R, δ) îi putem asocia univoc (R, α), α fiind clasa sistemului canonic de generatori corespunzător unei descompuneri din δ.

2′°. Reciproc, în orice clasă α există un sistem canonic de generatori a determinat printr-o descompunere canonică : Fie $\tilde{d}$ o descompunere canonică arbitrară a lui R și $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{2g})$ sistemul canonic de generatori ai lui $\pi_1(R, p)$ corespunzător. Dacă $a^* = (a_1^*, \ldots, a_{2g}^*)$ este un sistem canonic de generatori din clasa α, avem automorfismul φ al lui $\pi_1(R, p)$ determinat prin condiția : $\varphi(\tilde{a}) = a^*$. După teorema 5.1 există omeomorfismul Φ al lui R pe el însuși, astfel încît Φ_p să fie echivalent cu φ. Să notăm cu d descompunerea canonică dedusă din $\tilde{d}$ prin Φ. Sistemul canonic de generatori a corespunzător lui d aparține clasei α.

2″°. Fie a și a^* două sisteme canonice echivalente, care corespund la descompunerile canonice d respectiv d^*, cu poligoane normale P și P^*. Există izomorfismul permis $\omega : \pi_1(R, p) \to \pi_1(R, q)$ cu proprietatea $\omega(a) = a^*$. Construim un omeomorfism surjectiv : $\partial P \to \partial P^*$, care duce fiecare a_j în $\omega\ (a_j)$ astfel încît puncte echivalente de pe ∂P să se transforme în puncte echivalente de pe ∂P^*. Prelungim acest omeomorfism la omeomorfism surjectiv : $P \to P,^*$ care induce prin identificarea punctelor echivalente un omeomorfism surjectiv $f : R \to R$. Deoarece $f_p = \omega$,

deducem imediat că f_p este echivalent cu $1_{\pi_1(R,p)}$. După consecința 1.1, omeomorfismul f, care transformă d în d^*, este omotop cu 1_R. [16])

2. Fie R' o suprafață riemanniană omeomorfă cu R.

Un omeomorfism surjectiv $f:R \to R'$ se numește *reprezentare a lui* (R, α) *pe* (R', α') și se notează $(R, \alpha) \to (R', \alpha')$, dacă există un punct $p \in R$, astfel încît f_p să transforme un sistem canonic de generatori din α într-un sistem canonic de generatori din α'.

Observația 6.1. Definiția dată nu depinde de punctul p luat pe R și nici de sistemul din α. Să presupunem că pentru un sistem $a = (a_1, \ldots, a_{2g}) \in \alpha$, cu $a_j \in \pi_1(R, p)$ [17]) avem $f_p(a) = (f_p(a_1), \ldots, f_p(a_{2g})) \in \alpha'$, să considerăm un alt sistem $b = (b_1, \ldots, b_{2g}) \in \alpha$, cu $b_j \in \pi_1(R, q)$ și să arătăm că $f_q(b) = (f_q(b_1), \ldots, f_q(b_{2g})) \in \alpha'$. Prin ipoteză există izomorfismul permis $\omega_0 : \pi_1(R, p) \to \pi_1(R, q)$ pentru care $\omega_0(a) = b$. Pe de altă parte, după teorema 1.1, 2° din Cap. I, f_p și f_q sînt echivalente, deci există izomorfismele permise ω și ω', astfel încît diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(R, p) & \xrightarrow{f_p} & \pi_1[R', f(p)] \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega' \\ \pi_1(R, q) & \xrightarrow{f_q} & \pi_1[R', f(q)] \end{array}$$

să fie comutativă. Mai mult, în demonstrația pe care am dat-o punctului 2° din teorema 1.1, ω poate fi ales orice izomorfism permis: $\pi_1(R, p) \to \pi_1(R, q)$. Luînd $\omega = \omega_0$, deducem

$$f_q(b) = (\omega' \circ f_p \circ \omega_0^{-1})(b) = \omega'[f_p(a)], \text{ deci } f_q(b) \in \alpha'.$$

Observația de mai sus permite să introducem următoarea notație: Fie f un omeomorfism surjectiv: $R \to R'$ și α o clasă de sisteme canonice echivalente pe R. Luînd un punct p arbitrar din R și a un sistem canonic de generatori ai lui $\pi_1(R, p)$, *vom nota* $f(\alpha)$ clasa formată pe R' de sistemele canonice echivalente cu $f_p(a)$. Oricare ar fi omeomorfismul surjectiv $f:R \to R'$ și suprafața riemanniană canonică (R, α), putem deci scrie $f: (R, \alpha) \to (R', f(\alpha))$.

Fie f o reprezentare a lui (R, α) pe (R', α'). După cum $f: R \to R'$ păstrează sau schimbă orientarea, spunem că *suprafețele riemanniene canonice* (R, α) *și* (R', α') *au aceiași orientare sau orientări opuse.*

3. Noțiunea de suprafață riemanniană canonică prezintă o importanță deosebită în studiul claselor de omotopie ale omeomorfismelor lui R pe R', datorită următoarelor teoreme:

---

[16]) Folosind $\pi_1(R)$ o clasă de sisteme canonice de generatori echivalente devine o clasă de sisteme canonice de generatori ai lui $\pi_1(R)$, echivalente în sensul că se obțin unul dintr-altul printr-un automorfism interior (propoziția 1.6 din Cap. I).

[17]) Peste tot în această demonstrație $j = 1, \ldots, 2g$.

TEOREMA 6.1. *Omeomorfismele f și h ale suprafeței riemanniene închise R de gen $g \geqslant 1$ pe suprafața riemanniană R' sînt omotope, dacă și numai dacă, α fiind o clasă de sisteme canonice echivalente pe R, avem $f(\alpha) = h(\alpha)$.*

1°. Într-adevăr, dacă $f(\alpha) = h(\alpha)$, iar a este un sistem canonic de generatori ai grupului $\pi_1(R, p)$ din clasa α, atunci $f_p(a)$ și $h_p(a)$ sînt echivalente, deci există izomorfismul permis $\omega' : \pi_1[R', f(p)] \to \pi_1[R', h(p)]$ pentru care $h_p(a) = \omega' \circ f_p(a)$. Cum a formează un sistem de generatori ai grupului $\pi_1(R, p)$, deducem $h_p = \omega' \circ f_p$, deci h_p și f_p sînt echivalente, iar consecința 1.1 arată că h și f sînt omotope.

2°. Reciproc, dacă f și h sînt omotope, după teorema 5.3'' din Cap. I, f_p și h_p sînt echivalente oricare ar fi $p \in R$, deci există izomorfismele permise ω și ω', astfel încît $h_p = \omega' \circ f_p \circ \omega^{-1}$. Fie a un sistem canonic de generatori ai lui $\pi_1(R, p)$ din clasa α. Atunci $\omega^{-1}(a) \in \alpha$, deci $f_p[\omega^{-1}(a)] \in f(\alpha)$ și $h_p(a)$, care se obține din $f_p[\omega^{-1}(a)]$ prin izomorfismul permis ω', aparține de asemenea lui $f(\alpha)$. Prin urmare $h(\alpha) = f(\alpha)$.

Teorema 6.1 se putea formula și astfel:

Dată reprezentarea $f : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$, omeomorfismul surjectiv $h : R \to R'$ este omotop cu f dacă și numai dacă $h : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$.

TEOREMA 6.2. *Fie R și R' două suprafețe riemanniene compacte de același gen $g \geqslant 1$, iar α și α' două clase de sisteme canonice echivalente pe R respectiv R'. Există o reprezentare $f : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$.*

Conform teoremei 5.1, notînd cu p și p' un punct arbitrar din R respectiv R', cu a și a' un sistem canonic de generatori ai lui $\pi_1(R, p)$ din clasa α, respectiv al lui $\pi_1(R', p')$ din clasa α' și cu $\varphi : \pi_1(R, p) \to \pi_1(R', p')$ izomorfismul definit prin condiția $\varphi(a) = a'$, deducem că există un omeomorfism f, astfel încît f_p și φ să fie echivalente. Din raționamentul dezvoltat la punctul 2° al teoremei 6.1, rezultă atunci $f(\alpha) = \alpha'$.

Consecința 6.1. Fie R și R' suprafețe riemanniene de același gen $g \geqslant 1$. Teoremele 6.1 și 6.2 arată că, alegînd o clasă de sisteme canonice echivalente α pe R și fixînd astfel suprafața canonică (R, α), există o bijecție între clasele de omeomorfisme surjective omotope $R \to R'$ și suprafețele canonice (R', α').

Într-adevăr, putem asocia clasei unui omeomorfism $f : R \to R'$ suprafața canonică $(R', f(\alpha))$.

4. Dacă (R, α) și (R', α') sînt două suprafețe riemanniene compacte canonice, numim *reprezentare conformă a lui* (R, α) *pe* (R', α') o reprezentare $f : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$, astfel încît f este aplicație conformă a lui R pe R'.

În multe probleme de teoria funcțiilor se consideră identice două suprafețe riemanniene conform echivalente. În cele ce urmează, vom identifica două suprafețe riemanniene canonice (R, α) și (R', α') dacă există o reprezentare conformă : $(R, \alpha) \to (R', \alpha')$.

Fie R o suprafață riemanniană de tip iperbolic, $\hat{R} = U$ suprafața ei de acoperire universală și G grupul Fuchs al transformărilor de acoperire. Un omeomorfism surjectiv $\hat{f} : \hat{R} \to \hat{R}$ se numește *compatibil cu grupul* G, dacă grupul $G' = \hat{f} G \hat{f}^{-1}$ este format din reprezentări conforme. Evident, G' este un grup discret, fără punct fix, prin urmare el constituie grupul transformărilor de acoperire pentru $(\hat{R}, \Pi_{G'}, R' = \hat{R}/G')$, după propoziția 2.3 din Cap. II. Considerații analoge au loc în cazul cînd R este de tip parabolic cu deosebirea că $\hat{R}$ este conform echivalent cu planul euclidian. În virtutea propoziției 5.3 din Cap. I, dacă omeomorfismul surjectiv $\hat{f} : \hat{R} \to \hat{R}$ este compatibil cu G, el induce omeomorfismul surjectiv $f : R \to R'$ și reciproc, dacă $\hat{f}$ induce f, $\hat{f}$ e compatibil cu G. Omeomorfismele $\hat{f}$ și f sînt simultan reprezentări conforme, Π_G și $\Pi_{G'}$ fiind local reprezentări conforme, iar f este o reprezentare conformă $(R, \alpha) \to (R', f(\alpha))$ unde (R, α) este o suprafață riemanniană canonică, dacă R și R' sînt compacte. Putem formula astfel

PROPOZIȚIA 6.2. *Suprafețele riemanniene* $R = \hat{R}/G$ și $R' = \hat{R}/G'$ *de același tip sînt conform echivalente, atunci și numai atunci cînd subgrupurile* G *și* G' *sînt conjugate în grupul* H *al reprezentărilor conforme ale lui* $\hat{R}$ *pe* $\hat{R}$.

Capitolul IV

Reprezentări cvasiconforme

§ 1. Propoziții auxiliare

1. Pentru rezolvarea problemei clasificării suprafețelor riemanniene topologic — dar nu conform — echivalente, Teichmüller folosește reprezentările cvasiconforme și diferențialele pătratice. În acest paragraf prezentăm pe scurt definiția reprezentărilor cvasiconforme și proprietățile necesare pentru studierea reprezentărilor Teichmüller și demonstrarea teoremelor fundamentale din Cap. V, bazîndu-ne pe expunerea dezvoltată în lucrarea [9].

Fie G un domeniu din planul z și Q un număr real, $Q \geqslant 1$. Vom numi *reprezentare Q-cvasiconformă* a domeniului G un omeomorfism $w = w(z)$ al lui G în planul w, care păstrează orientarea și verifică următoarea inegalitate a lui Grötzsch : oricare ar fi patrulaterul P din G, de modul M, dacă M^* este modulul patrulaterului $P^* = w(P)$, atunci

$$M^* \leqslant QM. \text{ [1]} \tag{1.1}$$

Dacă în problema considerată valoarea constantei Q nu prezintă importanță, vom folosi pentru $w = w(z)$ denumirea de *reprezentare cvasiconformă.*

Se demonstrează că a.p. [2] în G omeomorfismul $w(z)$ este diferențiabil (în sensul Stolz-Fréchet) și are iacobian $J_{w/z}(z) \neq 0$. ([9], Cap. III, teorema 2.1 și propoziția 1.2).

---

[1] Numim patrulater un domeniu jordanian pe frontiera căruia s-au distins patru puncte — vîrfurile. Din punct de vedere conform, un patrulater este caracterizat printr-un singur invariant : modulul său, care este egal cu raportul laturilor unui dreptunghi conform echivalent cu el (a se vedea [9], p. 239). Pe lîngă această definiție geometrică datorită lui A. Pfluger și L. V. Ahlfors, se pot da și alte definiții echivalente : definiția lui M. A. Lavrentiev dezvoltată de B.V. Șabat, L. I. Volkovîskii, I. N. Pesin, definiția analitică a lui C. B. Morrey, L. Bers, R. Cacciopoli, precum și definiția luată ca punct de plecare de I. N. Vekua, L. Bers și alții, după care reprezentările cvasiconforme sînt soluții generalizate ale ecuației Beltrami ([9], Cap. II).

[2] Vom folosi prescurtarea a.p. pentru aproape pretutindeni, i.e. cu excepția unei mulțimi de măsură Lebesgue nulă. Integralele ce intervin în lucrare sînt de asemenea luate în sensul lui Lebesgue.

Într-un astfel de punct z de diferențiabilitate cu iacobian nenul, $w(z)$ transformă în cercuri infinitezimale cu centrul în $w(z)$ elipse infinitezimale cu centrul în z, raportul axelor $p(z)$, $1 \leqslant p(z) \leqslant Q$ și, în ipoteza $p(z) > 1$, argumentul axei mari $-\theta(z)$, $0 \leqslant \theta(z) < \pi$, ($p(z)$ se numește și *cîtul de dilatare*). În punctul z,

$$w_{\bar{z}} = \mu(z)\, w_z, \tag{1.2}$$

unde

$$\mu = -\frac{p-1}{p+1}\, e^{i2\theta} \tag{1.2'}$$

se numește *dilatare complexă* sau *coeficient Beltrami*. ([9], Cap. II, § 1). Funcția $\mu(z)$ este definită a.p. în G, măsurabilă și mărginită $0 \leqslant |\mu| \leqslant q = \frac{Q-1}{Q+1} < 1$, iar $w(z)$ este soluția generalizată a ecuației Beltrami (1.2).

Dacă $w(z)$ este diferențiabilă în z notînd cu

$$D_\varphi w(z) = \lim_{\substack{\rho \to 0 \\ z'-z=\rho e^{i\varphi}}} \frac{w(z') - w(z)}{z' - z} = (w_x(z) \cos\varphi + w_y(z) \sin\varphi)\, e^{-i\varphi}$$

derivata lui $w(z)$ pe direcția φ, are loc inegalitatea, luată ca punct de plecare în definiția analitică a cvasiconformității, ([9], Cap. II, (1.27))

$$\max_{\varphi} |D_\varphi w(z)|^2 \leqslant Q\, J_{w/z}(z). \tag{1.3}$$

Dilatarea $|D_\varphi w(z)|$ este maximă pentru $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ și minimă pentru $\varphi = \theta$([9], Cap. II, (1.8)).

O reprezentare cvasiconformă este un omeomorfism Beppo-Levi, i.e. absolut continuu liniar și cu derivate parțiale local 2-sumabile în G ([9], Cap. I, § 2, pct. 4, și Cap. III, propoziția 1.1). Ea este măsurabilă și oricare ar fi mulțimea măsurabilă $E \subset G$, măsura mulțimii $w(E)$ este

$$m[w(E)] = \int_E J_{w/z}(z)\, dx\, dy \tag{1.4}$$

([9], Cap. III, propoziția 1.2 și Cap. I, teorema 2.3).

2. Amintim următoarele proprietăți ale reprezentărilor cvasiconforme, pe care le vom aplica, în cele ce urmează :

2.1. *Proprietăți relative la compunerea reprezentărilor cvasiconforme*

Propoziția 1.1. *Inversa unei reprezentări Q-cvasiconforme este o reprezentare Q-cvasiconformă, ([9], Cap. III, propoziția 3.2).*

Propoziția 1.2. *Compunînd o reprezentaare Q-cvasiconformă cu o reprezentare Q'-cvasiconformă se obține o reprezentare $Q\,Q'$-cvasiconformă*

([9], *Cap. III, propoziția 3.6*). *Deoarece reprezentările conforme coincid cu reprezentările 1-cvasiconforme* ([9], *Cap. III, teorema 3.1*), *prin compunerea unei reprezentări Q-cvasiconforme cu o reprezentare conformă sau a unei reprezentări conforme cu una Q-cvasiconformă se obține tot o reprezentare cvasiconformă. Mai mult, dacă* $w(z)$ *este o reprezentare Q-cvasiconformă a domeniului G, soluție generalizată a ecuației Beltrami (1.2), iar* $\omega = \omega(w)$ *este o reprezentare conformă a lui* $w(G)$, *atunci* $\omega[w(z)]$ *este o reprezentare Q-cvasiconformă a lui G, soluție generalizată a aceleiași ecuații Beltrami. Reciproc, orice reprezentare Q-cvasiconformă a lui G, care verifică în sens generalizat ecuația Beltrami (1.2) este de forma* $\omega[w(z)]$, *unde* $\omega(w)$ *este o reprezentare conformă a lui* $w(G)$ ([9], *Cap. III, propoziția 3.6''*).

2.2. *Teoreme de existență și unicitate*

TEOREMA 1.1. (Teorema de existență a lui M. A. Lavrentiev) *Dată în domeniul G o funcție* $\mu(z)$ *măsurabilă și care verifică inegalitatea* $|\mu(z)| \leqslant q < 1$, *există o reprezentare Q-cvasiconformă* $w = w(z)$ *a lui G, avînd a.p. în G dilatarea complexă* $\mu(z)$ (*i.e. soluție generalizată a ecuației Beltrami (1.2)*), *pentru* $Q = \frac{1+q}{1-q}$, *și* $w(z)$ *este determinată pînă la o reprezentare conformă* ([9], *p. 290*).

De aici rezultă:

TEOREMA 1.2. (Teorema lui Riemann pentru reprezentări Q-cvasiconforme). *Dacă G și* G^* *sînt două domenii simplu conexe, conform echivalente, iar* $\mu(z)$ *este o funcție definită în G cu proprietățile de mai sus, atunci există o reprezentare Q-cvasiconformă a lui G pe* G^*, *soluție generalizată a unei ecuații Beltrami (1.2)* ([9], p. 291).

Dacă G și G^* *sînt domenii jordaniene, reprezentarea se extinde la un omeomorfism al lui G pe* G^* ([9], *Cap. IV, § 1*) *și este unic determinată cerînd să se corespundă sau trei perechi de puncte frontieră sau o pereche de puncte interioare și o pereche de puncte frontieră respectiv cîte o direcție prin punctele interioare* ([9], *Cap. VI, § 6*).

2.3. *Propoziții relative la convergența șirurilor de reprezentări cvasiconforme*

PROPOZIȚIA 1.3. *Dacă un șir de reprezentări Q-cvasiconforme* $w = w_n(z)$ *ale unui domeniu G converge uniform local în G la un omeomorfism* $w = w(z)$ *al lui G, atunci* $w(z)$ *este reprezentare Q-cvasiconformă,* ([9], *Cap. III, propoziția 3.5*).

PROPOZIȚIA 1.4. *Fie* $\mu_n(z)$ *un șir de funcții măsurabile în G, cu* $|\mu_n(z)| \leqslant q < 1$, *astfel încît* $\mu_n(z) \to \mu(z)$ *a.p. în G. Dacă* $w_n(z)$ *sînt reprezentări cvasiconforme ale domeniului G cu dilatarea complexă* $\mu_n(z)$ *a.p. în G și dacă șirul* $w_n(z)$ *converge uniform local în G la un omeomorfism*

$w(z)$, atunci $w(z)$ este o reprezentare cvasiconformă a lui G cu dilatarea complexă $\mu(z)$ a.p. în G ([9], Cap. VI, propoziția 3.1).

PROPOZIȚIA 1.5. *Fie $w = w_n(z)$ un șir de reprezentări Q-cvasiconforme: $(|z| < 1) \underset{pe}{\to} (|w| < 1)$ cu $w_n(0) = 0$. Șirul conține un subșir uniform convergent pe $|z| \leqslant 1$ către o reprezentare Q-cvasiconformă $w(z)$: $(|z| < 1) \underset{pe}{\to} (|w| < 1)$.*

Dacă șirul de reprezentări Q-cvasiconforme $w_n(z)$: $(|z| < 1) \underset{pe}{\to} (|w| < 1)$, cu $w_n(0) = 0$, converge uniform pe $|z| \leqslant 1$ la reprezentarea Q-cvasiconformă $w(z)$: $(|z| < 1) \underset{pe}{\to} (|w| < 1)$, șirul reprezentărilor inverse $z_n(w) = w_n^{-1}(w)$ converge uniform pe $|w| \leqslant 1$ la reprezentarea inversă $z(w) = w^{-1}(w)$. ([9], Cap. V, §3).

Pe lîngă aceste propoziții vom folosi și următoarele consecințe ale lor:

PROPOZIȚIA 1. 6. *Fie $\mu_n(z)$ un șir de funcții definite în $|z| < 1$, măsurabile și satisfăcînd inegalitatea $|\mu_n(z)| \leqslant q < 1$. Să presupunem ca șirul $\mu_n(z)$ converge a.p. în $|z| < 1$ la funcția $\mu(z)$ și să notăm cu $w_n(z)$ respectiv $w(z)$ omeomorfismul cercului unitate pe el însuși, soluție generalizată a ecuației $w_{\bar{z}} = \mu_n w_z$ respectiv $w_{\bar{z}} = \mu w_z$, unic determinat prin una din condițiile următoare:*

1°. w_n și w invariază originea și un punct α din $|z| = 1$.

2°. w_n și w invariază trei puncte α, β și γ din $|z| = 1$.

În aceste condiții atît șirul $w_n(z)$ cît și $w_n^{-1}(w)$ converge uniform la $w(z)$ respectiv $w^{-1}(w)$ în $|z| \leqslant 1$ respectiv $|w| \leqslant 1$.

1°. Conform propoziției 1.5, putem extrage din orice subșir al lui $w_n(z)$ un subșir $w_{n_k}(z)$ uniform convergent pe $|z| \leqslant 1$ la reprezentarea cvasiconformă $\tilde{w}(z)$ a lui $|z| < 1$ pe el însuși cu aceeași normare. Propoziția 1.4 arată că $\tilde{w}(z)$ este o reprezentare cvasiconformă cu dilatarea complexă $\mu(z)$ a.p. în $|z| < 1$, deci $\tilde{w}(z) = w(z)$. Cum limita $w(z)$ este independentă de subșirul considerat, rezultă imediat că $w_n(z) \to w(z)$ uniform în $|z| \leqslant 1$.

2°. Pentru a demonstra cazul 2°, cît și alte extinderi imediate ale propozițiilor de mai sus pentru diferite domenii jordaniene sau diferite normări, care determină univoc reprezentarea, să facem

Observația 1.1. Fie M_1, M_2 și M_3 mulțimi din spații metrice oarecare, $f_n : M_1 \to M_2$ un șir de aplicații continue, uniform convergent pe M_1 la aplicația continuă $f : M_1 \to M_2$ și $g_n : M_2 \to M_3$ un șir de aplicații continue, uniform convergent pe M_2 la o aplicație $g : M_2 \to M_3$, care este uniform continuă pe M_2. Atunci $g_n \circ f_n$ converge uniform pe M_1 la $g \circ f$.

Revenind la demonstrația cazului 2°, să prelungim w_n și w prin simetrie peste arcul $\alpha\beta\gamma$ din $|z| = 1$ la domeniul Δ — planul complex tăiat în lungul arcului rămas $\gamma\alpha$ din $|z| = 1$ — și să păstrăm notația pentru reprezentările cvasiconforme astfel obținute ale lui Δ pe el însuși și

pentru coeficienții lor Beltrami. Fie h reprezentarea conformă a lui Δ pe cercul unitate $|\zeta| < 1$, cu proprietatea $h(\beta) = 0$ și $h(\alpha) = 1$. Reprezentările cvasiconforme $W_n = h \circ w_n \circ h^{-1}$ converg la reprezentarea cvasiconformă $W = h \circ w \circ h^{-1}$ uniform pe cercul unitate închis după punctul 1° al propoziției 1.6, iar inversele lor W_n^{-1} converg la W^{-1} uniform pe cercul unitate închis, după propoziția 1.5. Aplicînd observația 1.1, deducem că șirul w_n converge uniform pe $|z| \leqslant 1$ la w și analog, șirul w_n^{-1} converge uniform pe $|w| \leqslant 1$ la w^{-1}.

Iată una dintre aplicațiile propoziției de mai sus, care va interveni în demonstrarea teoremei de existență din Cap. V.

PROPOZIȚIA 1.7. *Dacă μ_n este un șir de funcții măsurabile pe U, $|\mu_n| \leqslant q < 1$ și $\mu_n \to \mu$ a.p. în U și dacă w_n respectiv w sînt omeomorfisme surjective: $\overline{U} \to \overline{U}$, cvasiconforme în U cu dilatare complexă μ_n respectiv μ a.p. și invariază trei puncte din ∂U, atunci w_n converg în $\overline{U}$ (converg uniform local în U) la w. Notînd cu τ un omeomorfism surjectiv: $\overline{U} \to |\zeta| \leqslant 1$, conform în U, reprezentările cvasiconforme $W_n = \tau \circ w_n \circ \tau^{-1}$ converg uniform pe $|\zeta| \leqslant 1$ la reprezentarea cvasiconformă $W = \tau \circ w \circ \tau^{-1}$. Inversele acestor reprezentări w_n^{-1} și w^{-1} au aceleași proprietăți.*

Observația 2.1. Fie w_n și v_n două șiruri de omeomorfisme $\overline{U} \underset{\text{pe}}{\to} \overline{U}$, cvasiconforme în U, cu proprietatea că τ fiind un omeomorfism $\overline{U} \underset{\text{pe}}{\to} |\zeta| \leqslant 1$, conform în U, omeomorfismele $W_n = \tau \circ w_n \circ \tau^{-1}$ respectiv $V_n = \tau \circ v_n \circ \tau^{-1}$ converg uniform pe $|\zeta| \leqslant 1$ la omeomorfismele W respectiv V: $|\zeta| \leqslant 1 \underset{\text{pe}}{\to} |\zeta| \leqslant 1$, cvasiconforme în $|\zeta| < 1$. Atunci șirul $w_n \circ v_n$ are aceeași proprietate: $\tau \circ (w_n \circ v_n) \circ \tau^{-1} = W_n \circ V_n$ converge uniform în $|\zeta| \leqslant 1$ la $W \circ V$, (deci $w_n \circ v_n$ converge în $\overline{U}$ (converge uniform local în U) la $w \circ v$, unde $w = \tau^{-1} \circ W \circ \tau$ și $v = \tau^{-1} \circ V \circ \tau$).

2.4. Vom aplica de asemenea

PROPOZIȚIA 1.8. *Fie $w = w(z)$ un omeomorfism al unui domeniu G, care este Q-cvasiconform în $G - \gamma$, unde γ este un arc analitic. Atunci $w(z)$ este Q-cvasiconform în G ([9], Cap. III, propoziția 3.11).*

§ 2. Reprezentări cvasiconforme între suprafețe riemanniene

1. Fie R și R' două suprafețe riemanniene, iar $f: R \to R'$ un omeomorfism surjectiv. Fie p_0 un punct din R și $p_0' = f(p_0)$ din R'. Dacă v_{p_0} este o vecinătate parametrică a punctului p_0 pe R, reprezentată conform prin omeomorfismul $z = g(p)$ pe cercul parametric $|z| < 1$, cu $g(p_0) = 0$, iar $v_{p_0'}'$ o vecinătate parametrică a punctului p_0' pe R', reprezentată conform prin $w = h(p')$ pe cercul parametric $|w| < 1$, cu $h(p_0') = 0$, atunci f determină omeomorfismul $w = (h \circ f \circ g^{-1})(z)$, pe care-l vom nota $w = w(z): g^{-1}[f^{-1}(v_{p_0'}') \cap v_{p_0}] \to h[v_{p_0'}' \cap f(v_{p_0})]$. Prin definiție, f se numește

reprezentare Q-cvasiconformă, $(1 \leqslant Q < +\infty)$, dacă oricare ar fi punctul $p_0 \in R$ şi parametrii locali z şi w corespunzători punctelor p_0 şi $p_0' = f(p_0)$, omeomorfismul $w(z)$, asociat lui f prin procedeul de mai sus, este o reprezentare Q-cvasiconformă într-o vecinătate conexă a lui $z = 0$. Această definiţie este independentă de parametrii locali aleşi, deoarece o schimbare de parametru revine la o reprezentare conformă. Vom folosi şi acum denumirea de *reprezentare cvasiconformă* ori de cîte ori valoarea constantei Q nu prezintă importanţă în problema considerată.

După cum omeomorfismul surjectiv $f: R \to R'$ este sau nu cvasiconform, vom nota

$$Q[f] = \inf Q, \tag{2.1}$$

infimum fiind luat relativ la numerele Q, pentru care f este Q-cvasiconform, respectiv

$$Q[f] = +\infty \tag{2.1'}$$

şi vom numi $Q[f]$ *dilatarea maximă a lui f*.

Din propoziţiile 1.1 şi 1.2 rezultă imediat

1°. $Q[f] = Q[f^{-1}]$;

2°. $Q[f] = 1$, dacă şi numai dacă f este conformă;

3°. $Q[f^* \circ f] \leqslant Q[f^*]\, Q[f]$, f^* fiind un omeomorfism surjectiv $R' \to R''$ şi R'' o altă suprafaţă riemanniană.

Uneori se foloseşte notaţia

$$q[f] = \frac{Q[f] - 1}{Q[f] + 1}, \tag{2.1''}$$

legată de dilatarea complexă a lui f.

2. Fie f o reprezentare Q-cvasiconformă a lui R pe R', iar z şi w o pereche de parametri locali în puncte corespunzătoare p_0 respectiv $f(p_0)$; atunci $w(z)$ asociat este soluţie generalizată a unei ecuaţii Beltrami

$$w_{\bar{z}} = \mu(z)\, w_z, \tag{2.2}$$

cu $\mu(z)$ funcţie măsurabilă şi mărginită : $|\mu(z)| \leqslant q$, $\left(q = \dfrac{Q-1}{Q+1} < 1\right)$ La o schimbare de parametru $z \leftrightarrow z^*$ pe R, se verifică imediat că funcţia asociată [3]) $w(z^*)$ satisface o ecuaţie Beltrami

$$w_{\bar{z}^*} = \mu^*(z^*)\, w_{z^*}, \tag{2.2'}$$

unde

$$\mu^* = \mu \frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}\bar{z}^*}, \tag{2.3}$$

[3]) S-a notat funcţia prin variabilele pe care le leagă. Dacă $w(z) = \varphi(z)$ şi $w(z^*) = \varphi^*(z^*)$ în intersecţia domeniilor lor de definiţie $\varphi^*(z^*) = \varphi[z(z^*)]$.

sau

$$\mu^* \, dz^{*-1} \, d\bar{z}^* = \mu \, dz^{-1} \, d\bar{z}. \tag{2.3'}$$

Într-adevăr, dacă $v_{p_0^*}$ este vecinătatea parametrică corespunzătoare parametrului local z^*, $(v_{p_0} \cap v_{p_0^*} \neq \varnothing)$, și g^* omeomorfismul conform $v_{p_0^*} \leftrightarrow |z^*| < 1$, omeomorfismul $w(z^*)$ este diferențiabil a.p. pe $g^*(v_{p_0} \cap v_{p_0^*})$ și într-un punct de diferențiabilitate $w_{z^*} = w_z \cdot \dfrac{dz}{dz^*}$, iar $w_{\bar{z}^*} = w_{\bar{z}} \cdot \dfrac{d\bar{z}}{d\bar{z}^*}$. Prin urmare, a.p. pe $g^*(v_{p_0} \cap v_{p_0^*})$ avem $w_{\bar{z}^*} = \mu[z(z^*)] \cdot \dfrac{d\bar{z}}{d\bar{z}^*} \cdot \dfrac{dz^*}{dz} \cdot w_{z^*}$, ceea ce arată că $w(z^*)$ este soluție generalizată a ecuației Beltrami (2.2').

Fie m și n două numere întregi arbitrare. Se numește *diferențială de tip* (m, n) *pe suprafața riemanniană* R o lege care asociază fiecărui parametru local z în domeniul său de definiție $v \subset R$ o funcție măsurabilă $\psi(z)$, $z \in v$, astfel încît $\psi(z) \, dz^m \, d\bar{z}^n$ să fie invariant la schimbarea de parametru. Două diferențiale $\psi_k(z) \, dz^m \, d\bar{z}^n$, $(k = 1, 2)$, coincid dacă $\psi_1 = \psi_2$ a.p. pe R.

Conform (2.3'), orice reprezentare Q-cvasiconformă $f: R \to R'$ definește pe R o diferențială de tip $(-1, 1)$: $\mu(z) \, dz^{-1} \, d\bar{z}$ și evident o funcție sau un scalar invariant la schimbarea de parametru $|\mu| \leqslant q \left(= \dfrac{Q-1}{Q+1} < 1\right)$.

Vom numi *diferențială Beltrami* respectiv *coeficient Beltrami*, o diferențială $\mu \, dz^{-1} \, d\bar{z}$ respectiv coeficientul ei μ, dacă există o constantă $q \in [0,1)$, astfel încît $|\mu| \leqslant q$.

Teorema 2.1. *Există o corespondență biunivocă între omeomorfismele cvasiconforme ale suprafețelor riemanniene R și diferențialele Beltrami definite pe R.*

După cele de mai sus, oricărei reprezentări cvasiconforme a lui R îi corespunde o diferențială Beltrami.

Reciproc, o diferențială Beltrami $\mu \, dz^{-1} \, d\bar{z}$ definește pe spațiul topologic R o nouă suprafață riemanniană R^μ, pentru care parametrii locali sînt dați în modul următor: Fie v_{p_0} o vecinătate parametrică pe R, z un parametru local asociat lui p_0 și $z = g(p)$ reprezentarea parametrică corespunzătoare, $g: v_{p_0} \leftrightarrow (|z| < 1)$, cu normarea $g(p_0) = 0$. După teorema 1.1, există un omeomorfism $\zeta = \zeta(z): (|z| < 1) \leftrightarrow (|\zeta| < 1)$, cu $\zeta(0) = 0$, soluție generalizată a ecuației $\zeta_{\bar{z}} = \mu \zeta_z$. Definim R^μ, luînd ca vecinătăți parametrice v_{p_0} și ca reprezentări parametrice $\zeta = \zeta[g(p)]$. Se verifică imediat că relațiile de vecinătate pe R^μ sînt reprezentări conforme: Într-adevăr, un alt parametru ζ^* va fi definit plecînd de la vecinătatea parametrică $v_{p_0^*}$ și reprezentarea parametrică $z^* = g^*(p)$ de pe R, ca omeomorfism: $(|z^*| < 1) \leftrightarrow (|\zeta^*| \to 1)$, soluție generalizată

a ecuației $\zeta^*_{\bar{z}^*} = \mu^* \zeta^*_{z^*}$, cu $\zeta^*(0) = 0$. Dacă $v_{p_0} \cap v_{p_0^*} \neq \varnothing$, calculul efectuat mai sus în legătură cu comportarea ecuației Beltrami la o schimbare de parametru $z \longleftrightarrow z^*$, arată că $\zeta(z^*) = \zeta[z(z^*)]$ satisface în $g^*(v_{p_0^*} \cap v_{p_0})$ ecuația Beltrami $\zeta_{\bar{z}^*} = \mu^* \zeta_{z^*}$ în sens generalizat. Deoarece $\zeta(z^*)$ și $\zeta^*(z^*)$ sînt reprezentări cvasiconforme cu aceeași dilatare complexă a.p. în $g^*(v_{p_0^*} \cap v_{p_0})$, reprezentarea $\zeta^*(\zeta)$ este conformă, după propoziția 1.2.

Aplicația identică $f^\mu : R \to R^\mu$, care asociază fiecărui $p \in R$ același punct $p \in R^\mu$, este o reprezentare cvasiconformă, deoarece f^μ se exprimă în parametri locali z și ζ prin $\zeta = \zeta(z)$. Numim f^μ *reprezentarea naturală indusă* de $\mu\, dz^{-1}\, d\bar{z}$.

PROPOZIȚIA 2.1. *Orice reprezentare cvasiconformă $f : R \to R'$ se poate interpreta ca reprezentare naturală indusă de diferențiala ei Beltrami $\mu\, dz^{-1}\, d\bar{z}$.*

Într-adevăr, acestei diferențiale îi corespunde reprezentarea naturală $f^\mu : R \to R^\mu$, iar $\varphi = f^\mu \circ f^{-1} : R' \to R^\mu$ este o reprezentare conformă. Identificînd R' cu R^μ prin φ, reprezentările f și f^μ coincid.

Normăm spațiul diferențialelor Beltrami pe R, punînd

$$(2.4)\quad ||\mu\, dz^{-1}\, d\bar{z}|| = ||\mu|| = \text{adevăratul max } |\mu| = \inf_E \sup_{z \in R-E} |\mu(z)|,$$

unde E este o mulțime de măsură nulă, arbitrară în R. Cu această notație reprezentarea naturală indusă de $\mu\, dz^{-1}\, d\bar{z}$ satisface ecuația

$$(2.5)\qquad q[f^\mu] = ||\mu||.$$

§ 3. Teorema de existență a reprezentărilor cvasiconforme pentru suprafețe riemanniene canonice

1. Ne propunem să aplicăm rezultatele stabilite pentru omeomorfisme, în cazul unei reprezentări cvasiconforme f a unei suprafețe riemanniene R pe suprafața riemanniană R'.

Conform teoremei 5.1 din capitolul I, orice omeomorfism f este indus de un omeomorfism $\hat{f} : \hat{R} \to \hat{R}'$ al suprafețelor universale de acoperire. Ținînd seama de relația (5.1) și de faptul că Π_G și $\Pi_{G'}$ sînt local reprezentări conforme, putem formula

PROPOZIȚIA 3.1. *Reprezentarea $f : R \to R'$ este cvasiconformă, dacă și numai dacă $\hat{f} : \hat{R} \to \hat{R}'$ este cvasiconformă.*

2. Fie R o suprafață riemanniană de tip iperbolic, $\hat{R} = U = (\exists z > 0)$ suprafața de acoperire universală, G grupul transformărilor acoperirii lui R prin $\hat{R}$ și Π_G proiecția acestei acoperiri. Deoarece Π_G este local o reprezentare conformă putem alege ca parametru local atît z, cît și orice $T(z)$ cu $T \in G$. Obținem atunci

PROPOZIȚIA 3.2. *Orice diferențială Beltrami pe R se poate scrie sub forma* $\mu(z)\,dz^{-1}\,d\bar{z}$, *unde* $\mu(z)$ *este o funcție măsurabilă pe* U, *verificînd inegalitatea*

$$|\mu(z)| \leqslant q, \tag{3.1}$$

pentru o constantă $q \in [0, 1)$, *și relația*

$$\mu[T(z)] = \mu(z)\frac{T'(z)}{\overline{T'(z)}}, \tag{3.2}$$

oricare ar fi transformarea $T \in G$.

Invers, vom numi *coeficient Beltrami compatibil cu un grup Fuchs* G, orice funcție $\mu(z)$ definită pe U, măsurabilă și cu proprietățile (3.1) și (3.2) din propoziția 3.2.

PROPOZIȚIA 3.2′. *Dacă* $\mu(z)$ *este un coeficient Beltrami compatibil cu grupul Fuchs* G, *atunci* $\mu(z)\,dz^{-1}\,d\bar{z}$ *este o diferențială Beltrami pe suprafața riemanniană* $R = U/G$ (Cap. II, propoziția 3.1).

TEOREMA 3.1. *Fie* G *grupul Fuchs al transformărilor de acoperire pentru* (U, Π_G, R) *și* $\mu(z)$ *un coeficient Beltrami compatibil cu* G. *Există un omeomorfism* $w = w(z)$, *soluție generalizată a ecuației Beltrami* $w_{\bar{z}} = \mu w_z$, *care reprezintă topologic* U *pe el însuși cu păstrarea orientării, se prelungește la un omeomorfism al lui* $\overline{U}$ *pe* $\overline{U}$ *și este compatibil cu grupul* G. *Suprafața riemanniană* $R' = U/wGw^{-1}$ *este conform echivalentă cu* R^μ *și, identificînd* R' *cu* R^μ, w *induce reprezentarea naturală* $f^\mu : R \to R^\mu$.

Din teorema 1.2 rezultă existența omeomorfismului $w(z)$ a lui U pe U, soluție generalizată a ecuației Beltrami dată, care păstrează orientarea și prelungește la un omeomorfism al lui $\overline{U}$ pe $\overline{U}$.

Oricare ar fi $T \in G$, după cum se verifică imediat folosind (3.2), $w_1(z) = w[T(z)]$ satisface aceeași ecuație Beltrami ca și $w(z)$. Prin urmare, există $A \in H$, astfel încît

$$w[T(z)] = A[w(z)]$$

deci $wGw^{-1} \subset H$, i.e. w este compatibil cu grupul G. (Cap. III, § 6, pct. 4). Conform propoziției 5.3 din Cap. I, aplicată pentru $f = w$, acest omeomorfism induce un omeomorfism $f : U/G \to U/G'$, unde $G' = wGw^{-1}$. După propoziția 3.1, reprezentarea f este cvasiconformă. Vom demonstra acum că $R' = U/G'$ și R^μ sînt conform echivalente : Fie $p_0 \in R$, $z_0 \in \Pi_G^{-1}(p_0)$, $w_0 = w(z_0)$ și $p_0' = f(p_0)$. Putem lua vecinătatea $\hat{v}$ a lui z_0 suficient de mică pentru ca $\Pi_G|_{\hat{v}}$ și $\Pi_{G'}|_{w(\hat{v})}$ să fie omeomorfisme conforme. Să notăm cu φ respectiv φ' omeomorfismele inverse lor, definite pe $v = \Pi_G(\hat{v})$ și $v' = \Pi_{G'}[w(\hat{v})] = f(v)$. Alegînd parametrii locali $z = \varphi(p)$ în v pe R, $w = w[\varphi(p)]$ în v pe R^μ și $w = \varphi'(p')$ în v' pe R', se vede că aplicația $f : R^\mu \to R'$ se exprimă ca aplicația identică în parametrul w, deci R^μ și R' sînt conform echivalente. Identificînd R' cu R^μ prin f, această aplicație devine omeomorfismul identic al lui R pe R^μ (care coincide cu R ca

spațiu topologic) și se exprimă în parametrii locali z și w prin $w(z)$, soluția ecuației Beltrami date, prin urmare f se reduce la f^{μ}.

Observația 3.1. În teorema precedentă, $\hat{f} = w(z)$ nu este unic determinat, ci se poate înlocui cu orice aplicație $w^{\star}(z) = A \circ w(z)$ cu $A \in H$, după propoziția 1.2. Notînd $G^{\star} = w^{\star} G w^{\star -1} = A G' A^{-1}$, suprafețele riemanniene $R^{\star} = U/G^{\star}$ și R' sînt conform echivalente (Cap. III, propoziția 6.2), cum rezultă de altfel și din faptul că sînt ambele conform echivalente cu R^{μ}, deoarece w și $w^{\star}$ au același coeficient Beltrami a.p. în U.

Observația 3.2. Considerații analoge cu cele dezvoltate în acest punct au loc și pentru R, suprafață riemanniană de tip parabolic, luînd $\hat{R} = C$, planul z finit. Propoziția 3.2, definiția coeficientului Beltrami compatibil cu G și propoziția 3.2′ se păstrează, $\mu(z)$ fiind acum o funcție măsurabilă pe C, pentru care

$$|\mu(z)| \leqslant q, \tag{3.1'}$$

q constantă, $0 \leqslant q < 1$, și

$$\mu[T(z)] = \mu(z), \tag{3.2'}$$

deoarece G este un grup de translații. (Dacă G are 1 sau 2 generatori, relația (3.2′) arată că μ este o funcție simplu respectiv dublu periodică). Are loc

Teorema 3.1′. *Dacă $\mu(z)$ este un coeficient Beltrami compatibil cu grupul transformărilor de acoperire pentru $(C, \Pi_G, R = C/G)$, există $w = w(z)$ reprezentare cvasiconformă : $C \underset{p.}{\to} C$, avînd a.p. în C dilatarea complexă $\mu(z)$ și compatibilă cu G. Identificînd suprafețele riemanniene conform echivalente $R' = C/wGw^{-1}$ și R^{μ}, reprezentarea w induce $f^{\mu} : R \to R^{\mu}$.*

Se păstrează de asemenea observația 3.1.

În cazul în care $G = \{1\}$, iar R este de tip parabolic sau eliptic, propozițiile de mai sus devin banale, iar teorema 3.1 se reduce la teorema 1.2 (de existență).

3. Fie (R, α) și (R', α') două suprafețe riemanniene canonice, cu aceeași orientare, R și R' fiind compacte, de același gen $g \geqslant 1$. O reprezentare $f : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$ se numește *cvasiconformă*, dacă aplicația $f : R \to R'$ este cvasiconformă.

Dat coeficientul Beltrami μ pe R, reprezentarea naturală $f^{\mu} : R \to R^{\mu}$ transformă o clasă α de sisteme canonice de generatori ai grupului $\pi_1(R, p)$, $p \in R$, în clasa $\alpha^{\mu} = f^{\mu}(\alpha)$ $(= \alpha)$ de sisteme canonice de generatori ai grupului $\pi_1(R^{\mu}, f(p))$, $(f(p) = p)$. Prin urmare, μ induce *reprezentarea cvasiconformă naturală* $f^{\mu} : (R, \alpha) \to (R^{\mu}, \alpha^{\mu})$.

Teorema 3.2. *Fie (R, α) și (R', α') două suprafețe riemanniene canonice cu aceeași orientare, R și R' fiind suprafețe compacte de gen $g \geqslant 1$. Există o reprezentare cvasiconformă $f : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$.*

După teorema 6.2 din Cap. III, există o reprezentare $(R, \alpha) \to (R', \alpha')$. Pentru a demonstra însă existenţa unei reprezentări cvasiconforme, să folosim propoziţia 6.1, 2'° din Cap. III şi să alegem două poligoane normale P şi P' cu laturi arce analitice a_j, a_j^{-1} respectiv a'_j, a'^{-1}_j $(j=1..., 2g)$ formînd un sistem canonic de generatori pentru $\pi_1(R, p)$ de clasă α, respectiv un sistem canonic de generatori pentru $\pi_1(R', p')$ de clasă α', unde $p \in R$ şi $p' \in R'$ sînt puncte arbitrare. Prin ipoteză, ∂P şi $\partial P'$ au aceeaşi orientare. Între laturile a_j şi a_j^{-1} respectiv a'_j şi a'^{-1}_j există omeomorfisme analitice T_j respectiv T'_j. Se construieşte uşor o reprezentare cvasiconformă surjectivă $\varphi : P \to P'$, astfel încît $\varphi|_{a_j^{-1}} = T'_j \circ \varphi|_{a_j} \circ T_j^{-1}$. De exemplu, să efectuăm reprezentările conforme $h : P \to (|z| < 1)$ şi $h' : P' \to (|z'| < 1)$ şi să notăm cu b_j, b_j^{-1}, b'_j şi b'^{-1}_j arcele obţinute pe $|z| = 1$ respectiv $|z'| = 1$ din a_j, a_j^{-1}, a'_j şi a'^{-1}_j, cu S_j, S_j^{-1}, S'_j şi S'^{-1}_j sectoarele corespunzătoare acestor arce în cele două cercuri şi cu $\mathcal{T}_j = h \circ T_j \circ h^{-1}$ respectiv $\mathcal{T}'_j = h' \circ T'_j \circ h'^{-1}$. Notînd $z = r\,e^{i\theta}$ şi $z' = r'\,e^{i\theta'}$, să definim o reprezentare cvasiconformă $\psi : (|z| < 1) \underset{\text{pe}}{\to} (|z'| < 1)$, astfel încît $\psi(re^{i\theta}) = r\,e^{i\theta'}$, cu $\theta' = g(\theta)$, unde pe fiecare arc b_j, transformarea g transformă liniar intervalul corespunzător de variaţie a lui θ în intervalul de variaţie a lui θ' pe b'_j, iar pe b_j^{-1} să avem $\psi|_{b_j^{-1}} = \mathcal{T}'_j \circ \psi|_{b_j} \circ \mathcal{T}_j^{-1}$. Se verifică uşor că ψ este cvasiconformă în fiecare sector S_j, deci după propoziţia 1.8, în $|z| < 1$. Identificînd punctele, echivalente din ∂P şi din $\partial P'$, reprezentarea φ induce un omeomorfism f al lui R pe R', cvasiconform pe R, deoarece este cvasiconform pe R, exceptînd arcele care corespund lui ∂P şi se aplică aceeaşi propoziţie 1.8. Prin construcţie însă $f(\alpha) = \alpha'$, deci f este o reprezentare cvasiconformă a lui (R, α) pe (R', α').

§ 4. Reprezentări Teichmüller

1. O *diferenţială pătratică* pe o suprafaţă riemanniană R este o diferenţială de tip (2, 0). În raport cu un parametru local z, o diferenţială pătratică se scrie deci sub forma $\Phi(z)\,dz^2$. O diferenţială pătratică se numeşte *regulată*, dacă $\Phi(z)$ este funcţie analitică regulată de z.

Fie $\Phi(z)\,dz^2$ o diferenţială pătratică regulată pe R, neidentic nulă, p_0 un punct arbitrar din R şi z un parametru local cu proprietatea $z(p_0) = 0$. Într-o vecinătate a originii din planul z, putem scrie

$$\Phi(z)\,dz^2 = z^m (a_0 + a_1 z + \ldots)\,dz^2, \tag{4.1}$$

cu $a_0 \neq 0$. Numărul m se numeşte *ordinul diferenţialei* $\Phi(z)\,dz^2$ *în punctul* p_0, iar dacă $m > 0$, punctul p_0 este un *zero de ordinul* m *al diferenţialei* $\Phi(z)\,dz^2$.

Vom asocia diferențialei pătratice regulate $\Phi(z)\,dz^2$ un parametru local ζ în punctul p_0, pe care îl vom numi *parametrul natural corespunzător lui* $\Phi(z)\,dz^2$ *în* p_0, în modul următor

$$\zeta = \left(\int_0^z \Phi^{1/2}(u)\,du\right)^{2/m+2} = \left(\int_0^z u^{m/2}(b_0 + b_1 u + \ldots)\,du\right)^{2/m+2} = \tag{4.2}$$

$$= (z^{m+2/2}(c_0 + c_1 z + \ldots))^{2/m+2} = z(d_0 + d_1 z + \ldots),$$

cu

$$b_0 = a_0^{1/2},\ c_0 = \frac{2\,b_0}{m+2} \text{ și } d_0 = c_0^{2/m+2}.$$

Parametrul natural corespunzător lui $\Phi(z)\,dz^2$ în p_0 este unic determinat pînă la înmulțire cu o rădăcină de ordinul $(m+2)$ a unității; el poate fi definit prin relația:

$$\Phi(z)\,dz^2 = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 \zeta^m\,d\zeta^2, \tag{4.3}$$

și în particular pentru $m = 0$,

$$\Phi(z)\,dz^2 = d\zeta^2. \tag{4.4}$$

2. Fie R o suprafață riemanniană de tip iperbolic, $\hat{R} = U$ suprafața ei de acoperire universală și G grupul transformărilor de acoperire. Luînd $z \in U$ drept parametru local pe $R = U/G$, orice diferențială pătratică regulată pe R se poate scrie sub forma $\Phi(z)\,dz^2$, cu $\Phi(z)$ olomorfă în U și verificînd pentru orice $T \in G$ relația

$$\Phi[T(z)] = \frac{\Phi(z)}{T'^2(z)}, \tag{4.5}$$

care exprimă invarianța diferențialei la schimbarea de parametru $z \to T(z)$. Reciproc, o funcție $\Phi(z)$ olomorfă în U, care verifică relația (4.5) pentru orice $T \in G$, definește o diferențială pătratică regulată $\Phi(z)\,dz^2$ pe R.

Analog se procedează în cazul R suprafață riemanniană de tip parabolic: U se înlocuiește cu C și relația (4.5) cu

$$\Phi[T(z)] = \Phi(z) \tag{4.5'}$$

pentru $T \in G$. Dacă R este un tor, relația (4.5') arată că $\Phi(z)$ este o funcție întreagă dublu periodică, deci o constantă; dacă R este un cilindru, $\Phi(z)$ este o funcție întreagă simplu periodică, iar dacă R este conform echivalentă cu C, $\Phi(z)$ este o funcție întreagă arbitrară.

În cazul cînd R este conform echivalentă cu sfera, o diferențială pătratică regulată poate fi dată de $\Phi(z)\,dz^2$ cu $\Phi(z)$ funcție întreagă

și $\widetilde{\Phi}(\tilde{z})\,d\tilde{z}^2$ într-o vecinătate a punctului $\tilde{z}=0$, în care $\widetilde{\Phi}(\tilde{z})$ este olomorfă și satisface relația

$$\widetilde{\Phi}(\tilde{z}) = \Phi\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)\left(\frac{-1}{\tilde{z}^2}\right)^2, \qquad \tilde{z}\neq 0. \tag{4.5''}$$

3. Fie R și R' două suprafețe riemanniene.

Se numește *reprezentare Teichmüller* o reprezentare $f: R\to R'$ conformă sau cvasiconformă cu coeficientul Beltrami de forma

$$\mu(z) = q\,\frac{\overline{\Phi(z)}}{|\Phi(z)|} = q\,e^{-i\arg\Phi(z)}, \tag{4.6}$$

unde $\Phi(z)\,dz^2$ este o diferențială pătratică regulată pe R, $\Phi(z)\,dz^2 \not\equiv 0$, iar q este o constantă, $0<q<1$.

În cazul cînd f nu este conformă, definiția aceasta are sens, deoarece se verifică ușor că $\mu(z)$ dat de (4.6) este un coeficient Beltrami pe R. Vom spune atunci că *reprezentarea Teichmüller este definită de diferențiala pătratică* $\Phi(z)\,dz^2$ *și de constanta* q. Dacă f este conformă, pentru unificarea expunerii vom lua $q=0$.

Observația 4.1. Dacă f este o reprezentare Teichmüller, definită de diferențiala pătratică regulată $\Phi(z)\,dz^2 \not\equiv 0$ și de constanta $q\in(0,1)$, și dacă $\varphi: R'\to R'$ este o reprezentare conformă, atunci $\varphi\circ f$ este tot o reprezentare Techmüller definită de $\Phi(z)\,dz^2$ și q.

Observația 4.2. O reprezentare Teichmüller determină în mod unic constanta q; dacă $q>0$, ea determină diferențiala pătratică regulată $\Phi(z)\,dz^2$ pînă la un factor constant pozitiv. Într-adevăr, lui f îi corespunde coeficientul Beltrami μ; prin urmare, $|\mu|=q$, iar $\arg\mu = -\arg\Phi \pmod{2\pi}$. Dacă $V(z)$ este o funcție armonică conjugată cu $\arg\mu$, $\Phi(z) = e^{C}\cdot e^{V-i\arg\mu}$, C fiind o constantă reală.

Observația 4.3. Evident, dacă f este o reprezentare Teichmüller, atunci $Q[f] = \dfrac{1+q}{1-q}$.

Observația 4.4. Date diferențiala pătratică regulată $\Phi(z)\,dz^2 \not\equiv 0$ pe R și constanta q, $0<q<1$, reprezentarea naturală $f^{\mu}: R\to R^{\mu}$, corespunzătoare coeficientului Beltrami $\mu(z)$ (4.6), este o reprezentare Teichmüller, definită de $\Phi(z)\,dz^2$ și de q. Prin urmare, date $\Phi(z)\,dz^2$ și q, există totdeauna o reprezentare Teichmüller definită de ele.

4. Teorema 4.1. *Dacă* $f: R\to R'$ *este o reprezentare Teichmüller, definită de diferențiala pătratică regulată* $\Phi(z)\,dz^2 \not\equiv 0$ *pe* R *și de constanta* q, *atunci există o diferențială pătratică regulată, unic determinată,* $\Psi(z')\,dz'^2$ *pe* R', *cu proprietățile următoare*:

1° *Ordinul lui* $\Phi(z)\,dz^2$ *într-un punct* p_0 *arbitrar din* R *coincide cu ordinul lui* $\Psi(z')\,dz'^2$ *în punctul* $p_0' = f(p_0)$ *din* R'.

2° *Dacă* ζ *este parametrul natural corespunzător lui* $\Phi(z)\,dz^2$ *într-un punct* $p_0 \in R$, *în care* $\Phi(z)\,dz^2 \neq 0$, *iar* ζ' *este parametrul natural corespunzător lui* $\Psi(z')\,dz'^2$ *în* $p_0' = f(p_0)$, *atunci* f *se exprimă prin transformarea afină*

$$\zeta' = \frac{\zeta + q\bar{\zeta}}{1 - q} \tag{4.7}$$

sau

$$\zeta' = Q\xi + i\eta, \qquad \zeta = \xi + i\eta.$$

3° *Transformarea inversă* f^{-1} *este o reprezentare Teichmüller definită de diferențiala* $-\Psi(z')\,dz'^2$ *și de constanta* q.

1) Fie p_0 un punct arbitrar din R, $m \geqslant 0$ ordinul lui $\Phi(z)\,dz^2$ în p_0 și ζ parametrul natural corespunzător (4.3) — (4.4).

Punînd

$$\zeta' = \left(\frac{\zeta^{\frac{m+2}{2}} + q\bar{\zeta}^{\frac{m+2}{2}}}{1 - q} \right)^{2/m+2} \tag{4.8}$$

și, în particular, pentru $m = 0$,

$$\zeta' = \frac{\zeta + q\bar{\zeta}}{1 - q},$$

definim un omeomorfism $\zeta' = \zeta'(\zeta)$. Aceasta este evident pentru $m = 0$. Dacă $m > 0$, să notăm

$$\zeta = \rho e^{i\theta}, \ \theta \in [0, 2\pi); \ \tilde{\zeta} = \zeta^{\frac{m+2}{2}} = \rho^{\frac{m+2}{2}} e^{\frac{i\theta(m+2)}{2}}, \quad \tilde{\zeta}' = \frac{\tilde{\zeta} + q\bar{\tilde{\zeta}}}{1 - q}$$

și

$$\zeta' = \tilde{\zeta}^{\frac{2}{m+2}} = \zeta \left(\frac{1 + q e^{-i\theta(m+2)}}{1 - q} \right)^{\frac{2}{m+2}},$$

unde $\arg \zeta' = 0$ pentru $\theta = 0$. Se vede că (4.8) stabilește un omeomorfism între fiecare semidreaptă $\theta = \text{const.}$ și imaginea sa. Totodată dacă ζ descrie cercul $c : |\zeta| = \rho$, astfel încît θ crește de la 0 la 2π, punctul $\tilde{\zeta}$ descrie un cerc cu centrul în origină, argumentul său variind de la 0 la $\pi(m + 2)$; prin transformarea afină, $\tilde{\zeta}'$ descrie o elipsă cu centrul în origină și argumentul său variază tot de la 0 la $\pi(m + 2)$, iar ζ' descrie o curbă închisă c', formată din $m + 2$ arce, care se deduc unele din altele prin rotații de centru 0 și unghi $\mathcal{M}\dfrac{2\pi}{m+2}$ ($\mathcal{M}$ — întreg), curba c' fiind intersectată într-un singur punct de fiecare semidreaptă prin origine. Transformarea (4.8) stabilește un omeomorfism al cercului c pe curba c'. În concluzie, (4.8) este un omeomorfism al planului ζ pe planul ζ'.

2) Vom demonstra că ζ' poate fi luat ca parametru local pe R': Fie $p_0' \in R'$, $p_0 = f^{-1}(p_0') \in R$, iar z și z' parametri locali definiți, în vecinătatea acestor puncte de reprezentările conforme $z = g(p)$ și $z' = h(p')$, cu normarea $g(p_0) = 0$, $h(p_0') = 0$. Să alegem o vecinătate $\mathbf{v}$ a lui p_0 cu următoarele proprietăți: $z = g(p)$ reprezintă conform $\mathbf{v}$ pe vecinătatea v a lui $z = 0$; $\zeta = \zeta(z)$ — parametrul natural al lui $\Phi(z)\,dz^2$ în p_0 — reprezintă conform v pe vecinătatea V a lui $\zeta = 0$; f reprezintă topologic $\mathbf{v}$ pe vecinătatea $\mathbf{v}'$ a lui p_0' și $z' = h(p')$ reprezintă conform $\mathbf{v}'$ pe vecinătatea v' a lui $z' = 0$. În parametrii locali z și z', aplicația f se exprimă prin reprezentarea cvasiconformă $z' = w(z)$, dată de $h \circ f \circ g^{-1}$, care este soluție generalizată a ecuației

$$w_{\bar{z}} = q\,\frac{\overline{\Phi(z)}}{|\Phi(z)|}\,w_z,$$

iar în parametrii ζ și z', prin $z' = w[z(\zeta)]$, soluție generalizată a ecuației

$$z'_{\bar{\zeta}} = q\left(\frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|}\right)^m z'_{\zeta},$$

după cum rezultă din (4.3). Pe de altă parte, din (4.8) obținem imediat

$$\zeta'_{\bar{\zeta}} = q\left(\frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|}\right)^m \zeta'_{\zeta}.$$

Prin urmare omeomorfismele $\zeta'(\zeta)$ și $z'(\zeta)$ sînt în V soluții generalizate ale aceleiași ecuații Beltrami, și omeomorfismul $\zeta'(z') = \zeta'[\zeta(z')]$, format compunînd $\zeta(z')$ — inversul lui $z'(\zeta)$ — cu $\zeta'(\zeta)$, este o reprezentare conformă a lui v' pe $V' = \zeta'(V)$. Evident, $\zeta'(0) = 0$ și am demonstrat astfel că ζ' formează pe R' un sistem de parametri locali corespunzători punctelor $p_0' \in R'$, pe care să-i numim momentan *parametri distinși*.

3) Vom arăta acum că

$$\Psi(z')\,dz'^2 = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 \zeta'^m\,d\zeta'^2 \tag{4.9}$$

este o diferențială pătratică regulată pe R' și atunci va rezulta că ζ' este parametrul natural corespunzător acestei diferențiale. În acest scop, vom studia comportarea lui $\Psi(z')\,dz'^2$ la o schimbare de parametru $\zeta' \to \zeta_1'$, unde ζ_1' este parametrul distins corespunzător unui punct p_1' dintr-o vecinătate $\mathbf{v}'$ a lui p_0', aleasă astfel încît în $f^{-1}(\mathbf{v}') = \mathbf{v}$, în care z să fie parametru local, diferențiala $\Phi(z)\,dz^2$ să se anuleze cel mult în punctul $p_0 = f^{-1}(p_0')$ și ζ să fie definit. Atunci, ordinul lui $\Phi(z)\,dz^2$ în $p_1 = f^{-1}(p_1')$ va fi 0 și notînd cu ζ_1 parametrul natural corespunzător lui $\Phi(z)\,dz^2$ în p_1, vom avea

$$\zeta_1 = \int_{z(p_1)}^{z} \Phi^{1/2}(z)\,dz = \int_t^{\zeta} \frac{m+2}{2}\,\zeta^{m/2}\,d\zeta = \zeta^{\frac{m+2}{2}} - t^{\frac{m+2}{2}}, \tag{4.10}$$

unde $t = \zeta(p_1)$, şi

$$\zeta_1' = \frac{\zeta_1 + q\bar{\zeta}_1}{1 - q}. \tag{4.11}$$

Ţinînd seama de (4.8), (4.10) şi (4.11), obţinem

$$\zeta_1' = \frac{\zeta^{\frac{m+2}{2}} + q\bar{\zeta}^{\frac{m+2}{2}}}{1-q} - \frac{t^{\frac{m+2}{2}} + q\bar{t}^{\frac{m+2}{2}}}{1-q} = \zeta'^{\frac{m+2}{2}} - t'^{\frac{m+2}{2}},$$

unde $t' = \zeta'(p_1')$, sau

$$d\zeta_1'^2 = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 \zeta'^m \, d\zeta'^2.$$

4) Teorema 4.1 rezultă imediat din construcţia de mai sus: pe R' am determinat diferenţiala pătratică regulată $\Psi(z')\,dz'^2$ cu proprietăţile 1° şi 2°. Conform (4.8) putem scrie

$$\zeta = \left(\frac{\zeta'^{\frac{m+2}{2}} - q\bar{\zeta}'^{\frac{m+2}{2}}}{1+q}\right)^{2/m+2}, \tag{4.12}$$

deci $\zeta(\zeta')$ este soluţie generalizată a ecuaţiei

$$\zeta_{\bar{\zeta}'} = -q\left(\frac{\bar{\zeta}'}{|\zeta'|}\right)^m \zeta_{\zeta'}. \tag{4.13}$$

Prin urmare f^{-1}, care se exprimă în parametrii locali naturali ζ şi ζ' prin $\zeta(\zeta')$, este o reprezentare Teichmüller definită de diferenţiala pătratică $-\Psi(z')\,dz'^2$ şi constanta q, ceea ce demonstrează şi punctul 3°.

Observaţia 4.5. O reprezentare Teichmüller $f: R \to R'$ are dilatarea constantă q, iar dacă $q > 0$, axele mici respectiv axele mari ale elipselor infinitezimale de pe R, transformate în cercuri infinitezimale pe R', formează un cîmp de direcţii pe R (direcţiile de dilatare maximă respectiv minimă). Acest cîmp este determinat de diferenţiala pătratică $\Phi(z)\,dz^2$ prin condiţia $\Phi(z)\,dz^2 > 0$, respectiv < 0.

Observaţia 4.6. În cazul $g = 1$, o aplicaţie Teichmüller se exprimă ca o transformare afină şi în parametrii locali determinaţi de acoperirea universală. Această transformare afină între planele de acoperire universală este indusă de aplicaţia Teichmüller în sensul teoremei 5.1 din Cap. I.

5. Încheiem paragraful cu următoarea teoremă, pe care o vom folosi în Cap. V:

TEOREMA 4.2. *Diferenţialele pătratice regulate pe suprafaţa riemanniană R închisă, de gen $g > 1$, formează spaţiu vectorial real de dimensiune $6g-6$.*

Vom demonstra această teoremă folosind noţiunea de divizor şi teorema Riemann-Roch ([7], p. 26, 27; [14], p. 247; [32], p. 176; [38], p. 10—5).

Numim *divizor* un lanţ

$$\delta = \sum_{j=1}^{N} n_j a_j$$

cu $a_j \in R$ şi $n_j \in Z$ (i.e. funcţie pe R cu valori întregi, care asociază valoarea 0 tuturor punctelor din R, exceptînd cel mult un număr finit) pe care îl notăm aditiv. Numim *ordinul* divizorului δ, numărul

$$\text{ord } \delta = \sum_{j=1}^{N} n_j .$$

Divizorii formează grup comutativ faţă de operaţia de sumare, definită ca suma celor două funcţii corespunzătoare: Fie $\delta_k = \sum_{j=1}^{N_k} n_j^k a_j^k$, $(k = 1, 2)$, doi divizori şi a_j, $(j = 1, \ldots, N)$, punctele distincte din mulţimea $\{a_j^1\}_{j=1}^{N_1} \cup \{a_j^2\}_{j=1}^{N_2}$; dacă δ_k asociază lui a_j numărul întreg n_{kj}, atunci $\delta_1 + \delta_2 = \sum_{j=1}^{N} (n_{1j} + n_{2j}) a_j$.

Fiecărei diferenţiale meromorfe $\alpha(z)\,dz$ (respectiv funcţii meromorfe $f(z)$) pe R îi vom asocia un divizor $\delta_{\alpha\,dz}$ (respectiv δ_f) definit în modul următor: Dacă a_j sînt zerourile şi polii diferenţialei $\alpha\,dz$ (funcţiei f) cu ordinul de multiplicitate n_j (> 0 pentru zerouri şi < 0 pentru poli), atunci

$$\delta_{\alpha\,dz} \text{ (respectiv } \delta_f) = \sum_j n_j a_j .$$

Spunem că divizorul $\delta_1 = \sum_{j=1}^{N_1} n_j^1 a_j^1$ este multiplu al divizorului $\delta_2 = \sum_{j=1}^{N_2} n_j^2 a_j^2$, dacă

$$\delta_1 - \delta_2 = \sum_{j=1}^{N} m_j a_j$$

cu $m_j \geqslant 0$. Divizorul nul este multiplu al oricărui divizor. O diferenţială $\alpha\,dz$ (o funcţie f) este multiplu al divizorului δ, dacă $\delta_{\alpha\,dz}$ (respectiv δ_f) este multiplu al lui δ.

Se demonstrează următoarele propoziţii:

TEOREMA RIEMANN-ROCH. *Fie δ un divizor pe R de ordin m, A numărul maxim al funcţiilor meromorfe pe R, multiple ale divizorului* $-\delta$,

care sînt liniar independente relativ la C și B numărul maxim al diferențialelor meromorfe pe R, multiple ale divizorului δ, care sînt liniar independente relativ la C; atunci

$$A = B + m + 1 - g.$$

PROPOZIȚIA 4.1. [4]) *Oricare ar fi funcția f meromorfă pe R,*

$$\operatorname{ord} \delta_f = 0.$$

PROPOZIȚIA 4.2. [4]) *Oricare ar fi diferențiala meromorfă $\alpha\,dz$ pe R,*

$$\operatorname{ord} \delta_{\alpha\,dz} = 2g - 2.$$

PROPOZIȚIA 4.3. *Dacă o funcție f este multiplul unui divizor δ cu coeficienți $\geqslant 0$, atunci $f \equiv 0$ (fiind olomorfă). Dacă o diferențială αdz este multiplu unui divizor δ cu* ord $\delta > 2g - 2$, *atunci* $\alpha\,dz \equiv 0$.

Să demonstrăm acum teorema 4.2 :

Fie $\omega(z)\,dz$ o diferențială abeliană de specia întîi (i.e. o diferențială pentru care $\omega(z)$ este funcție olomorfă de parametrul local z, [40], Cap. VIII și II). Oricare ar fi diferențiala pătratică regulată $\Phi(z)\,dz^2$, îi putem asocia biunivoc funcția meromorfă

$$F(z) = \frac{\Phi(z)\,dz^2}{[\omega(z)\,dz]^2},$$

ai cărei poli sînt acele zerouri ale lui $\omega(z)\,dz$, în care $\Phi(z)\,dz^2$ are un ordin mai mic decît $[\omega(z)\,dz]^2$.

Să notăm $\delta = \delta_{\omega\,dz}$. Atunci F este un multiplu de -2δ. În virtutea corespondenței $\Phi(z)\,dz^2 \to F(z)$, pe care am stabilit-o mai sus, numărul maxim de diferențiale pătratice regulate $\Phi(z)\,dz^2$, liniar independente relativ la C, este egal cu numărul maxim A de funcții meromorfe, multiple ale divizorului -2δ. Cum $m = \operatorname{ord} 2\delta = 4g - 4 > 2g - 2$ (în ipoteza $g > 1$), unica diferențială meromorfă, multiplu de 2δ, este diferențiala nulă, deci $B = 0$. Prin urmare, teorema Riemann-Roch ne dă

$$A = 3g - 3$$

și teorema este demonstrată.

[4]) A se vedea și [40], Cap. VIII, nr. 12, p. 252.

Capitolul V

Teoreme fundamentale

§ 1. Mulțimi normate de translații neeuclidiene

1. În acest capitol, exceptînd § 5.2, vom considera *suprafețe riemanniene compacte de gen $g>1$.* Fie R și R' două astfel de suprafețe și să fixăm suprafața riemanniană canonică (R, α), (Cap. III, § 6). Am arătat că fiecare clasă de omotopie a unui omeomorfism surjectiv $f: R \to R'$ determină biunivoc suprafața canonică $(R', f(\alpha))$, (consecința 6.1, din Cap. III).

Vom asocia acum fiecărei suprafețe riemanniene canonice de gen $g>1$, $6g-6$ numere reale, pe care le vom numi *module*, deci un punct din E_{6g-6}. Pentru aceasta vom transpune noțiunea de suprafață riemanniană canonică — pe baza izomorfismului $\Lambda_{G,\hat{p}}$ (Cap. I, § 4, pct. 2) și a unei anumite normări — în cadrul grupului G al transformărilor acoperirii universale. Astfel, în locul unui sistem canonic de generatori pentru $\pi_1(R, p)$, vom folosi o *mulțime normată de generatori pentru G*:

O mulțime de translații neeuclidiene $(A_1, \ldots, A_{2g})$, $g>1$, se numește *normată*, dacă

1) Grupul G generat de ea este un grup Fuchs cu domeniul fundamental închis compact în U, (Cap. II, § 3, pct. 3).

2) Singura relație între acești generatori ai lui G este: [1])

$$\prod_{j=1}^{g} A_{2j} A_{2j-1}^{-1} A_{2j}^{-1} A_{2j-1} = 1. \tag{1.1}$$

3) Fie σ_k și τ_k punctele de respingere respectiv atragere ale transformării A_k, $(k = 1, \ldots, 2g)$, care se va scrie

$$\frac{Z - \sigma_k}{Z - \tau_k} = \lambda_k \frac{z - \sigma_k}{z - \tau_k}, \qquad \lambda_k > 1. \tag{1.2}$$

Cerem ca $\sigma_{2g} = 0$, $\tau_{2g} = \infty$, iar $|\ \sigma_{2g-1}\ \tau_{2g-1}\ | = 1$ și notăm $\lambda_{2g} = \lambda$.

[1]) S-a notat compunerea transformărilor sub formă de produs.

TEOREMA 1.1. *Orice mulțime de translații neeuclidiene cu proprietățile 1) și 2) (în particular orice mulțime normată de generatori) determină univoc o suprafață riemanniană canonică.*

Fie $(A_1, \ldots, A_{2g})$ o mulțime de translații neeuclidiene cu proprietățile 1) și 2), G grupul Fuchs generat de ea și $R = U/G$ suprafața riemanniană corespunzătoare, care este închisă și de gen g (Cap. III, proprietățile 3.1, 4.2 și consecința 4.2). Prin izomorfismul $\Lambda_{G,\hat{p}} : G \to \pi_1(R, p)$, $\hat{p} \in \hat{R} = U$, $p = \Pi_G(\hat{p})$, i se asociază lui R sistemul canonic de generatori $a = (a_1, \ldots a_{2g})$ cu $a_j = \Lambda_{G,\hat{p}}(A_j)$. Schimbarea punctului $\hat{p}$ cu un alt punct $\hat{q} \in U$, conduce la un sistem canonic $b = (b_1, \ldots, b_{2g})$ cu $b_j = \Lambda_{G,\hat{q}}(A_j)$. Sistemele a și b sînt echivalente, deoarece diagrama

$$\begin{array}{ccc} & G \xrightarrow{1_G} G & \\ \Lambda_{G\,\hat{p}} & \downarrow \qquad \downarrow & \Lambda_{G,\hat{q}}\,, \\ \pi_1(R,p) & \xrightarrow{\omega} & \pi_1(R,q) \end{array}$$

cu $q = \Pi_G(\hat{q})$ și $\omega = \Lambda_{G,\hat{q}} \circ \Lambda_{G,\hat{p}}^{-1}$, este comutativă și ω este izomorfism permis, conform propoziției 4.1, Cap. I, iar $\omega(a) = b$. În acest mod, mulțimea dată de translații neeuclidiene determină univoc suprafața riemanniană canonică (R, α), unde α este clasa sistemului canonic a de generatori ai lui $\pi_1(R, p)$. Vom spune că *mulțimea de generatori* $(A_1, \ldots, A_{2g})$ ai lui G (cu proprietățile 1) și 2)) *definește suprafața riemanniană canonică* (R, α).

PROPOZIȚIA **1.1.** *Fie* $(A_1, \ldots, A_{2g})$ *și* $(A_1', \ldots, A_{2g}')$ *două mulțimi de generatori ai grupurilor Fuchs* G *respectiv* G' *cu proprietățile 1) și 2). Să notăm cu* (R, α) *și* (R', α') *suprafețele riemanniene canonice definite de ele după teorema 1.1.*

1°. Conform teoremei 6.2 din Cap. III, *există o reprezentare* $f : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$. *Atunci există un omeomorfism surjectiv* $w : U \to U$, *care induce* f *și satisface relațiile*:

$$w \circ A_j \circ w^{-1} = A_j', \qquad j = 1, \ldots, 2g. \tag{1.3}$$

2°. *Presupunînd că* (R, α) *și* (R', α') *au aceeași orientare, după teorema 3.2 din Cap. IV, există o reprezentare cvasiconformă,* $f : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$, *care determină pe* U *un coeficient Beltrami* μ, *compatibil cu* G, conform teoremei 2.1 și propozițiilor 3.2 și 3.2′ din același capitol. Din propoziția 2.1 a Cap. IV, rezultă că R' este conform echivalentă cu R^μ și, identificînd R' cu R^μ, f coincide cu f^μ. *Există o reprezentare cvasiconformă surjectivă* $w : U \to U$, *care induce* f, *are coeficientul Beltrami* μ *și satisface relațiile (1.3).*

1°. Teorema 5.1 din Cap. I arată că există omeomorfismul $\hat{f} : U \to U$, care induce f. Acest omeomorfism este compatibil cu G, deoarece, după relația (5.2′) din Cap. I, $\hat{f} G \hat{f}^{-1} = G'$. Notînd cu

$$A_j^* = \chi_{\hat{f}}(A_j) = \hat{f} \circ A_j \circ \hat{f}^{-1},$$

corespondența $A_j^* \to A_j'$ determină un automorfism λ al lui G'. Fie: $\hat{p} \in U$, $p = \Pi_G(\hat{p})$ și $\hat{p}' = \hat{f}(\hat{p})$; $a_j = \Lambda_{G,\hat{p}}(A_j)$, $f_p(a_j) = \Lambda_{G',\hat{p}'}(A_j^*)$ (după relația (5.3') din Cap. I) și $a_j' = \Lambda_{G',\hat{p}'}(A_j')$; α, $f(\alpha)$ și α' sistemele canonice formate de a_j, $f_p(a_j)$ și a_j' respectiv. Cum $\alpha' = f(\alpha)$, există un omeomorfism permis ω pentru care $\omega[f_p(a_j)] = a_j'$, iar propoziția 4.1 din Cap. I arată că λ este automorfism interior. Prin urmare, există $A' \in G'$, astfel încît $A_j' = A' \circ A_j^* \circ A'^{-1}$ și $w = A' \circ \hat{f}$, după teorema 5.1, 1° și relația (5.4) din Cap. I.

2°. Dacă (R, α) și (R', α') au aceeași orientare, iar f este reprezentare cvasiconformă, propoziția 3.1. Cap. IV arată că $\hat{f}$, deci și w, este reprezentare cvasiconformă cu coeficientul Beltrami μ.

PROPOZIȚIA 1.2. *Fie* $(A_1, \ldots, A_{2g})$ *și* $(A_1', \ldots, A_{2g}')$ *două mulțimi de generatori ai grupurilor Fuchs* G *respectiv* G' *cu proprietățile 1) și 2), care definesc, după teorema 1.1, suprafețele riemanniene canonice* (R, α) *și* (R', α'). *Dacă există un omeomorfism surjectiv (cvasiconform respectiv conform)* $\hat{f} : U \to U$, *astfel încît*

$$A_j' = \hat{f} \circ A_j \circ \hat{f}^{-1}, \qquad (j = 1, \ldots, 2g), \tag{1.4}$$

atunci $\hat{f}$ *induce reprezentarea (cvasiconformă respectiv conformă)* $f : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$.

Într-adevăr, $\hat{f}$ este compatibil cu grupul G, deoarece $\hat{f} G \hat{f}^{-1} = G'$, deci după propoziția 5.3 din Cap. I, el induce un omeomorfism surjectiv $f : R \to R'$. Pe de altă parte, avem în clasa α sistemul canonic a format de $a_j = \Lambda_{G,\hat{p}}(A_j)$, unde $\hat{p} \in U$, și în clasa α' sistemul canonic a' format de $a_j' = \Lambda_{G',\hat{f}(\hat{p})}(A'_j)$. Pentru a demonstra că $f(\alpha) = \alpha'$, să notăm $p = \Pi_G(\hat{p})$ și să verificăm că $f_p(a)$ și a' sînt echivalente. Dar, conform teoremei 5.2, 3° din Cap. I, $\hat{f}$ induce și izomorfismul χ_f, care este dat de

$$\chi_f(T) = \hat{f} \circ T \circ \hat{f}^{-1}$$

pentru orice $T \in G$, în timp ce, după relația (5.3') din același capitol,

$$f_p = \Lambda_{G',\hat{f}(\hat{p})} \circ \chi_f \circ \Lambda_{G,\hat{p}}^{-1}.$$

Printr-un calcul imediat deducem că $f_p(a) = a'$.[2])

TEOREMA 1.2. *Orice suprafață riemanniană* (R, α) *de gen* $g > 1$ *este definită de o mulțime normată de translații neeuclidiene unic determinată.*

Identificînd suprafețele riemanniene conform echivalente, știm că R se poate scrie sub forma $R = U/G'$, unde G' este un grup Fuchs, unic determinat pînă la un automorfism interior al lui H (Cap. II, § 2, pct. 2 și Cap. III, § 6, pct. 4).

---

[2]) Teorema 1.1 și propozițiile 1.1 și 1.2 sînt adevărate și pentru suprafețe riemanniene canonice de gen 1.

Fie $\hat{p} \in U$, $p = \Pi_{G'}(\hat{p})$, $a = (a_1, \ldots, a_{2g}) \in \alpha$ cu $a_j \in \pi_1$ (R, p) și $A'_j = \Lambda^{-1}_{G,\hat{p}}(a_j)$. Transformările A'_j sînt translații neeuclidiene, ca orice transformare din G', generează G' și satisfac condițiile 1) și 2) din definiția unei mulțimi normate de generatori ai lui G'. După teorema 1.1, ele definesc suprafața riemanniană canonică (R, α).

În locul grupului G' putem lua însă orice alt grup $\widetilde{G} = \hat{f} G' \hat{f}^{-1}$, cu $\hat{f} \in H$. Translațiile neeuclidiene $\widetilde{A}_j = \hat{f} \circ A'_j \circ \hat{f}^{-1}$ generează $\widetilde{G}$, au proprietățile 1) și 2) și definesc suprafața canonică $(\widetilde{R}, \widetilde{\alpha})$, unde $\widetilde{R} = U/\widetilde{G}$ este conform echivalentă cu R (propoziția 6.2, din Cap. III). După propoziția 1.2, $\hat{f}$ induce reprezentarea conformă $f: (R, \alpha) \to (\widetilde{R}, \widetilde{\alpha})$, deci putem scrie, aplicînd convenția din Cap. III, § 6, pct. 4, egalitatea $(R, \alpha) = (\widetilde{R}, \widetilde{\alpha})$. Am asociat astfel suprafeței canonice (R, α) familia $\{\hat{f} \circ A'_i \circ \hat{f}^{-1}\}_{\hat{f} \in H}$ de mulțimi de generatori, care o definesc după teorema 1.1.

Vom arăta că există o unică mulțime normată în această familie. Să notăm cu σ'_j și τ'_j punctele duble (de respingere respectiv atragere) ale lui A'_j. Conform propoziției 3.13 din Cap. II, σ'_{2g-1}, τ'_{2g-1}, σ'_{2g} și τ'_{2g} sînt patru puncte distincte. Putem determina univoc transformarea liniară $\hat{f} \in H$ prin condițiile

$$\hat{f}(\sigma'_{2g}) = 0, \quad \hat{f}(\tau'_{2g}) = \infty \text{ și } |\hat{f}(\sigma'_{2g-1})\, \hat{f}(\tau'_{2g-1})| = 1. \tag{1.5}$$

Mulțimea de translații neeuclidiene corespunzătoare $A_j = \hat{f} \circ A'_j \circ \hat{f}^{-1}$, cu puncte de respingere respectiv atragere $\hat{f}(\sigma'_j)$ și $\hat{f}(\tau'_j)$, care generează $G = \hat{f} G' \hat{f}^{-1}$, este normată și, ca oricare mulțime a familiei considerate, definește (R, α). Vom asocia suprafeței canonice (R, α) această mulțime normată $(A_1, \ldots, A_{2g})$.

În concluzie, teoremele 1.1 și 1.2 stabilesc o corespondență biunivocă între mulțimile normate de translații neeuclidiene și suprafețele riemanniene canonice. Vom nota cu $\mathbf{A}$ aplicația, dată în demonstrația teoremei 1.2, care asociază fiecărei suprafețe canonice (R, α) de gen $g>1$ o mulțime normată $(A_1, \ldots, A_{2g})$. Prin urmare $\mathbf{A}[(R, \alpha)] = (A_1, \ldots, A_{2g})$, unde $A_j = \hat{f} \circ A'_j \circ \hat{f}^{-1}$ cu $A'_j = \Lambda^{-1}_{G,\hat{p}}(a_j)$ (pentru $R = U/G$, $\hat{p} \in U$, $p = \Pi_G(\hat{p})$, $a_j \in \pi_1(R, p)$ și $(a_1, \ldots, a_{2g}) \in \alpha$) și cu $\hat{f} \in H$ determinat de condițiile (1.5). Invers, $\mathbf{A}^{-1}[(A_1, \ldots, A_{2g})] = (R, \alpha)$, unde $R = U/G$ și α e clasa sistemului canonic $(a_1, \ldots, a_{2g})$ cu $a_j = \Lambda_{G,\hat{p}}(A_j)$ (pentru $\hat{p} \in U$). Observăm că $\mathbf{A}^{-1}$ este definit și pentru mulțimi $(A_1, \ldots, A_{2g})$, care satisfac numai proprietățile 1) și 2). Din propoziția 1.2 rezultă acum imediat

Consecința 1.1. Fie (R, α) o suprafață riemanniană canonică de gen $g>1$, $R = U/G$ și $\hat{f}$ un omeomorfism surjectiv (cvasiconform respectiv conform): $U \to U$, compatibil cu G. Notînd $\mathbf{A}[(R, \alpha)] = (A_1, \ldots, A_{2g})$, $A'_j = \hat{f} \circ A_j \circ \hat{f}^{-1}$, $G' = \hat{f} G \hat{f}^{-1}$ și $\mathbf{A}^{-1}[(A'_1, \ldots, A'_{2g})] = (R', \alpha')$, omeomorfismul $\hat{f}$ induce reprezentarea (cvasiconformă respectiv conformă) $f: (R, \alpha) \to (R', \alpha')$.

2. Vom asocia acum fiecărei mulțimi normate de translații neeuclidiene $(A_1, \ldots, A_{2g})$ punctul ξ din E_{6g-6} de coordonate $\sigma_1, \tau_1, \lambda_1, \ldots \ldots \sigma_{2g-2}, \tau_{2g-2}, \lambda_{2g-2}$, unde σ_k, τ_k și λ_k sînt punctul de respingere, punctul de atragere respectiv invariantul transformării A_k. Numerele $\sigma_1, \ldots, \lambda_{2g-2}$ se numesc *coordonatele* mulțimi normate $(A_1, \ldots, A_{2g})$, iar ξ *punctul* ei *reprezentativ*. Să notăm cu **B** aplicația, care face să corespundă fiecărei mulțimi normate $(A_1, \ldots, A_{2g})$ punctul reprezentativ ξ.

TEOREMA 1.3. *Aplicația* **B** *este injectivă.* (Orice mulțime normată de translații neeuclidiene este unic determinată prin coordonatele ei).

Pentru a demonstra teorema 1.3, să stabilim mai întîi

PROPOZIȚIA 1.3. *Dacă* $(A_1, \ldots, A_{2g})$ *este o mulțime normată de translații neeuclidiene, atunci*

$$\sigma_{2g-1}\, \tau_{2g-1} = -1. \tag{1.6}$$

Fie $A_1^0, \ldots, A_{2g}^0$ mulțimea de translații neeuclidiene corespunzătoare unui poligon neeuclidian regulat P^0 cu suma unghiurilor 2π, pe care l-am studiat în Cap. II, § 3, pct. 9. Folosind propoziția 3.15, vom arăta punctele duble σ_{2g-1}^0, τ_{2g-1}^0 separă perechea σ_{2g}^0, τ_{2g}^0.

Prin calcul direct bazat pe aplicarea izomorfismului $\Lambda_{G,z}$, se verifică imediat relațiile valabile în general între transformările fundamentale $\mathfrak{T}_j$, care generează grupul Fuchs al unui poligon P de forma normală (3.11′) din Cap. II și transformările $A_j = \Lambda_{G,z}^{-1}(a_j)$, unde z este un punct din preimaginea în U a vîrfurilor lui P (i.e. a punctului din U/G corespunzător vîrfurilor lui P). Se obține astfel:

$$A_2 = \mathfrak{T}_2^{-1} \circ \mathfrak{T}_1 \circ \mathfrak{T}_2, \qquad A_1 = \mathfrak{T}_2^{-1} \circ \mathfrak{T}_1^{-1} \circ \mathfrak{T}_2^{-1} \circ \mathfrak{T}_1 \circ \mathfrak{T}_2,$$

și, în general,

$$A_{2j+2} = \mathcal{T}_j^{-1} \circ \mathfrak{T}_{2j+2}^{-1} \circ \mathfrak{T}_{2j+1}^{-1} \circ \mathfrak{T}_{2j+2} \circ \mathcal{T}_j,$$

$$A_{2j+1} = \mathcal{T}_j^{-1} \circ \mathfrak{T}_{2j+2}^{-1} \circ \mathfrak{T}_{2j+1}^{-1} \circ \mathfrak{T}_{2j+2}^{-1} \circ \mathfrak{T}_{2j+1} \circ \mathfrak{T}_{2j+2} \circ \mathcal{T}_j, \tag{1.7}$$

unde, notînd compunerea ca produs,

$$\mathcal{T}_j = \prod_{h=1}^{j} \mathfrak{T}_{2h-1}^{-1} \mathfrak{T}_{2h}^{-1} \mathfrak{T}_{2h-1} \mathfrak{T}_{2h} = \prod_{h=1}^{j} A_{2h} A_{2h-1}^{-1} A_{2h}^{-1} A_{2h-1}{}^{3)}. \tag{1.8}$$

În cazul poligonului regulat P^0, vom însemna toate elementele ce intervin cu indicele superior 0. Am văzut că s_j^0 și t_j^0 fiind punctele duble ale transformării $\mathfrak{T}_j^0$, punctele s_{2j+2}^0, t_{2j+2}^0 separă s_{2j+1}^0, t_{2j+1}^0. Transformarea $(\mathfrak{T}_{2j+1}^0)^{-1} \circ (\mathfrak{T}_{2j+2}^0)^{-1} \circ \mathfrak{T}_{2j+1}^0$ are ca puncte duble $(\mathfrak{T}_{2j+1}^0)^{-1}(s_{2j+2}^0)$ și $(\mathfrak{T}_{2j+1}^0)^{-1}(t_{2j+2}^0)$, care separă din nou s_{2j+1}^0, t_{2j+1}^0. Dar punctele σ_{2j+1}^0, τ_{2j+1}^0 și σ_{2j+2}^0, τ_{2j+2}^0 se obțin din s_{2j+1}^0, t_{2j+1}^0 respectiv $(\mathfrak{T}_{2j+1}^0)^{-1}(s_{2j+2}^0)$ și $(\mathfrak{T}_{2j+1}^0)^{-1}(t_{2j+2}^0)$

---

3) Pentru $j = g$, relația (1.8) arată echivalența între (3.12), din Cap. II și (1.1).

prin aplicarea transformării $(\mathcal{S}^0_{2j+2} \circ \mathcal{C}^0_j)^{-1}$, deci perechile σ^0_{2j+1}, τ^0_{2j+1} şi σ^0_{2j+2}, τ^0_{2j+2} se impietează.

Să notăm cu $(R^0, \alpha^0) = \mathbf{A}^{-1}[(A^0_1, \ldots, A^0_{2g})]$ şi cu $(R, \alpha) = \mathbf{A}^{-1}[(A_1, \ldots, A_{2g})]$. Aplicînd propoziţia 1.1. 1°, există omeomorfismul surjectiv $w : U \to U$, pentru care $w \circ A^0_j \circ w^{-1} = A_j$.

Deoarece $\sigma_j = w(\sigma^0_j)$ şi $\tau_j = w(\tau^0_j)$, rezultă că σ_{2j+1}, τ_{2j+1} separă σ_{2j+2}, τ_{2j+2}; în particular, σ_{2g-1}, τ_{2g-1} separă $\sigma_{2g} = 0$, $\tau_{2g} = \infty$, deci că are loc relaţia (1.6).

Să reluăm demonstraţia teoremei 1.3.

Date coordonatele unei mulţimi normate, transformările $A_1, \ldots, A_{2g-2}$ sînt unic determinate, A_{2g-1} se poate scrie sub forma

$$Z = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \delta}$$

cu α, β, δ numere reale, $\beta > 0$ şi

$$\alpha\delta - \beta^2 = 1, \tag{1.9}$$

(unde $\mu\alpha = \lambda_{2g-1}\tau_{2g-1} - \sigma_{2g-1}$, $\mu\beta = \lambda_{2g-1} - 1$, $\mu\delta = \tau_{2g-1} - \lambda_{2g-1}\sigma_{2g-1}$, $\mu > 0$, $\mu^2 = \lambda_{2g-1}(\sigma_{2g-1} - \tau_{2g-1})^2$), iar A_{2g} este

$$Z = \lambda z$$

cu $\lambda = \lambda_{2g} > 1$. Relaţia (1.1) ne dă atunci condiţia

$$A_{2g} \circ A^{-1}_{2g-1} \circ A^{-1}_{2g} \circ A_{2g-1} = B, \tag{1.10}$$

unde B este o transformare liniară cunoscută. Prin calcul deducem că $A_{2g} \circ A^{-1}_{2g-1} \circ A^{-1}_{2g} \circ A_{2g-1}$ este transformarea

$$Z = \frac{(\alpha\delta - \lambda\beta^2)z + \delta\beta(1-\lambda)}{\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\alpha\beta z + \left(\alpha\delta - \frac{\beta^2}{\lambda}\right)},$$

cu determinantul corespunzător 1. Luînd B sub forma normată

$$Z = \frac{az + b}{cz + d}$$

cu a, b, c, d reali, $ad - bc = 1$ şi $d > 0$, obţinem din (1.10) relaţiile

$$\begin{aligned} \alpha\delta - \lambda\beta^2 &= \eta a \\ \delta\beta(1-\lambda) &= \eta b \\ \alpha\beta\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) &= \eta c \\ \alpha\delta - \frac{\beta^2}{\lambda} &= \eta d \end{aligned} \tag{1.11}$$

cu $\eta^2 = 1$. Mai mult, cum am luat $d > 0$, ultima egalitate (1.11), relaţia

(1.9) și inegalitatea $\lambda>1$ arată că $\eta = 1$ și $d>1$. Prima și ultima egalitate (1.11) împreună cu (1.9) ne dau

$$\lambda = \frac{1-a}{d-1} \text{ și } \beta^2 = \frac{(1-a)(d-1)}{2-(a+d)}.$$

Folosind din nou inegalitatea $\lambda > 1$, deducem $a<1$ și $a+d<2$. Prin urmare

$$\beta = \sqrt{\frac{(1-a)(d-1)}{2-(a+d)}}, \quad \alpha = c\sqrt{\frac{1-a}{(d-1)[2-(a+d)]}} \text{ și}$$

$$\delta = -b\sqrt{\frac{d-1}{(1-a)[2-(a+d)]}}$$

cu determinarea pozitivă a radicalilor, deoarece $\beta>0$.

3. După rezultatele stabilite la punctele 1 și 2, vom defini aplicația injectivă $\mathbf{C} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$, prin care se asociază fiecărei suprafețe riemanniene canonice (R, α) de gen $g>1$ punctul reprezentativ ξ din E_{6g-6} al mulțimii normate de translații $\mathbf{A}[(R, \alpha)]$. Vom numi ξ *punct reprezentativ* al lui (R, α) și sistemul celor $6g-6$ coordonate ale sale: $\sigma_1, \ldots, \ldots, \lambda_{2g-2}$ *modulele* lui (R, α).

§ 2. Metrica indusă de o diferențială pătratică[4]

1. Fie R o suprafață riemanniană compactă de gen $g>1$, $(\hat{R} = U, \Pi_G, R)$ acoperirea ei universală, $R = U/G$, și $\Phi(z)\,dz^2$ o diferențială pătratică regulată pe R (Cap. IV, § 4). Această diferențială induce pe R o metrică în modul următor. Definim elementul de arc pe R prin

$$ds_\Phi = |\Phi(z)|^{1/2}|dz| \tag{2.1}$$

și deci elementul de arie

$$dA_\Phi = |\Phi(z)|\,dx\,dy. \tag{2.2}$$

Deoarece $\Phi(z)\,dz^2$ este o diferențială pătratică, ds_Φ și dA_Φ nu depind de parametrul local z considerat. Fiecărui drum continuu rectificabil α din R i se poate asocia astfel

$$|\alpha|_\Phi = \int_\alpha ds_\Phi, \tag{2.3}$$

lungimea sa în metrica indusă de $\Phi(z)\,dz^2$. Vom numi aceste drumuri prescurtat *arce*.

[4] În redactarea acestui paragraf am folosit o expunere a colegului meu dr. C. Teleman, căruia îi exprim cele mai sincere mulțumiri.

Dacă p este un punct din R, în care Φ nu se anulează, metrica definită de (2.1) este local euclidiană, deoarece în parametrul natural ζ, (formula (4.4), Cap. IV),

$$ds_\Phi = |\, d\zeta \,| .$$

Pentru un arc α situat în vecinătatea lui p, în care ζ este parametru local,

$$|\, \alpha \,|_\Phi = \int_{\alpha'} |\, d\zeta \,| \tag{2.4}$$

unde α' este imaginea lui α în planul ζ. Zerourile diferențialei $\Phi(z)\, dz^2$ sînt puncte singulare. Dacă ζ este parametrul natural corespunzător unui zero p de ordinul m al lui $\Phi(z)\, dz^2$, (formula (4.3), Cap. IV) și dacă prin transformarea $\zeta^{\frac{m+2}{2}} = \tilde{\zeta}$, arcul α situat în vecinătatea parametrică corespunzătoare lui ζ, se transformă într-un arc $\tilde{\alpha}$, atunci

$$|\, \alpha \,|_\Phi = \int_{\tilde{\alpha}} |\, d\tilde{\zeta} \,|. \tag{2.4'}$$

2. Fiind date două puncte p și q din R, vom nota

$$d_\Phi(p, q) = \inf |\, \alpha \,|_\Phi , \tag{2.5}$$

marginea inferioară fiind luată în raport cu toate arcele α din R de extremități p, q și vom numi $d_\Phi(p, q)$ *distanța dintre* p *și* q *în metrica indusă pe* R *de* $\Phi(z)\, dz^2$. Se verifică ușor că $d_\Phi(p, q)$ are proprietățile unei distanțe:

1° Evident, $d_\Phi(p, q) = d_\Phi(q, p)$.

2° Dacă p, q și r sînt trei puncte din R, pentru arce arbitrare γ_1 și γ_2, care unesc p cu q respectiv q cu r, putem scrie $d_\Phi(p, r) \leqslant |\, \gamma_1 \,|_\Phi + |\, \gamma_2 \,|_\Phi$, de unde $d_\Phi(p, r) \leqslant d_\Phi(p, q) + d_\Phi(q, r)$.

3° Fie p și q două puncte diferite din R, ζ parametrul natural asociat lui p și Δ un domeniu jordanian pe R, care corespunde unui cerc γ cu centrul 0 din planul ζ, și astfel încît q să fie exterior lui Δ. Atunci $d_\Phi(p, q) \geqslant \rho$ raza lui γ, prin urmare $d_\Phi(p, q) > 0$.

Distanța $d_\Phi(p, q)$ organizează R ca *spațiu metric*, topologia în care vecinătățile unui punct $p \in R$ se definesc ca mulțimile de puncte q cu $d_\Phi(p, q) < \varepsilon$, pentru un număr $\varepsilon > 0$, coincizînd cu topologia inițială. Deoarece R este compact, spațiul metric R este *complet*.

3. Un arc γ definit de aplicația $f : I \to R$ se numește *arc de geodezică*, dacă există un număr $\varepsilon > 0$, astfel încît oricare ar fi arcul γ^*, definit de $f^* : I \to R$, pentru care $f^*(0) = f(0)$, $f^*(1) = f(1)$ și $d_\Phi[f^*(t), f(t)] < \varepsilon$ să avem

$$|\, \gamma^* \,|_\Phi \leqslant |\, \gamma \,|_\Phi . \tag{2.6}$$

PROPOZIȚIA 2.1. *Un arc de geodezică este caracterizat prin proprietatea că*

$$\arg \Phi(z)\,dz^2 = \text{const.} \tag{2.7}$$

în lungul lui. Un arc de geodezică, care trece printr-un zero de ordinul m, are în acel punct un vîrf formînd un unghi $\geqslant \frac{2\pi}{m+2}$.

Propoziția 2.1 rezultă folosind parametrul natural ζ respectiv $\tilde{\zeta}$. Un arc de geodezică γ, situat într-o vecinătate parametrică corespunzătoare lui ζ (în care lungimile se calculează după formulele (2.4), respectiv (2.4')), se transformă într-un segment de dreaptă în planul ζ respectiv $\tilde{\zeta}$. În cazul $m>0$, unui segment prin $\tilde{\zeta} = 0$ îi corespunde în planul ζ un arc din două segmente formînd în $\zeta = 0$ un unghi $\geqslant \frac{2\pi}{m+2}$. În concluzie, în vecinătatea oricărui punct al său, pe un arc de geodezică avem $\arg \Phi(z)\,dz^2 = \text{const.}$, [5]) deci aceeași relație are loc pe întreg arcul.

Consecința 2.1. Un arc de geodezică se poate prelungi indefinit, pînă la o lungime arbitrară, iar prelungirea nu este univocă, dacă geodezica trece printr-un zero al diferențialei $\Phi(z)\,dz^2$.

Pentru a stabili că un arc de geodezică se prelungește pînă la o lungime oricît de mare, să observăm că pentru fiecare punct $p \in R$ există o vecinătate aplicată conform de reprezentarea parametrică corespunzătoare parametrului natural ζ pe cercul $|\zeta| < r$, unde r depinde evident de p. Să notăm cu v_p preimaginea cercului $|\zeta| < \frac{r}{2}$. Cu un număr finit de domenii v_{p_j}, $(j = 1, \ldots, N)$, acoperim R. Fie m_j ordinul lui $\Phi(z)\,dz^2$ în punctul p_j, r_j numărul r corespunzător lui p_j, iar $\rho < \min_{j=1,\ldots,N} r_j^{\frac{m_j+2}{2}}$. Orice arc de geodezică plecînd dintr-un punct $q \in R$ se prelungește cu o lungime $\geqslant \rho$.

4. Prin aplicația Π_G corespunzătoare acoperirii (U, Π_G, R), o diferențială pătratică regulată pe R, determină o diferențială pătratică regulată pe U (Cap. IV, § 4, pct. 2). Luînd pe R ca parametru local variabila $z \in U$, vom nota în același mod $\Phi(z)\,dz^2$, diferențiala pătratică pe R și pe U. Putem repeta pentru U considerațiile dezvoltate mai sus relativ la R și definim pe U un spațiu metric, în care distanța de la z' la z'' și lungimea unui arc $\hat{\alpha}$ vor fi notate $d_\Phi(z', z'')$ respectiv $|\hat{\alpha}|_\Phi$.

Spațiul metric obținut, deși nu mai este compact, este încă un *spațiu metric complet*. Într-adevăr, fie z_n un șir Cauchy în spațiul metric U și $p_n = \Pi_G(z_n)$. Evident, dacă z' și z'' sînt două puncte din U de proiecții $p' = \Pi_G(z')$ și $p'' = \Pi_G(z'')$, putem scrie

$$d_\Phi(z', z'') \geqslant d_\Phi(p', p''), \tag{2.8}$$

[5]) Atribuim în zerourile diferențialei valoarea argumentului din celelalte puncte ale arcului de geodezică.

fiindcă oricare ar fi arcul $\hat{\alpha} \subset U$, avem

$$|\Pi_G(\hat{\alpha})|_\Phi = |\hat{\alpha}|_\Phi. \tag{2.9}$$

Rezultă că şirul p_n este un şir Cauchy pe R. Deoarece spaţiul metric R este complet, există un punct $p_0 = \lim_{n\to\infty} p_n$ în R. Acoperirea universală fiind neramificată, fără frontieră (Cap. I, § 2, pct. 3), există o vecinătate u_{p_0} astfel încît : 1) fiecărui punct $z_0^\nu \in \Pi_G^{-1}(p_0)$ îi corespunde o vecinătate $\hat{u}^\nu$, reprezentată topologic de $\Pi_G|_{\hat{u}^\nu}$ pe u_{p_0} şi 2) $\Pi_G^{-1}(u_{p_0}) = \bigcup_\nu \hat{u}^\nu$. Pentru $n > N$, N număr natural depinzînd de u_{p_0} şi de un număr $\varepsilon > 0$, suficient de mic, punctele p_n aparţin lui u_{p_0} şi au distanţa la ∂u_{p_0} mai mare decît ε. Totodată, pentru n şi $m > N_0$, N_0 număr natural depinzînd de ε, avem $d_\Phi(z_n, z_m) < \varepsilon$. Fie $n_0 > \max(N, N_0)$ şi $\hat{u}^{\nu_0}$ vecinătatea, care conţine punctul z_{n_0}. Cum $\Pi_G|_{\hat{u}^{\nu_0}}$ este o izometrie, rezultă că $\hat{u}^{\nu_0}$ conţine toate punctele z_n cu $n \geqslant n_0$ şi că şirul z_n converge la punctul $z_0^{\nu_0}$.

Pe U putem să considerăm de asemenea arce de geodezică, iar în lungul unui astfel de arc, argumentul diferenţialei pătratice este constant.

5. Teorema 2.1. *Prin două puncte arbitrare z' şi z'' din U trece un arc de geodezică $\hat{\gamma}$ şi numai unul, iar*

$$|\hat{\gamma}|_\Phi = d_\Phi(z', z''). \tag{2.10}$$

1°. Vom demonstra mai întîi unicitatea arcului de geodezică, [1]. Să presupunem că ar exista două arce de geodezică $\hat{\gamma}_1$ şi $\hat{\gamma}_2$, avînd punctele z' şi z'' ca extremităţi şi formînd împreună o curbă Jordan $\hat{\alpha}$. Fie n numărul zerourilor lui Φ cuprinse în interiorul lui $\hat{\alpha}$, ζ_i zerourile lui Φ pe $\hat{\alpha}$, m_i ordinul de multiplicitate al zeroului ζ_i şi ω_i unghiul format în ζ_i de subarcele din $\hat{\alpha}$ cu extremitatea respectiv cu originea în ζ_i. Din teorema variaţiei argumentului rezultă

$$\int_{\hat{\alpha}} d \arg \Phi = 2\pi n + \sum_i \omega_i m_i.$$

Pe de altă parte,

$$\int_{\hat{\alpha}} d(\arg dz) = 2\pi - \sum_i (\pi - \omega_i),$$

astfel încît, ţinînd seama de relaţia (2.7), avem

$$\sum_i [2\pi - (m_i + 2)\omega_i] = (n + 2)2\pi. \tag{2.11}$$

Cum $n \geqslant 0$, primul membru din (2.11) trebuie să fie $\geqslant 4\pi$. Ar trebui să existe deci cel puţin trei indici i, pentru care $\omega_i < \dfrac{2\pi}{m_i + 2}$. În vîrfurile ζ_i ale lui $\hat{\alpha}$ diferite de punctele z' şi z'', avem însă după

propoziția 2.1, inegalitățile $\omega_i \geqslant \frac{2\pi}{m_i + 2}$ și se ajunge astfel la o contradicție. Deducem de aici că nu există două arce geodezice distincte, avînd aceleași extremități, ([1], IV; [6], p. 136—137).

2°. Pentru a demonstra existența unui arc de geodezică, care unește două puncte z' și z'' arbitrare din U, să considerăm un șir de arce $\hat{\gamma}_\nu$ de origine z' și extremitate z'', cu proprietatea

$$\lim_{\nu \to \infty} |\hat{\gamma}_\nu|_\Phi = d, \tag{2.12}$$

unde notăm $d = d_\Phi(z', z'')$.

Să alegem ca parametru pentru punctul z, care descrie $\hat{\gamma}_\nu$,

$$t = \frac{|\hat{\gamma}_{\nu,z}|_\Phi}{|\hat{\gamma}_\nu|_\Phi},$$

unde $\hat{\gamma}_{\nu,z}$ este arcul din $\hat{\gamma}_\nu$ cu originea z' și extremitatea z și să notăm cu $h_\nu : I \to U$, aplicația $h_\nu(t) = z$, care definește în acest caz arcul $\hat{\gamma}_\nu$. Aplicațiile h_ν sînt egal continue și au imaginile cuprinse într-un compact din U. Teorema lui Ascoli implică existența unui arc $\hat{\gamma}$, dat de o aplicație $h : I \to U$, cu $h(0) = z'$, $h(1) = z''$ și avînd proprietatea următoare: oricare ar fi numărul $\varepsilon > 0$, există numărul natural N, depinzînd de ε, astfel încît $d_\Phi[h_\nu(t), h(t)] < \varepsilon$, dacă $\nu > N$, pentru orice $t \in I$.

Vom arăta că $\hat{\gamma}$ este un arc de geodezică și că $|\hat{\gamma}|_\Phi = d$. Fie $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ o diviziune a lui I, iar δ și ε două numere pozitive. Există un indice ν, astfel încît $||\hat{\gamma}_\nu|_\Phi - d| < \delta$ și $d_\Phi[h_\nu(t), h(t)] < \varepsilon$, oricare ar fi $t \in I$. Folosind inegalitatea triunghiului, putem deci scrie

$$\sum_{j=0}^{n-1} d_\Phi[h(t_j), h(t_{j+1})] \leqslant |\gamma_\nu|_\Phi + 2n\varepsilon.$$

Prin urmare, alegînd $\varepsilon < \frac{\delta}{n}$, obținem

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} d_\Phi[h(t_j), h(t_{j+1})] - d \right| \leqslant \delta + 2n\varepsilon < 3\delta,$$

de unde rezultă că $\hat{\gamma}$ este un arc rectificabil de lungime d. După definiție deducem că $\hat{\gamma}$ este un arc de geodezică [6]).

[6]) Suprafețele R și U sînt înzestrate cu metrici riemanniene în orice domeniu, care nu conține zerouri ale diferențialelor pătratice regulate — notate $\Phi(z)\,dz^2$. Observăm că pentru spații riemanniene, teorema 2.1 se poate deduce dintr-o teoremă a lui Hadamard și Cartan, privind unicitatea geodezicei, care unește două puncte într-un spațiu Riemann complet, simplu conex, avînd curbură negativă și dintr-o teoremă a lui Cartan, relativă la existența geodezicei, care unește două puncte într-un spațiu Riemann complet.

TEOREMA 2.2. *Clasa de omotopie* $[\alpha]_{pq}$ *a unui drum* α *de extremități* p *și* q *fixe în* R, *conține un arc de geodezică* γ, *care realizează minimul* $|\alpha|_\Phi$ *în clasa considerată și este unic.*

1° Fie $\hat{p}$ un punct din $\Pi_G^{-1}(p)$ și $\{\hat{q}_n\} = \Pi_G^{-1}(q)$. După propoziția 2.7 din Cap. I, aplicată pentru subgrupul lui $\pi_1(R, p)$ redus la elementul unitate, deducem că există o corespondență biunivocă între clasele de omotopie $[\alpha]_{pq}$ ale drumurilor ce unesc p cu q și punctele $\hat{q}_n$ și anume clasei $[\alpha]_{pq}$ îi corespunde extremitatea $\hat{q}_n$ a drumului $\hat{\alpha}$, obținut prin ridicarea lui α din punctul $\hat{p}$.

Deoarece aplicația Π_G induce o izometrie pe fiecare domeniu simplu conex din R, se arată ușor că un arc de geodezică de pe U se proiectează prin Π_G într-un arc de geodezică de pe R. Fiecărei perechi $(\hat{p}, \hat{q}_n)$ îi corespunde, după teorema 2.1, un arc de geodezică unic determinat $\hat{\gamma}_n$, cu originea $\hat{p}$ și extremitatea $\hat{q}_n$, deci un arc de geodezică $\Pi_G(\hat{\gamma}_n) = \gamma_n$, cu originea p și extremitatea q, iar $[\gamma_n]_{pq} = [\alpha]_{pq}$. Prin urmare, în $[\alpha]_{pq}$ există un arc de geodezică.

2°. Reciproc, orice arc de geodezică γ, care unește pe R punctele p și q, se ridică din $\hat{p}$ într-un arc de geodezică $\hat{\gamma}$ pe U, care va uni $\hat{p}$ cu unul dintre punctele $\hat{q}_n$. Prin urmare, în fiecare clasă $[\alpha]_{pq}$ există un singur arc de geodezică γ.

3°. Oricare ar fi $\alpha \in [\gamma_n]_{pq}$, avem $|\gamma_n|_\Phi \leqslant |\alpha|_\Phi$: Într-adevăr, ridicînd arcele α și γ_n din punctul $\hat{p}$, formăm arcele $\hat{\alpha}$ și $\hat{\gamma}_n$ cu aceeași extremitate $\hat{q}_n$, (propoziția 2.3 din Cap. I), pentru care $|\hat{\alpha}|_\Phi = |\alpha|_\Phi$ și $|\hat{\gamma}_n|_\Phi = |\gamma_n|_\Phi$. După teorema 2.1, $|\hat{\alpha}|_\Phi \geqslant d_\Phi(\hat{p}, \hat{q}_n) = |\hat{\gamma}_n|_\Phi$, deci se obține că $|\gamma_n|_\Phi \leqslant |\alpha|_\Phi$.

Observația 2.1. Din relația (2.11) rezultă că suma unghiurilor unui triunghi geodezic este $< \pi$, deci că metrica ds_Φ are curbură nepozitivă.

Observația 2.2. Oricare ar fi punctul $a \in U$, $d_\Phi(a, \partial U) = +\infty$, [1].

Să notăm cu $C_\rho(a)$ un cerc neeuclidian din U cu centrul a și raza neeuclidiană ρ și cu δ distanța (în metrica indusă de $\Phi(z)dz^2$) dintre două circumferințe $\partial C_{\rho_0}(a)$ și $\partial C_{\rho_1}(a)$, unde $\rho_0 < \rho_1$, iar ρ_0 este suficient de mare pentru ca $C_{\rho_0}(a)$ să includă un domeniu fundamental din U relativ la G. Oricare ar fi punctul $\zeta \in \partial C_{\rho_1}(a)$, există $\zeta' \in C_{\rho_0}(a)$ și $T \in G$, astfel încît $T(\zeta') = \zeta$. Prin urmare, putem acoperi $\partial C_{\rho_1}(a)$ cu un număr finit de cercuri $T_j[C_{\rho_0}(a)]$, cu $T_j \in G$, $(j = 1, \ldots, N)$. Fie $\rho_2 > \rho_1$ un număr suficient de mare, pentru ca $C_{\rho_2}(a) \supset \bigcup_{j=1}^{N} T_j[C_{\rho_1}(a)]$. Atunci distanța în metrica ds_Φ dintre $\partial C_{\rho_1}(a)$ și $\partial C_{\rho_2}(a)$ este $> \delta$, deoarece $d_\Phi(z', z'') = d_\Phi[T(z'), T(z'')]$ dacă $T \in G$, iar z' și z'' sînt două puncte arbitrare din U. Repetînd procedeul deducem că există cercuri $C_\rho(a)$ cu $d_\Phi[\partial C_\rho(a), \partial C_{\rho_0}(a)]$ oricît de mare, ([1], IV, ; [6], p. 136).

6. Numim arc *orizontal* (*vertical*) pe R sau U, un arc cu geodezică în lungul căruia $\Phi(z)dz^2 > 0$ (respectiv $\Phi(z)dz^2 < 0$) și arc *liber*, un arc de geodezică, care nu trece printr-un zero al lui $\Phi(z)\,dz^2$.

6.1. Fie $c > 0$ și Ω_c mulțimea punctelor $p \in R$, care se pot uni cu un zero al diferențialei $\Phi(z)\,dz^2$ printr-un arc orizontal de lungime $\leqslant c$. Deoarece zerourile lui $\Phi(z)dz^2$ formează o mulțime de puncte izolate și din fiecare zero pleacă un număr finit de arce orizontale, Ω_c este o reuniune finită de arce analitice. Vom nota cu $\Omega_\infty = \bigcup_{c>0} \Omega_c$, care este evident o mulțime de măsură 2-dimensională nulă.

6.2. Pentru fiecare punct $p_0 \in R$, care nu este zero al diferențialei $\Phi(z)dz^2$, pentru $z_0 \in \Pi_G^{-1}(p_0) \subset U$ și pentru două numere pozitive a și b suficient de mici, putem defini domeniul $\Delta(z_0, a, b)$, preimaginea din U a dreptunghiului $\delta(0, a, b) = \{\zeta \mid |\xi| < a, |\eta| < b\}$ prin reprezentarea conformă dată de parametrul natural $\zeta = \int_{z_0}^{z} \Phi^{\frac{1}{2}}(z)\,dz$ și domeniul de pe R: $\Delta(p_0, a, b) = \Pi_G[\Delta(z_0, a, b)]$ astfel încît aplicația $\Pi_G|_{\Delta(z_0,a,b)}$ să fie o bijecție. Pe R, punctul p_0 este mijlocul unui arc vertical liber β de lungime $2b$ și orice punct din β este mijlocul unui arc orizontal liber α de lungime $2a$.

Evident, dacă $p_0 \notin \Omega_c$ și $0 < a < c$, putem găsi un număr $b > 0$, pentru care $\Delta(p_0, a, b)$ există. Într-adevăr, prin p_0 trece un arc orizontal unic și dacă îl prelungim în ambele sensuri plecînd din p_0 cu lungimea a obținem un arc σ compact în $R - \Omega_c$. Oricărui punct $p \in \sigma$ îi corespunde un domeniu $\Delta(p, a_p, b_p)$. Cu un număr finit de astfel de domenii acoperim σ și dacă b este minimul numerelor b_p corespunzătoare, există $\Delta(p_0, a, b)$.

6.3. Definirea domeniilor $\Delta(p_0, a, b)$ ne permite să vorbim despre proprietăți care au loc pentru aproape toate arcele orizontale sau verticale, (i.e. proprietăți valabile aproape pentru toate segmentele $\eta = \text{const.}$ respectiv $\xi = \text{const.}$ din $\delta(0, a, b)$).

§ 3. Teorema de unicitate

1. Vom folosi metrica indusă de o diferențială pătratică pentru a demonstra teorema de unicitate a reprezentării Teichmüller în clasa ei de omotopie. După Teichmüller această reprezentare este caracterizată prin următoarea proprietate extremală : este singura reprezentare cvasiconformă care minimizează $Q[f]$ în clasa omeomorfismelor f omotope cu ea. Începem prin a stabili cîteva propoziții relative la omeomorfismele omotope cu identitatea. Ca și în paragrafele precedente, R și mai departe R' sînt suprafețe riemanniene compacte de gen $g > 1$.

PROPOZIȚIA 3.1. *Fie* $\Phi(z)\,dz^2 \not\equiv 0$ *o diferențială pătratică regulată pe* R *și* f *un omeomorfism surjectiv* : $R \to R$ *omotop cu* 1_R. *Există o constantă* $A > 0$, *astfel încît oricare ar fi arcul orizontal liber* α *să avem*

$$|f(\alpha)|_\Phi \geqslant |\alpha|_\Phi - 2A. \tag{3.1}$$

Prin ipoteză există omeomorfismele surjective $f_t : R \to R$, depinzînd continuu de $t \in [0, 1]$, unde $f_0 = 1_R$ și $f_1 = f$. Pentru fiecare $p_0 \in R$ să construim drumul continuu $\gamma(p_0)$, format de punctele $p = f_t(p_0)$, cînd t descrie $[0,1]$. Să notăm cu $\delta(p_0)$ unicul arc de geodezică din clasa de omotopie $[\gamma(p_0)]_{p_0 f(p_0)}$ (teorema 2.2) și cu

$$A = \sup_{p \in R} |\delta(p)|_\Phi . \tag{3.2}$$

Acest număr este finit, deoarece R este compactă și $|\delta(p)|_\Phi$ variază continuu cu p.

Să notăm $v_r(p) = \{q \in R,\ d_\Phi(q, p) < r\}$, unde $r > 0$ este suficient de mic, pentru ca $v_r(p)$ să fie inclusă în domeniul de definiție al parametrului natural ζ corespunzător lui $\Phi(z)\,dz^2$ în punctul p. Atunci orice punct $q \in v_r(p)$ se poate uni în $v_r(p)$ printr-un arc de geodezică λ_{qp}, cu $|\lambda_{qp}| = d_\Phi(q, p)$.

Dat $\varepsilon > 0$, să luăm numerele r_1 și $r_2 \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ astfel încît să existe $v_{r_1}[f(p)]$ și $v_{r_2}(p)$, iar $f[v_{r_2}(p)] \subset v_{r_1}[f(p)]$.

Să observăm că α fiind un drum oarecare pe R de extremități p' și p'', drumul $\gamma(p')f(\alpha)\gamma(p'')^{-1}$ este omotop cu α. O deformare continuă este dată de drumurile $\gamma_t(p')\,f_t(\alpha)\,\gamma_t(p'')^{-1}$, unde pentru orice punct $p \in R$, $\gamma_t(p)$ este drumul parcurs de $f_{t'}(p)$, cînd t' descrie segmentul $[0, t]$. Prin urmare drumul $\delta(p')\,f(\alpha)\,\delta(p'')^{-1}$ este omotop cu α.

Aplicînd această observație pentru $\alpha = \lambda_{qp}$ și ținînd seama că $\lambda_{f(q)f(p)}$ este omotop cu $f(\alpha)$, putem scrie

$$|\,|\delta(q)|_\Phi - |\delta(p)|_\Phi\,| \leqslant |\lambda_{qp}|_\Phi + |\lambda_{f(q)f(p)}|_\Phi < \varepsilon.$$

Fie acum α un arc orizontal pe R. Deoarece α este omotop cu $\delta(p')\,f(\alpha)\,\delta(p'')^{-1}$, rezultă imediat

$$|\alpha|_\Phi \leqslant 2A + |f(\alpha)|_\Phi .$$

2. Vom considera acum un omeomorfism surjectiv cvasiconform $f : R \to R'$ și două diferențiale pătratice regulate, neidentic nule, arbitrare : $\Phi(z)dz^2$ pe R și $\Psi(z')\,dz'^2$ pe R'. Presupunem că z și z' sînt parametri locali corespunzători punctelor $p_0 \in R$ și $p_0' = f(p_0) \in R'$, iar $p' = f(p)$ se exprimă în acești parametri prin $z' = w(z)$.

Vom folosi următoarele funcții definite a.p. pe R, măsurabile și nenegative :

$$\lambda_{f\Phi\Psi}(p) = |\,\Phi^{-1/2}(z)\,w_z(z) + \overline{\Phi^{-1/2}(z)\,w_{\bar z}(z)}\,|\,|\,\Psi^{1/2}[w(z)]\,| \tag{3.3}$$

și

$$j_{f\Phi\Psi}(p) = |\,\Phi(z)\,|^{-1}\,(\,|w_z|^2 - |w_{\bar z}|^2)\,|\,\Psi[w(z)]\,|. \tag{3.4}$$

Aceste funcții au o interpretare geometrică imediată :

Fie $\Phi(z)\,dz^2 \neq 0$ în p_0 și $\Psi(z')\,dz'^2 \neq 0$ în p'_0. În parametrii naturali, (Cap. IV, (4.2)),

$$\zeta = \int_0^z \Phi^{1/2}(u)\,du \text{ și } \zeta' = \int_0^{z'} \Psi^{1/2}(u')\,du',$$

putem scrie

$$|d\zeta'| = |\Psi^{1/2}[w(z)]| \cdot |w_z(z)\,\Phi^{-1/2}(z)\,d\zeta + w_{\bar{z}}(z)\,\overline{\Phi^{-1/2}}(z)\,d\bar{\zeta}|,$$

deci, luînd $d\zeta = d\xi$, obținem

$$\lambda_{f\Phi\Psi}(p) = \left|\frac{d\,\zeta'_{f(p)}}{d\xi_p}\right|, \tag{3.5}$$

unde am notat cu $|d\xi_p|$ elementul de arc în metrica definită de $\Phi(z)dz^2$, corespunzător arcului orizontal liber în punctul p și cu $|d\,\zeta'_{f(p)}|$ elementul de arc imagine în metrica definită de $\Psi(z')\,dz'^2$.

Se vede de asemenea că

$$j_{f\Phi\Psi}(p) = \left(\frac{D(\xi', \eta')}{D(\xi, \eta)}\right)_p = J_{\zeta'/\zeta}(\zeta). \tag{3.6}$$

Ținînd seama de proprietățile reprezentărilor cvasiconforme amintite în Cap. IV, § 1, pct. 2, obținem imediat următoarele rezultate :

Observația 3.1. Fie G un deschis din R :

$$\iint_{f(G)} dA_\Psi = \iint_G j_{f\Phi\Psi}\,dA_\Phi \tag{3.7}$$

(Cap. IV, (1.4)).

Observația 3.2. În domeniul $\Delta(p_0, a, b)$ asociat unui punct $p_0 \in R$, în care $\Phi(z)\,dz^2 \neq 0$ (§ 2, pct. 6.2) arcele orizontale libere corespund la secțiunile prin $\eta = \text{const.}$ ale dreptunghiului $\delta(0, a, b) = \{\zeta \mid |\xi| < a, |\eta| < b\}$ din planul parametrului natural ζ și pe aproape toate aceste secțiuni reprezentarea cvasiconformă $\zeta'(\zeta)$, care exprimă f în parametrii naturali ζ și ζ' este absolut continuă. În acest sens, referindu-ne la acele arce orizontale libere α, care corespund local la secțiuni cu proprietatea menționată, vom spune :

Pentru aproape toate arcele orizontale, libere α de pe R,

$$|f(\alpha)|_\Psi = \int_{f(\alpha)} ds_\Psi = \int_\alpha \lambda_{f\Phi\Psi}\,ds_\Phi. \tag{3.8}$$

Observația 3.3. Din relațiile (3.5), (3.6) și din inegalitatea (1.3), Cap. IV, deducem că a.p. pe R,

$$\lambda^2_{f\Phi\Psi} \leqslant Q_{jf\Phi\Psi}, \tag{3.9}$$

pentru orice $Q \geqslant Q[f]$.

PROPOZIȚIA 3.2. *Dacă f este un omeomorfism cvasiconform al lui R pe R, omotop cu identitatea și $\Phi(z)\,dz^2$ o diferențială pătratică regulată $\not\equiv 0$ pe R, atunci*

$$\iint_R \lambda_{f\Phi\Phi}\, dA_\Phi \geqslant \iint_R dA_\Phi . \tag{3.10}$$

Fie $\nu(p)$ o funcție definită pe R, nenegativă, măsurabilă și sumabilă. Definim funcția $\tilde{\nu}(p, a)$, pentru fiecare $p \in R$ și $a > 0$, în modul următor :

1°. Dacă p este centrul unui arc orizontal liber α cu $|\alpha|_\Phi = 2a$ și dacă ν este măsurabilă și sumabilă pe α, luăm

$$\tilde{\nu}(p, a) = \int_\alpha \nu(p)\, ds_\Phi . \tag{3.11}$$

2°. În cazul contrar, punem

$$\tilde{\nu}(p, a) = 0. \tag{3.11'}$$

Se vede că $\tilde{\nu}(p, a)$ este dat a.p. pe R de (3.11), deoarece, dacă $p \notin \Omega_\infty$, putem duce prin p arcul α, oricare ar fi $a > 0$ și ν are proprietățile cerute pe aproape toate arcele orizontale libere.

Vom stabili relația

$$\iint_R \tilde{\nu}(p, a)\, dA_\Phi = 2a \iint_R \nu(p)\, dA_\Phi . \tag{3.12}$$

Să presupunem mai întîi că $\nu(p)$ este o funcție continuă pe R cu suportul compact în $R - \Omega_{4a}$, suficient de mic : Mai precis, fie $p_0 \in R$ și b, $0 < b < a$, astfel încît să putem forma $\Delta(p_0, 3a, 3b)$. Presupunem că suportul lui ν este inclus în $\Delta(p_0, a, b)$. Se verifică atunci imediat următoarele afirmații :

1) suportul lui $\tilde{\nu}(p, a)$ este inclus în $\Delta(p_0, 2a, 2b)$, căci dacă $p \notin \Delta(p_0, 2a, 2b)$ și este centrul unui arc orizontal liber α cu $|\alpha|_\Phi = 2a$, atunci $\alpha \cap \Delta(p_0, a, b) = \varnothing$ și

2) în $\Delta(p_0, 2a, 2b)$, funcția $\tilde{\nu}(p, a)$ este dată de (3.11).

Folosind parametrul natural ζ asociat lui $\Phi(z)dz^2$ în p_0 și notînd $\nu[p(\zeta)] = g(\zeta)$, putem scrie pentru $p \in \Delta(p_0, 2a, 2b)$

$$\tilde{\nu}(p, a) = \int_{-a}^{a} g(\zeta + t)\, dt .$$

Să luăm $g(\zeta) = 0$ pentru $\zeta \notin \delta(0, 2a, 2b)$. Rezultă atunci

$$\iint_R \tilde{\nu}(p, a)\, dA_\Phi = \iint_{\Delta(p_0, 2a, 2b)} \tilde{\nu}(p, a)\, dA_\Phi =$$

$$= \iint_{\delta(0,\,2a,\,2b)} \left[\int_{-a}^{a} g(\zeta + t)\, dt \right] d\xi\, d\eta = \int_{-a}^{a} \left[\iint_{-\infty}^{+\infty} g(\zeta + t)\, d\xi\, d\eta \right] dt =$$

$$= \int_{a}^{a} dt \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\zeta)\, d\xi\, d\eta = 2a \iint_{R} \nu(p)\, dA_\Phi .$$

Fie acum $\nu(p)$ o funcție continuă cu suport compact în $R - \Omega_{4a}$. Să considerăm o partiție a unității ([45], 78) corespunzătoare la o acoperire local finită a lui R cu vecinătăți parametrice V_i și la funcțiile μ_i cu suport compact în V_i, de clasă C^∞, nenegative și cu $\sum_i \mu_i = 1$. Presupunem partiția unității aleasă suficient de fină ca orice V_i, care intersectează suportul lui ν, să fie inclus într-un domeniu $\Delta(p_i, a, b_i)$, pentru care există $\Delta(p_i, 3a, 3b_i)$. Fiecare funcție $\mu_i \nu$ satisface condițiile precedente, astfel încît putem scrie

$$\iint_R \tilde{\nu}(p, a)\, dA_\Phi = \iint_R \sum_i \mu_i \tilde{\nu}\, dA_\Phi = \sum_i \iint_{V_i} \mu_i \tilde{\nu}\, dA_\Phi =$$

$$= 2a \sum_i \iint_{V_i} \mu_i \nu\, dA_\Phi = 2a \iint_R \nu(p)\, dA_\Phi .$$

În sfîrșit, fie ν o funcție cu proprietățile indicate în enunț. Există un șir de funcții ν_n continue, cu suport compact pe $R - \Omega_{1a}$, astfel încît $\nu_n \to \nu$ a.p. pe $R - \Omega_{4a}$.

Într-adevăr, spațiul funcțiilor reale, continue, cu suport compact într-un spațiu topologic S, separat și local compact, este subspațiu dens în spațiul funcțiilor reale, sumabile, $L^1(S)$, iar dintr-un șir convergent în sensul normei din $L^1(S)$ către $f \in L^1(S)$, se poate extrage un subșir convergent către f a.p. în S ([30], p. 117—118).

Luînd $S = R - \Omega_{4a}$, aproximăm ν cu funcții ν_n continue, cu suport compact în $R - \Omega_{4a}$, astfel încît $\iint_R |\nu - \nu_n|\, dA_\Phi \to 0$ (deci $\iint_R \nu_n\, dA_\Phi \to \iint_R \nu\, dA_\Phi$) și $\nu_n \to \nu$ a. p. pe R. Deducem apoi că un subșir $\tilde{\nu}_n \to \tilde{\nu}$ a. p. pe R. Dacă ν este și mărginită, rezultă $\iint_R \tilde{\nu}_n\, dA_\Phi \to \iint_R \tilde{\nu}\, dA_\Phi$, iar relația (3.12) se obține pentru ν, din aceeași relație verificată de ν_n. În cazul general aproximăm ν cu funcțiile trunchiate.

Aplicînd relația (3.12) pentru $\nu = \lambda_{f\Phi\Phi}$ și observînd că a.p. pe R

$$\tilde{\nu}(p, a) = \int_\alpha \lambda_{f\Phi\Phi}(p)\, ds_\Phi = |f(\alpha)|_\Phi \geqslant 2\,(a - A)$$

(conform propoziției 3.1 și relației (3.8), putem scrie

$$2a \iint_R \lambda_{f\Phi\Phi}\, dA_\Phi \geqslant 2\,(a - A) \iint_R dA_\Phi .$$

Cum această inegalitate are loc oricare ar fi $a > 0$, iar A este o constantă, deducem de aici (3.10).

Cu ajutorul propoziției 3.2, vom demonstra acum:

TEOREMA 3.1. (Teorema de unicitate pentru f — reprezentare conformă). *Fie R o suprafață riemanniană închisă de gen $g > 1$. Dacă f este un omeomorfism conform al lui R pe R, omotop cu identitatea, atunci f coincide cu identitatea.*

Fie $\hat{R} = U$, $R = U/G$ și $\hat{f}$ un omeomorfism al lui U pe U, care induce f. Deoarece f este omotop cu 1_R, omeomorfismul $\hat{f}$ induce automorfismul identic al lui G: $\chi_j = 1_G$. Într-adevăr, din teorema 5.3, Cap. I, rezultă că există $A \in G$, astfel încît $\chi_j = A\,\chi_{1_U} A^{-1}$, iar $\chi_{1_U} = 1_G$. Prin urmare după teorema 5.1 din același capitol, oricare ar fi $T \in G$,

$$\hat{f} \circ T = T \circ \hat{f}.$$

Pe de altă parte, $g > 1$, astfel încît putem lua două translații neeuclidiene T_1 și T_2 din G nepermutabile (de exemplu, doi generatori). Conform propoziției 3.13 din Cap. II, punctele duble σ_j și τ_j ale lui T_j, $(j = 1, 2)$, sînt 4 puncte distincte. Deoarece $\hat{f} \in H$, după propoziția 3.12 din Cap. II, $\hat{f}$ invariază fiecare din aceste puncte. Rezultă deci că $\hat{f} = 1_U$, dar atunci $f = 1_R$.

TEOREMA 3.2. (Teorema de unicitate generală). *Fie $f_0 : R \to R'$ o reprezentare Teichmüller între suprafețele riemanniene R și R' închise, de gen $g > 1$. Dacă $f : R \to R'$ este un omeomorfism surjectiv omotop cu f_0, atunci*

$$Q\,[f_0] \leqslant Q[f], \tag{3.13}$$

iar egalitatea în această relație implică $f = f_0$.

Vom nota $Q\,[f_0] = Q_0$ și $Q[f] = Q$. Putem presupune $Q_0 > 1$ și $Q < +\infty$, deoarece cazul f_0 conform este demonstrat în teorema 3.1, iar pentru $Q = +\infty$, inegalitatea (3.13) este banală.

Fie $\Phi(z)\mathrm{d}z^2$ și $\Psi(z')\mathrm{d}z'^2$ diferențialele pătratice regulate, asociate reprezentării Teichmüller pe R respectiv R', potrivit teoremei 4.1 din Cap. IV. Reprezentarea cvasiconformă $h = f \circ f_0^{-1} : R' \to R'$ este omotopă cu $1_{R'}$. Aplicînd propoziția 3.2, putem scrie

$$\iint_{R'} \mathrm{d}A_\Psi \leqslant \iint_{R'} \lambda_h \Psi_\Psi \,\mathrm{d}A_\Psi,$$

iar inegalitatea Schwarz-Buniakovski ne dă

$$\iint_{R'} \mathrm{d}A_\Psi \leqslant \iint_{R'} \lambda_h^2 \Psi_\Psi \,\mathrm{d}A_\Psi. \tag{3.14}$$

A.p. pe R avem, după (3.5),

$$\lambda_{f\Phi\Psi}(p) = \left|\frac{\mathrm{d}\,\zeta'_{f(p)}}{\mathrm{d}\,\xi_p}\right|$$

și, deoarece f_0 se exprimă în parametrii naturali ζ și ζ' asociați diferențialelor $\Phi(z)dz^2$ și $\Psi(z')\,dz'^2$ în puncte în care ordinul lor este diferit de zero, prin $\zeta' = Q_0\,\xi + i\eta$ (teorema 4.1, 2°, Cap. IV) putem scrie

$$\lambda_{f_0\Phi\Psi}(p) = Q_0, \quad j_{f_0\Phi\Psi}(p) = Q_0. \tag{3.15}$$

Prin urmare a.p. pe R,

$$\lambda_{h\Psi\Psi}[f_0(p)] = \lambda_{f\Phi\Psi}(p)\,Q_0^{-1} \tag{3.16}$$

și notînd $Q[f] = Q$, din (3.14) — (3.16) și (3.9) rezultă

$$\iint_{R'} \mathrm{d}A_\Psi \leqslant Q_0^{-1}\iint_{R'} \lambda^2_{f\Phi\Psi}[f_0^{-1}(p')]\,j_{f_0^{-1}\Psi\Phi}(p')\,\mathrm{d}A_\Psi =$$

$$= Q_0^{-1}\iint_R \lambda^2_{f\Phi\Psi}\,\mathrm{d}A_\Phi \leqslant Q\,Q_0^{-1}\iint_R j_{f\Phi\Psi}\,\mathrm{d}A_\Phi = Q\,Q_0^{-1}\iint_{R'}\mathrm{d}A_\Psi,$$

deci

$$Q_0 \leqslant Q.$$

Să presupunem că $Q_0 = Q$. Atunci avem egalitate în toate relațiile folosite mai sus. În particular

$$\lambda^2_{f\Phi\Psi}(p) = Q_0\,j_{f\Phi\Psi}(p)$$

a.p. pe R, ceea ce arată că a.p. pe R, direcția arcului orizontal liber prin p este direcția de dilatare maximă și dă pentru f în p : raportul axelor elipsei infinitezimale cu centrul ζ transformată în cerc infinitezimal egal cu Q_0 și unghiul axei mari cu axa ξ-lor egal cu $\frac{\pi}{2}$, deci dilatarea complexă $\mu(\zeta) = \dfrac{Q-1}{Q+1}$, ((1.2'), Cap. IV). Prin urmare f și f_0 au a. p. pe R același coeficient Beltrami, deci $h = f \circ f_0^{-1}$ este o reprezentare conformă. Teorema precedentă arată că $h = 1_R$, de unde $f = f_0$.

§ 4. Teorema de existență

1. Folosind diferitele rezultate de natură topologică sau metrică, pe care le-am stabilit, vom putea demonstra acum

TEOREMA 4.1. (Teorema de existență). *Date două suprafețe riemanniene canonice (R, α) și (R', α') de gen $g > 1$ și cu aceeași orientare, există o reprezentare Teichmüller $f_0 : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$.*

Demonstrația se bazează pe corespondența pe care am stabilit-o de pe o parte între o reprezentare Teichmüller și coeficientul ei Beltrami (teorema 2.1 din Cap. IV) și pe de altă parte între o suprafață riemanniană canonică, de gen $g > 1$ și punctul reprezentativ din E_{6g-6} (aplicația **C** din § 1, pct. 3 al acestui capitol).

Fixăm în tot raționamentul o suprafață riemanniană canonică (R^0, α^0) de gen $g > 1$.

Prin aplicația **A** (§ 1, pct. 1), acestei suprafețe îi corespunde biunivoc o mulțime normată $(A_1^0, \ldots, A_{2g}^0)$ de generatori ai grupului transformărilor de acoperire G^0, față de care $R = U/G^0$, și prin aplicația **C** un punct reprezentativ x^0 de coordonate σ_1^0, τ_1^0, $\lambda_1^0, \ldots \lambda_{2g-2}^0$.

Fie X mulțimea din E_{6g-6} a punctelor reprezentative x de suprafețe riemanniene canonice (R, α) de gen g și cu aceeași orientare ca și (R^0, α^0). După teorema 3.2 din Cap. IV, suprafețele (R, α) sînt caracterizate prin existența unei reprezentări cvasiconforme f: $(R^0, \alpha^0) \to (R, \alpha)$.

Convenim să notăm pentru orice punct $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_{6g-6}) \in E_{6g-6}$ distanța de la ξ la origine cu

$$|\xi| = \left(\sum_{j=1}^{6g-6} \xi_j^2 \right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Fie M mulțimea coeficienților Beltrami $\mu(z)$, $z \in U$, compatibili cu grupul G^0. După teorema 2.1 și propoziția 3.2 din Cap. IV, oricărei reprezentări cvasiconforme $(R^0, \alpha^0) \to (R, \alpha)$ îi corespunde un coeficient Beltrami $\mu \in M$ și reciproc, după propoziția 3.2′ și teorema 2.1 din același capitol, dat $\mu \in M$, există o reprezentare cvasiconformă f^μ: $(R^0, \alpha^0) \to (R^\mu, \alpha^\mu)$, reprezentarea naturală indusă de $\mu\, dz^{-1}\, d\bar{z}$, unde $R^\mu = (R^0)^\mu$ și $\alpha^\mu = f^\mu(\alpha^0)$, (Cap. IV, § 3, pct. 3).

Definim pe M *norma*:

$$\|\mu\| = \text{adevăratul maxim al } |\mu| \tag{4.2}$$

(Cap. IV, § 2, (2.4)) și *convergența*: $\mu_n \to \mu$, dacă există o constantă $q \in [0, 1)$, astfel încît $\|\mu_n\| \leqslant q$ și dacă μ_n converge la μ a.p. pe U.

Pentru a demonstra teorema de existență, vom defini o aplicație $\mathbf{F}: M \to X$, asociind fiecărui $\mu \in M$ punctul reprezentativ al lui (R^μ, α^μ) din X, *și o aplicație* $\mathbf{G}: B \to M$, unde B este bula unitate $|\xi| < 1$ din E_{6g-6} și $\mathbf{G}(B)$ este mulțimea coeficienților Beltrami asociați reprezentărilor Teichmüller ale lui (R^0, α^0), *astfel încît* $\mathbf{H} = \mathbf{F} \circ \mathbf{G}: B \to X$ *să fie un omeomorfism surjectiv.*

Teorema de existență va rezulta din următorul raționament: Orice suprafață riemanniană canonică (R, α) de gen g și cu aceeași orientare ca și (R^0, α^0) are un punct reprezentativ $x \in X$. Există $\xi \in B$ cu $\mathbf{H}(\xi) = x$. Atunci, pentru $\mu = \mathbf{G}(\xi)$, f^μ: $(R^0, \alpha^0) \to (R^\mu, \alpha^\mu)$ este o reprezentare Teichmüller, iar $\mathbf{F}(\mu) = x$ arată că $(R^\mu, \alpha^\mu) = (R, \alpha)$ (ca avînd același punct reprezentativ). Prin urmare, am demonstrat existența unei

reprezentări Teichmüller : $(R^0, \alpha^0) \to (R, \alpha)$, (obținută compunînd f^μ cu o reprezentare conformă $(R^\mu, \alpha^\mu) \to (R, \alpha)$.

2. *Aplicația* $\mathbf{F} : M \to X$

Dat coeficientul $\mu \in M$, după teorema de existență și unicitate a reprezentărilor cvasiconforme (teorema 1.2 din Cap. IV) există o soluție generalizată unică $w^\mu(z)$ a ecuației Beltrami

$$w^\mu_{\bar{z}} = \mu(z)\, w^\mu_z, \tag{4.3}$$

care reprezintă omeomorf U pe el însuși și satisface condițiile :

$$w^\mu(0) = 0,\ w^\mu(\infty) = \infty \text{ și } |w^\mu(\sigma^0_{2g-1})\, w^\mu(\tau^0_{2g-1})| = 1. \tag{4.3'}$$

După teorema 3.1 din Cap. IV, w^μ induce reprezentarea cvasiconformă $f^\mu : (R^0, \alpha^0) \to (R^\mu, \alpha^\mu)$, unde $G^\mu = w^\mu G^0 (w^\mu)^{-1}$, $R^\mu = U/G^\mu$, iar $\alpha^\mu = f^\mu(\alpha^0)$. Reamintim că α^μ se deduce din α^0 și prin următorul procedeu : fie $A^\mu_j = w^\mu \circ A^0_j \circ (w^\mu)^{-1}$ mulțimea normată de generatori ai lui G^μ și w un punct din U, iar $a^\mu_j = \Lambda_{G^\mu,\, w}(A^\mu_j)$; α^μ este clasa sistemului canonic $a^\mu = (a^\mu_1, \ldots, a^\mu_{2g})$ de generatori ai lui $\pi_1(R^\mu, \Pi_{G^\mu}(w))$ [7]. Reprezentarea cvasiconformă f^μ are, în parametrii locali definiți de Π_{G^0} și Π_{G^μ} coeficientul Beltrami $\mu(z)$, deci

$$Q[f^\mu] = \frac{1 + \|\mu\|}{1 - \|\mu\|}. \tag{4.4}$$

Deoarece f^μ păstrează orientarea, punctul reprezentativ x al lui (R^μ, α^μ) aparține mulțimii X. Vom lua prin definiție

$$\mathbf{F}(\mu) = \mathbf{C}[(R^\mu, \alpha^\mu)] = x. \tag{4.5}$$

Propoziția 4.1. *Aplicația* $\mathbf{F} : M \to X$ *este continuă prin șiruri și surjectivă.*

1°. Fie șirul $\mu_n \to \mu$ în M. Să notăm cu $w_n(z)$ respectiv $w(z)$ omeomorfismele lui U pe el însuși, soluții generalizate ale ecuațiilor

$$w^{\mu_n}_{\bar{z}} = \mu_n(z)\, w^{\mu_n}_z \text{ respectiv } w^\mu_{\bar{z}} = \mu(z)\, w^\mu_z,$$

unic determinate prin condiția de a invaria punctele 0, 1 și ∞. Atunci

$$w^{\mu_n}(z) = k_n w_n(z) \text{ și } w^\mu(z) = k\, w(z),$$

unde k_n și k sînt constante pozitive definite prin relațiile :

$$k_n^2 |w_n(\sigma^0_{2g-1})\, w_n(\tau^0_{2g-1})| = 1 \text{ și } k^2 |w(\sigma^0_{2g-1})\, w(\tau^0_{2g-1})| = 1.$$

---

[7]) Aceasta rezultă din (5.3'), Cap. I. Corespondența $(A^\mu_1, \ldots, A^\mu_{2g}) \to (R^\mu, \alpha^\mu)$ coincide cu aplicația $\mathbf{A}^{-1}$ din § 1.1.

Reprezentările cvasiconforme $w_n(z)$ converg la $w(z)$, după propoziția 1.7 din Cap. IV, deci $k_n \to k$ și $w^{\mu_n}(z)$ converg la $w^{\mu}(z)$ în $\overline{U}$. Folosind observația 1.2 și propoziția 1.5 din Cap. IV, se arată imediat că oricare ar fi $j = 1, \ldots, 2g$, transformările $A_j^{\mu_n} = w^{\mu_n} \circ A_j^0 \circ (w^{\mu_n})^{-1}$ converg la $A_j^{\mu} = w^{\mu} \circ A_j^0 \circ (w^{\mu})^{-1}$. Punctele duble ale transformărilor $A_j^{\mu_n}$: $\sigma_j^{\mu_n} = w^{\mu_n}(\sigma_j^0)$ și $\tau_j^{\mu_n} = w^{\mu_n}(\tau_j^0)$ converg respectiv la punctele duble ale transformării A_j^{μ} : $\sigma_j^{\mu} = w^{\mu}(\sigma_j^0)$ și $\tau_j^{\mu} = w^{\mu}(\tau_j^0)$, iar invarianții transformărilor $A_j^{\mu_n}$: $\lambda_j^{\mu_n} = (\sigma_j^{\mu_n}, z_0, A_j^{\mu_n}(z_0), \tau_j^{\mu_n})$ tind la invariantul lui A_j^{μ} : $\lambda_j^{\mu} = (\sigma_j^{\mu}, z_0, A_j^{\mu}(z_0), \tau_j^{\mu})$ (unde z_0 este un punct arbitrar, dar fixat din U). Am obținut astfel că $x_n = \mathbf{F}(\mu_n) = (\sigma_1^{\mu_n}, \ldots \lambda_{2g-2}^{\mu_n}) \to x = \mathbf{F}(\mu) = (\sigma_1^{\mu}, \ldots \lambda_{2g-2}^{\mu})$.

2°. Fie $x \in X$, $(R, \alpha) = \mathbf{C}^{-1}(x)$ suprafața riemanniană canonică corespunzătoare, G grupul transformărilor acoperirii (U, Π_G, R), pentru care $R = U/G$, iar $(A_1, \ldots, A_{2g}) = \mathbf{A}[(R, \alpha)]$ mulțimea normată de generatori ai lui G, care definește (R, α). Cum $x \in X$, suprafețele canonice (R^0, α^0) și (R, α) au aceeași orientare și în virtutea teoremei 3.2 din Cap. IV, există reprezentarea cvasiconformă f : $(R^0, \alpha^0) \to (R, \alpha)$. Coeficientul Beltrami $\mu(z)$ al acestei reprezentări este compatibil cu G^0, deci aparține mulțimii M. Vom verifica acum că $\mathbf{F}(\mu) = x$: Fie $w^{\mu} : U \to U$ reprezentarea cvasiconformă folosită în definirea aplicației $\mathbf{F}$ și f^{μ} : $(R^0, \alpha^0) \to (R^{\mu}, \alpha^{\mu})$ reprezentarea cvasiconformă indusă de w^{μ}. Cum f^{μ} și f au același coeficient Beltrami, $f^{\mu} \circ f^{-1}$: $(R, \alpha) \to (R^{\mu}, \alpha^{\mu})$ este o reprezentare conformă, deci putem scrie $(R, \alpha) = (R^{\mu}, \alpha^{\mu})$ sau trecînd la punctele reprezentative $x = \mathbf{F}(\mu)$. [8])

3. *Aplicația* $\mathbf{G} : B \to M$

Folosind noțiunea de divizor și teorema Riemann-Roch am demonstrat că mulțimea diferențialelor pătratice regulate pe R^0, adică mulțimea diferențialelor pătratice regulate $\Phi(z)dz^2$ pe U compatibile cu G^0, formează un spațiu vectorial real $(6g - 6)$-dimensional (teorema 4.2, Cap. IV). Vom nota cu $\Phi_k(z)dz^2$, $k = 1, \ldots, 6g-6$, o bază a acestui spațiu și vom defini pentru $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_{6g-6}) \in B$, aplicația $\mathbf{G}(\xi) = \mu$ în modul următor :

1°. dacă $\xi = 0$, luăm $\mu(z) = 0$,

2°. dacă $\xi \neq 0$, luăm

$$\mu(z) = |\xi| \frac{\sum_{j=1}^{6g-6} \xi_j \overline{\Phi_j(z)}}{\left| \sum_{j=1}^{6g-6} \xi_j \Phi_j(z) \right|}, \tag{4.6}$$

adică asociem lui ξ diferențiala pătratică $\Phi(z)dz^2$, unde

$$\Phi = \sum_{j=1}^{6g-6} \xi_j \Phi_j, \tag{4.7}$$

[8]) Ultima parte a demonstrației se poate da și sub forma următoare : Reprezentarea cvasiconformă w^{μ} satisface (1.3), deci, după propoziția 1.2, induce f. Prin urmare $\mathbf{F}(\mu) = \mathbf{C}[(R, \alpha)] = x$.

și apoi, după cum $\xi \neq 0$ sau $= 0$, coeficientul Beltrami $\mu(z)$ al unei reprezentări Teichmüller corespunzătoare lui $\Phi(z)\,dz^2$ și constantei $|\xi|$, respectiv $\mu(z) = 0$. Prin urmare, mulțimea $\mathbf{G}(B) \subset M$ este formată din coeficienți Beltrami de reprezentări Teichmüller. Evident,

$$\|\mathbf{G}(\xi)\| = |\xi|. \tag{4.8}$$

PROPOZIȚIA 4.2. *Aplicația* $\mathbf{G}$ *este continuă prin șiruri.*

Fie $\xi^n = (\xi_1^n, \ldots, \xi_{6g-6}^n)$, $n = 1, 2, \ldots$, un șir de puncte din B, convergent la punctul $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{6g-6})$ din B și $\Phi^n(z)\,dz^2$ respectiv $\Phi(z)\,dz^2$ diferențialele pătratice corespunzătoare acestor puncte după (4.7). Evident, $\xi^n \to \xi$ implică: $|\xi^n| \to |\xi|$, $\xi_j^n \to \xi_j$ pentru $j = 1, \ldots, 6g-6$, $\Phi^n(z) \to \Phi(z)$. Să notăm $\mu^n = \mathbf{G}(\xi^n)$ și $\mu = \mathbf{G}(\xi)$ și să verificăm că $\mu^n \to \mu$ în M.

Cum $|\xi^n| \to |\xi|$ și $|\xi| < 1$, există o constantă q, $0 \leqslant q < 1$, astfel încît $\|\mu^n\| \leqslant q$.

Dacă $\xi = 0$, atunci $\xi^n \to 0$, deci $\|\mu^n\| \to 0$ sau $\mu^n \to 0$ a.p. în U.

Dacă $\xi \neq 0$, atunci $\Phi(z) \not\equiv 0$, deci se anulează doar în puncte izolate. Exceptînd aceste puncte din U, $\mu^n(z) \to \mu(z)$.

4. *Aplicația* $\mathbf{H} = \mathbf{F} \circ \mathbf{G} : B \to M \to X$

După cum am arătat în prezentarea făcută la pct. 1, pentru a stabili teorema de existență este suficient să demonstrăm că $\mathbf{H}$ e surjectivă. În acest scop vom aprofunda proprietățile lui $\mathbf{H}$, proprietăți ce vor fi folosite și în § 5.

PROPOZIȚIA 4.3. *Aplicația* $\mathbf{H} : B \to X$ *e continuă.*

Aceasta rezultă imediat din propozițiile 4.1 și 4.2, ținînd seama de faptul că în E_{6g-6} continuitatea prin șiruri este echivalentă cu continuitatea.

PROPOZIȚIA 4.4. *Aplicația* $\mathbf{H}$ *este injectivă.*

Fie ξ^k $(k = 1, 2)$ două puncte din B, pentru care $\mathbf{H}(\xi^k) = x^k \in X$ coincid. Să notăm $\mu^k = \mathbf{G}(\xi^k)$, $f^k : (R^0, \alpha^0) \to (R^k, \alpha^k)$ reprezentarea Teichmüller corespunzătoare (unde $f^k = f^{\mu^k}$, $R^k = R^{\mu^k}$, $\alpha^k = \alpha^{\mu^k}$) și $x^k = \mathbf{F}(\mu^k)$ punctul reprezentativ al lui (R^k, α^k). Cum $x^1 = x^2$, $(R^1, \alpha^1) = (R^2, \alpha^2)$, deci f^2 și f^1 sînt două reprezentări Teichmüller: $(R^0, \alpha^0) \to (R^1, \alpha^1)$. Teorema de unicitate (teorema 3.2) implică atunci $f^1 = f^2$, de unde rezultă egalitatea coeficienților Beltrami corespunzători $\mu^1 = \mu^2$ și $|\xi^1| = |\xi^2|$.

Dacă $|\xi^k| = 0$, evident $\xi^1 = \xi^2$.

Dacă $|\xi^k| \neq 0$, din observația 4.2, Cap. IV, deducem relativ la diferențialele pătratice date de $\Phi^k = \sum_{j=1}^{6g-6} \xi_j^k \Phi_j$ relația $\Phi^1 = c\,\Phi^2$, cu c constantă pozitivă. Prin urmare, $\sum_{j=1}^{6g-6} (\xi_j^1 - c\,\xi_j^2)\,\Phi_j = 0$ sau $\xi_j^1 = c\,\xi_j^2$. Cum $|\xi^1| = |\xi^2|$ și $c > 0$, rezultă $c = 1$ și $\xi^1 = \xi^2$.

PROPOZIȚIA 4.5. *Aplicația* $\mathbf{H}$ *este un omeomorfism, iar* $\mathbf{H}(B)$ *este un deschis în* E_{6g-6}.

Fie $x^* \in \mathbf{H}(B)$ și $\xi^* \subset B$ astfel încît $\mathbf{H}(\xi^*) = x^*$; dacă V este o vecinătate a lui ξ^* cu $\overline{V} \subset B$, atunci $\mathbf{H}|_{\overline{V}}$ este o aplicație injectivă, continuă a mulțimii $\overline{V}$ compacte din E_{6g-6} în E_{6g-6}, care este spațiu Hausdorff, prin urmare, $\mathbf{H}|_{\overline{V}}$ este un omeomorfism al lui $\overline{V}$ pe $\mathbf{H}(\overline{V})$. Rezultă imediat că $\mathbf{H}|_V$ este tot un omeomorfism: $V \to \mathbf{H}(V)$ și, după teorema lui Brouwer ([41], Cap. I, II; acest volum pag. 53), că $\mathbf{H}(V)$ este un deschis din E_{6g-6}, care conține punctul x^*. Prin urmare, $\mathbf{H}(B)$ este un deschis, iar $\mathbf{H}^{-1}: \mathbf{H}(B) \to B$ este o aplicație continuă.

PROPOZIȚIA 4.6. *Dacă pentru* $\xi \in B$ *și* $\tilde{\mu} \in M$ *avem* $\mathbf{H}(\xi) = \mathbf{F}(\tilde{\mu})$, *atunci* $|\xi| \leqslant ||\tilde{\mu}||$.

Fie $x = \mathbf{H}(\xi)$ și $\mu = \mathbf{G}(\xi)$. Din definiția aplicației $\mathbf{F}$, rezultă că există reprezentarea Teichmüller $f^{\mu}: (R^0, \alpha^0) \to (R^{\mu}, \alpha^{\mu})$ și $x = \mathbf{C}[(R^{\mu}, \alpha^{\mu})]$ (relația (4.5)), iar după (4.4) și (4.8), putem scrie

$$Q[f^{\mu}] = \frac{1 + |\xi|}{1 - |\xi|}. \tag{4.9}$$

Prin ipoteză însă $\mathbf{F}(\tilde{\mu}) = x$, deci aplicînd definiția lui $\mathbf{F}$ pentru $\tilde{\mu}$, deducem că există o reprezentare cvasiconformă $f^{\tilde{\mu}}: (R^0, \alpha^0) \to (R^{\tilde{\mu}}, \alpha^{\tilde{\mu}})$ și o reprezentare conformă $h: (R^{\tilde{\mu}}, \alpha^{\tilde{\mu}}) \to (R^{\mu}, \alpha^{\mu})$. Reprezentarea cvasiconformă $h \circ f^{\tilde{\mu}} = \tilde{f}: (R^0, \alpha^0) \to (R^{\mu}, \alpha^{\mu})$ are coeficientul Beltrami $\tilde{\mu}$; prin urmare

$$Q[\tilde{f}] = \frac{1 + ||\tilde{\mu}||}{1 - ||\tilde{\mu}||}. \tag{4.10}$$

Teorema 3.2 de unicitate a reprezentării Teichmüller ne dă atunci inegalitatea $Q[f^{\mu}] \leqslant Q[\tilde{f}]$, iar din relațiile (4.9) și (4.10) rezultă $|\xi| \leqslant ||\tilde{\mu}||$.

PROPOZIȚIA 4.7. *Aplicația* $\mathbf{H}$ *este surjectivă.*

Dacă x_1 este un punct arbitrar din X, conform propoziției 4.1, deducem că există $\mu \in M$ cu $\mathbf{F}(\mu) = x_1$.

Definim aplicația $\mathcal{A}$, care asociază fiecărui $t \in [0,1]$, punctul $x_t = \mathbf{F}(t\mu) \in X$ și care este evident continuă.

Să notăm $\Theta = \{t | t \in [0,1],\ x_t \in \mathbf{H}(B)\}$ și $\xi_t = \mathbf{H}^{-1}(x_t)$ pentru $t \in \Theta$. Se verifică imediat următoarele afirmații:

1°. $\Theta \neq \varnothing$. Într-adevăr, $\Theta \ni 0$, deoarece $\mathbf{G}(0) = 0$ și $\mathbf{F}(0) = x^0$ punctul reprezentativ al lui (R^0, α^0).

2°. Θ *e închis.* Fie t_n $(n = 1, 2, \ldots)$ un șir de puncte din Θ convergent la un punct t^*. Atunci există punctele $\xi^n \in B$ cu $\mathbf{H}(\xi^n) = \mathbf{F}(t_n \mu) = x_{t_n}$. Conform propoziției 4.6, $|\xi^n| \leqslant t_n ||\mu|| \leqslant ||\mu||$; prin urmare, există

un subșir de indici n, pe care pentru simplificarea scrierii să-i notăm tot n, astfel încît $\xi^n \to \xi^* \in B$. Deoarece $\mathbf{H}$ și $\mathbf{F}$ sînt continue prin șiruri, avem $\mathbf{H}(\xi^*) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{H}(\xi^n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{F}(t_n \mu) = \mathbf{F}(t^* \mu) = x_{t^*}$. Prin urmare, $t^* \in \Theta$.

3°. Θ *este deschis* în [0,1], deoarece aplicația $\mathcal{A} : [0, 1] \to X$ este continuă, $\mathbf{H}(B)$ este un deschis, iar $\Theta = \mathcal{A}^{-1}[\mathbf{H}(B)]$.

Cum segmentul [0,1] este conex, am arătat că $\Theta = [0, 1]$. În particular, $x_1 \in \mathbf{H}(B)$ de unde $\mathbf{H}(B) = X$.

În acest mod, teorema de existență a fost demonstrată.

5. Din teorema de existență, teorema de unicitate și teoremele 6.1, Cap. III și 4.1, Cap. IV, rezultă :

Teorema 4.2. (Teorema lui Teichmüller). *Fie R și R' două suprafețe riemanniene închise de gen $g > 1$. Dat un omeomorfism surjectiv $f_1 : R \to R'$, care păstrează orientarea, există în clasa omeomorfismelor surjective $f : R \to R'$ omotope cu f_1, o unică reprezentare extremală f_0, care minimizează $Q[f]$. Reprezentarea cvasiconformă f_0 se poate descrie cu ajutorul a două diferențiale pătratice regulate $\Phi(z)\,dz^2$ pe R și $\Psi(z')\,dz'^2$ pe R', unde z și z' sînt parametrii locali în puncte corespunzătoare $p \in R$ și $p' = f_0(p) \in R'$. Exceptînd zerourile izolate ale acestor diferențiale (care prin f_0 se corespund), f_0 se exprimă în parametrii locali ζ și ζ', definiți prin relațiile*

$$d\zeta^2 = \Phi(z)\,dz^2 \quad \text{și} \quad d\zeta'^2 = \Psi(z')\,dz'^2,$$

ca o transformare afină

$$\zeta' = Q\xi + i\eta.$$

Într-adevăr, alegînd o suprafață riemanniană canonică (R, α) și luînd $\alpha' = f_1(\alpha)$, clasa omeomorfismelor surjective $f : R \to R'$, omotope cu f_1, coincide cu clasa reprezentărilor $f : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$. Există în această clasă o *reprezentare Teichmüller* f_0 și ea este unic determinată prin proprietatea extremală :

$$Q[f_0] \leqslant Q[f].$$

Pentru f_0, cîtul de dilatare $Q[f_0] = Q$, o constantă $\geqslant 1$, iar coeficientul Beltrami μ pune în evidență diferențiala pătratică regulată $\Phi(z)\,dz^2$, determinată pînă la un factor constant pozitiv ; existența diferențialei $\Psi(z')\,dz'^2$ și exprimarea lui f_0 ca reprezentare afină în parametrii ζ și ζ' este asigurată de teorema 4.1 din Cap. IV.

6. Fie $\mathbf{X}$ mulțimea din E_{6g-6} a tuturor punctelor reprezentative de suprafețe riemanniene canonice de gen $g > 1$. Fixînd (R^0, α^0) ca mai sus, am descompus această mulțime în două submulțimi disjuncte X, formată de punctele reprezentative ale suprafețelor riemanniene canonice de gen g cu aceeași orientare ca (R^0, α^0) și $\tilde{X}$, formată de punctele reprezentative ale suprafețelor cu orientarea opusă lui (R^0, α^0).

Cu notaţiile de mai sus, dacă $x \in X$, fie $\xi = \mathbf{H}^{-1}(x)$, $\mu = \mathbf{G}(\xi)$, $(R^\mu, \alpha^\mu) = \mathrm{C}^{-1}(x)$, $f^\mu : (R^0, \alpha^0) \to (R^\mu, \alpha^\mu)$ şi $w^\mu : U \to U$ reprezentarea cvasiconformă, care satisface (4.3) şi (4.3′). Să luăm

$$\tilde{w}^\mu(z) = -\overline{w^\mu(z)} = (h \circ w^\mu)(z), \tag{4.11}$$

unde $h(z) = -\bar{z}$ este simetria faţă de axa imaginară. Omeomorfismul surjectiv $\tilde{w}^\mu : U \to U$ schimbă orientarea, dar este compatibil cu G, astfel încît induce o reprezentare $\tilde{f}^\mu : (R^0, \alpha^0) \to (\tilde{R}^\mu, \tilde{\alpha}^\mu)$, (Cap. III, § 6, pct. 4), unde suprafaţa riemanniană canonică $(\tilde{R}^\mu, \tilde{\alpha}^\mu)$ are orientare opusă lui (R^0, α^0), deci $\tilde{x} = \mathbf{C}[(\tilde{R}^\mu, \tilde{\alpha}^\mu)] \in \tilde{X}$. Să notăm $(A_1^\mu, \ldots, A_{2g}^\mu) = \mathbf{A}[(R^\mu, \alpha^\mu)]$ şi $(\tilde{A}_1^\mu, \ldots, \tilde{A}_{2g}^\mu) = \mathbf{A}[(\tilde{R}^\mu, \tilde{\alpha}^\mu)]$. Dacă σ_j^μ, τ_j^μ, λ_j^μ şi $\tilde{\sigma}_j^\mu$, $\tilde{\tau}_j^\mu$, $\tilde{\lambda}_j^\mu$ sînt punctele fixe şi invarianţii transformărilor A_j^μ respectiv $\tilde{A}_j^\mu$, din relaţiile

$$A_j^\mu = w^\mu \circ A_j^0 \circ (w^\mu)^{-1} \quad \text{şi} \quad \tilde{A}_j^\mu = \tilde{w}^\mu \circ A_j^0 \circ (\tilde{w}^\mu)^{-1}$$

şi din (4.11) deducem

$$\tilde{A}_j^\mu = h \circ A_j^\mu \circ h^{-1},$$

deci $\tilde{\sigma}_j^\mu = -\sigma_j^\mu$, $\tilde{\tau}_j^\mu = -\tau_j^\mu$ şi $\tilde{\lambda}_j^\mu = \lambda_j^\mu$. Obţinem astfel

PROPOZIŢIA 4.8. *Mulţimea $\tilde{X}$ se obţine din X schimbînd semnul la $4g - 4$ coordonate în E_{6g-6}.*

Să observăm totodată că $\sigma_j^\mu = w^\mu(\sigma_j^0)$ şi cum w^μ invariază punctele 0 şi ∞ şi păstrează orientarea, rezultă că

$$\sigma_{2g-1}^\mu \, \sigma_{2g-1}^0 > 0, \text{ în timp ce } \tilde{\sigma}_{2g-1}^\mu \, \sigma_{2g-1}^0 < 0.$$

PROPOZIŢIA 4.9. *Fie $(A_1, \ldots, A_{2g})$ şi $(B_1, \ldots, B_{2g})$ două mulţimi normate de translaţii neeuclidiene. Suprafeţele riemanniene canonice definite de ele* (care se obţin prin aplicaţia $\mathbf{A}^{-1}$) *au aceeaşi orientare atunci şi numai atunci cînd $\sigma(A_{2g-1})\, \sigma(B_{2g-1}) > 0$.*

§ 5. Spaţiu Teichmüller

1. Fie $\mathbf{T}_g$ mulţimea suprafeţelor riemanniene canonice (R, α) de gen $g > 1$ şi cu aceeaşi orientare.

Numim *distanţă Teichmüller* între două suprafeţe (R, α) şi (R', α') din $\mathbf{T}_g$ numărul

$$\mathrm{d}[(R, \alpha), (R', \alpha')] = \ln Q[f_0], \tag{5.1}$$

unde f_0 este reprezentarea Teichmüller : $(R, \alpha) \to (R', \alpha')$, care există şi este unic determinată după teoremele 4.1 şi 3.2.

Evident, putem defini :

$$\mathrm{d}[(R, \alpha), (R', \alpha')] = \inf_f \ln Q[f], \tag{5.1′}$$

unde f parcurge mulţimea reprezentărilor $(R, \alpha) \to (R', \alpha')$.

PROPOZIȚIA 5.1. *Funcția* $\mathrm{d} : \mathbf{T}_g \times \mathbf{T}_g \to E_1$ [9]) *este o distanță, ce organizează* $\mathbf{T}_g$ *ca spațiu metric*:

1°. $\mathrm{d} \geqslant 0$; $\mathrm{d} = 0$, *atunci și numai atunci cînd* $(R, \alpha) = (R', \alpha')$. Într-adevăr, $\mathrm{d} = 0$ implică f_0 reprezentare conformă.

2°. d *este simetrică.*

Este suficient să observăm că f_0^{-1} este reprezentare Teichmüller: $(R', \alpha') \to (R, \alpha)$ și $Q[f_0^{-1}] = Q[f_0]$, (conform Cap. IV, § 2, pct. 1).

3°. d *satisface inegalitatea triunghiului.*

Fie (R, α), (R', α') și (R'', α'') din $\mathbf{T}_g$ și $f_0 : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$ respectiv $f_1 : (R', \alpha') \to (R'', \alpha'')$ reprezentările Teichmüller corespunzătoare. Cum $Q[f_1 \circ f_0] \leqslant Q[f_1]\, Q[f_0]$ (Cap. IV, § 2, pct. 1), rezultă

$$\mathrm{d}[(R, \alpha), (R'', \alpha'')] \leqslant \ln Q[f_1 \circ f_0] \leqslant \mathrm{d}[(R, \alpha), (R', \alpha')] + \mathrm{d}[(R', \alpha'), (R'', \alpha'')].$$

TEOREMA 5.1. *Spațiul metric* $\mathbf{T}_g$ *este omeomorf cu* E_{6g-6}.

Fie X mulțimea din E_{6g-6} a punctelor reprezentative de suprafețe din T_g și $\mathbf{C} : T_g \to X$ aplicația biunivocă, care asociază fiecărei suprafețe canonice $(R, \alpha) \in \mathbf{T}_g$ punctul reprezentativ $x \in X$ (restricția la $\mathbf{T}_g$ a aplicației $\mathbf{C}$).

Transformăm $\mathbf{C}$ într-un omeomorfism, organizînd X ca spațiu metric cu ajutorul lui $\mathbf{C}$. Fie x' și x'' două puncte din X, reprezentînd suprafețele (R', α') și (R'', α''); definim distanța Teichmüller între x' și x''

$$\mathrm{d}(x', x'') = \mathrm{d}[(R', \alpha'), (R'', \alpha'')]. \tag{5.2}$$

Totodată X ca subspațiu al lui E_{6g-6} este înzestrat cu metrica euclidiană, în care distanța între punctele x' și x'' este $|x' - x''|$.

Vom arăta că cele două topologii definite pe X de $\mathrm{d}(x', x'')$ și $|x' - x''|$ coincid. În acest scop este suficient să stabilim

PROPOZIȚIA 5.2. *Fie* x^n $(n = 1, 2, \ldots)$ *un șir de puncte din* X *și* x^0 *un punct din* X. *Distanța euclidiană* $|x^n - x^0| \to 0$ *atunci și numai atunci cînd distanța Teichmüller* $\mathrm{d}(x^n, x^0) \to 0$.

Alegînd în raționamentul dezvoltat pentru a demonstra teorema de existență x^0 drept punctul fixat, am construit un omeomorfism $\mathbf{H}^{-1} : X \xrightarrow[\text{pe}]{} B$. Să notăm $\xi^n = \mathbf{H}^{-1}(x^n)$, $(R^n, \alpha^n) = \mathbf{C}^{-1}(x^n)$, $\xi^0 = \mathbf{H}^{-1}(x^0) = 0$, $(R^0, \alpha^0) = \mathbf{C}^{-1}(x^0)$ și $f_n : (R^0, \alpha^0) \to (R^n, \alpha^n)$ reprezentările Teichmüller respective. Conform (4.9)

$$Q[f_n] = \frac{1 + |\xi_n|}{1 - |\xi_n|}. \tag{5.3}$$

Avem deci următorul șir de afirmații echivalente:

$$(\mathrm{d}(x^n, x^0) \to 0) \Leftrightarrow (\xi^n \to 0) \Leftrightarrow (|x^n - x^0| \to 0),$$

[9]) Am notat cu E_1 mulțimea numerelor reale.

prima rezultată din (5.1) — (5.3) şi a doua din faptul că **H** este un omeomorfism.

Pe de altă parte, oricare din omeomorfismele **H**, formate luînd un punct $x^0 \in X$, arată că X organizat ca subspaţiu al lui E_{6g-6} este omeomorf cu E_{6g-6}. În concluzie, $\mathbf{T}_g$ *şi* E_{6g-6} *sînt omeomorfe.*

2. Vom trata acum cazul suprafeţelor riemanniene compacte de gen $g = 0$ sau 1.

Cazul $g = 0$. După teorema lui Brouwer (Cap. III, § 3, teorema 3.1) există o singură clasă de omeomorfisme omotope, care păstrează orientarea : $R \to R'$, unde R şi R' sînt suprafeţe riemanniene conform echivalente cu sfera lui Riemann. Totodată există o infinitate de reprezentări conforme, $R \to R'$, care constituie reprezentările cvasiconforme extremale. Spaţiul Teichmüller este de data aceasta redus la un punct.

Cazul $g = 1$ [42]. Fie R o suprafaţă riemanniană închisă de gen 1. Vom alege ca suprafaţă de acoperire universală $\hat{R}$ planul complex finit al variabilei z. Grupul transformărilor de acoperire G va fi atunci un grup de translaţii

$$z' = z + m\,\omega_1 + n\omega_2, \quad m \text{ şi } n \text{ întregi},$$

cu $\omega = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ număr complex, nereal (Cap. II, § 2, pct. 2) şi va avea de exemplu ca domeniu fundamental paralelogramul de vîrfuri 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$ şi ω_2.

Grupul G este generat de translaţiile

$$T_k : z' = z + \omega_k, \qquad (k = 1, 2)$$

dar totodată şi de translaţiile

$$T_k^* : z' = z + \omega_k^*, \qquad (k = 1, 2),$$

unde

$$\omega_1^* = a\omega_1 + b\omega_2$$
$$\omega_2^* = c\omega_1 + d\omega_2,$$

cu a, b, c, d numere întregi şi $ad - bc = 1$. Pe de altă parte, suprafaţa R fiind determinată pînă la o reprezentare conformă, ei i se asociază şi orice grup hGh^{-1} cu h reprezentare conformă a lui $\hat{R}$ pe $\hat{R}$:

$$z' = \lambda z + \mu, \quad \lambda \text{ şi } \mu \text{ numere complexe, } \lambda \neq 0$$

Cap. III, § 6, propoziţia 6.2). Grupul hGh^{-1} este generat de translaţiile

$$z' = z + \lambda\omega_k^*, \qquad (k = 1, 2).$$

Prin urmare, suprafeţei R îi corespunde o dată cu o pereche de perioade[10]) (ω_1, ω_2), toate perechile

$$\tilde{\omega}_1 = \lambda\,(a\omega_1 + b\omega_2),$$
$$\tilde{\omega}_2 = \lambda\,(c\omega_1 + d\omega_2),$$

[10]) Denumire legată de teoria integralelor eliptice de speţa I şi a funcţiilor eliptice, ([39], Cap. VII şi XI).

unde λ, a, b, c și d satisfac condițiile de mai sus, iar dacă notăm

$$\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

suprafeței R îi corespund toate numerele

$$\tilde{\omega} = \frac{a + b\omega}{c + d\omega} \tag{5.4}$$

cu a, b, c, d întregi și $ad - bc = 1$, numere care se deduc din ω prin substituțiile (5.4) ale *grupului modular*, ([31], 8.18; [32], 35.3).

Fiecare pereche (ω_1, ω_2) determină biunivoc un paralelogram fundamental și — fixînd suprafața R în clasa de suprafețe riemanniene conform echivalente — o clasă de descompuneri canonice echivalente ale lui R, (Cap. III, § 6). Într-adevăr, paralelogramului îi corespunde o descompunere canonică realizată de drumurile a_1 și a_2, care se obțin din segmentele $0\omega_1$ respectiv $0\omega_2$ prin proiecția Π_G și deci clasa acestei descompuneri [11]). Reciproc, dacă a_1' și a_2' realizează o descompunere din această clasă cu originea $p_0' \in R$, ridicînd dintr-un punct $z_0' \in \Pi_G^{-1}(p_0')$ cele două drumuri, obținem drumurile $\hat{a}_1'$ și $\hat{a}_2'$ avînd ca extremitate $z_0' + \omega_1$ respectiv $z_0' + \omega_2$. Într-adevăr, există un omeomorfism $f: R \to R$ omotop cu 1_R prin care $a_k \to a_k'$ și, după notațiile din Cap. I, § 5, $f_{p_0}: \pi_1(R, p_0) \to \pi_1(R, p_0')$, $(p_0 = \Pi_G(0))$, duce $[a_k]_{p_0}$ în $[a_k']_{p_0'}$, iar $\chi_f = 1_G$, deoarece χ_f se obține din 1_G printr-un automorfism interior al lui G, iar G este grup abelian. Extremitatea lui $\hat{a}_k'$ este $\Lambda_{G,z_0'}^{-1}([a_k']_{p_0'})(z_0')$, care, după relația (5.3′) din Cap. I, coincide cu $\Lambda_{G,0}^{-1}([a_k]_{p_0})(z_0')$. Însă $\Lambda_{G,0}^{-1}([a_k]_{p_0})$ este translația T_k, deci extremitatea lui a_k' este $z_0' + \omega_k$. Din aceste observații, dacă prin R înțelegem acum clasa suprafețelor riemanniene conform echivalente și prin (R, α) clasa de suprafețe riemanniene canonice conform echivalente, lui (R, α) îi corespunde mulțimea perechilor $(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)$, cu λ număr complex, $\lambda \neq 0$ arbitrar. Schimbînd eventual notația, vom presupune $\Im \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ și putem alege λ, astfel încît $\lambda\omega_1 > 0$, deci $\Im \lambda\omega_2 > 0$.

În concluzie, *suprafeței riemanniene canonice* (R, α) *de gen* 1, *i se asociază biunivoc numărul complex*

$$\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ cu } \Im\,\omega > 0, \tag{5.5}$$

unde ω_1 *și* ω_2 *sînt perioadele paralelogramului fundamental construit ridi-*

[11]) Clasele de drumuri omotope $[a_1]_{p_0}$ și $[a_2]_{p_0}$ generează $\pi_1(R, p_0)$.

cînd drumurile unei descompuneri canonice corespunzătoare lui α, ca mai sus. Mai mult, putem presupune, atunci cînd va fi necesar,

$$\omega_1 > 0 \text{ şi } \Im\omega_2 > 0. \tag{5.6}$$

Numărul ω va avea rol de *modul* în prezentarea de faţă [12]).

TEOREMA 5.2. *Aplicaţia* $(R, \alpha) \to \omega$, $\Im\,\omega > 0$, *este o bijecţie de la mulţimea* $\mathbf{T}_1$ *a suprafeţelor riemanniene canonice de gen* 1, *cu aceeaşi orientare, la* $U = \{\omega \mid \Im\omega > 0\}$.

Pentru a stabili această teoremă, vom folosi din nou existenţa reprezentărilor cvasiconforme $f: (R, \alpha) \to (R', \alpha')$, unde (R, α) şi (R', α') sînt suprafeţe riemanniene canonice de gen 1 şi cu aceeaşi orientare (teorema 3.2, Cap. IV). Vom lua ca suprafeţe de acoperire universală planele complexe finite de variabilă z respectiv z' şi vom nota ω_1, ω_2 respectiv ω_1', ω_2' perioadele paralelogramului fundamental pentru R şi R'.

Observaţia 5.1. *Orice reprezentare Q-cvasiconformă* $f: (R, \alpha) \to (R', \alpha')$ *induce o reprezentare Q-cvasiconformă* $z' = z'(z)$ $(= \hat{f}(z))$ de la planul z la planul z' cu proprietăţile

$$z'(z + \omega_k) = z'(z) + \omega_k', \qquad (k = 1, 2) \tag{5.7}$$

şi reciproc, (după teoremele 5.1 şi 5.2 din Cap. I).

PROPOZIŢIA 5.3. *Date suprafaţa riemannianã canonică* (R, α) *de gen* 1 *şi constanta* $Q > 1$, *mulţimea* (R', α') *a suprafeţelor canonice de gen* 1, *pentru care există o reprezentare Q-cvasiconformă* $(R, \alpha) \to (R', \alpha')$ *sînt reprezentate prin punctele* ω' *din cercul neeuclidian* $C_{\ln Q}(\omega)$ *cu centrul* ω — *modulul lui* (R, α) — *şi raza neeuclidiană* $\ln Q$ [13]).

1° Să presupunem că ω' corespunde unei suprafeţe $(R' \alpha')$, care este imagine a lui (R, α) prin reprezentarea Q-cvasiconformă f şi să luăm $\omega_1 > 0$, $\omega_1' > 0$. Aplicaţia $z'(z)$, definită de f după observaţia 5.1, reprezintă aproape orice segment $s_y: y = \text{const.}$, paralel cu axa reală din paralelogramul fundamental 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$, ω_2, într-o curbă rectificabilă, de lungime $\geqslant \omega_1'$, deoarece extremităţile ei se obţin una din alta prin translaţia $T_1': z' \to z' + \omega_1'$. În ipoteza (5.6), $\omega_1 > 0$ şi $\omega_1' > 0$, putem deci scrie

$$\omega_1' \leqslant \int_{s_y} |z_x'| \, dx. \tag{5.8}$$

Folosind inegalitatea Schwarz-Buniakowski şi relaţia (1.3) din Cap. IV, deducem

$$\omega_1'^2 \leqslant Q\omega_1 \int_{s_y} J_{f/z} \, dx.$$

[12]) Se alege uneo ı :a invariant conform caracteristic pentru (R, α) funcţia $J(\omega)$, numită invariantul absolut sau funcţia eliptică modulară ([31], 8.18).

[13]) Propoziţia 5.3 se formulează imediat relativ la reprezentări cvasiconforme ale planului complex finit pe el însuşi, care satisfac relaţii de forma (5.7).

şi, integrînd relativ la y,

$$\omega_1'^2\, \mathcal{J}\omega_2 \leqslant Q\omega_1\, \omega_1'\, \mathcal{J}\omega_2'$$

sau $\mathcal{J}\omega \leqslant Q\, \mathcal{J}\omega'$. Aplicînd acelaşi procedeu transformării inverse, obţinem

$$\frac{\mathcal{J}\omega}{Q} \leqslant \mathcal{J}\omega' \leqslant Q\mathcal{J}\omega. \tag{5.9}$$

După cum rezultă prin raţionamentul dezvoltat în [9], p. 252 [14], egalitatea în (5.9) implică

$$x' = \frac{\omega_1'}{\omega_1} x + \lambda$$

$$y' = \frac{\mathcal{J}\omega_2'}{\mathcal{J}\omega_2} y + \mu,$$

cu λ şi μ numere complexe, de unde, printr-un calcul imediat,

$$\mathcal{R}\omega' = \mathcal{R}\omega.$$

Prin urmare, se pun în evidenţă două cazuri extremale

$$\omega' = \mathcal{R}\omega + i\frac{\mathcal{J}\omega}{Q} \text{ şi } \omega' = \mathcal{R}\omega + iQ\,\mathcal{J}\omega,$$

situate la distanţa neeuclidiană ln Q de ω, care corespund la reprezentări extremale afine, avînd cîtul de dilatare Q şi direcţia dilatării maxime respectiv minime ω_1. Am găsit astfel o primă condiţie pentru punctele ω': ele se află în banda (5.9) formată de paralele la axa reală, avînd distanţa neeuclidiană la ω egală cu ln Q. Rezultatul se păstrează şi dacă renunţăm la ipoteza (5.6), pentru ω_1 şi ω_1' arbitrari.

2° Vom găsi acum alte condiţii, pe care trebuie să le îndeplinească ω'. Fie

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_1 = a\omega_1 + b\omega_2 \\ \tilde{\omega}_2 = c\omega_1 + d\omega_2 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} \tilde{\omega}_1' = a\omega_1' + b\omega_2' \\ \tilde{\omega}_2' = c\omega_1' + d\omega_2' \end{cases}$$

cu a, b, c, d, întregi şi $ad-bc>0$. Din (5.7) rezultă imediat

$$z'(z+\tilde{\omega}_k) = z'(z) + \tilde{\omega}_k', \qquad (k = 1, 2)$$

---

[14]) Din (5.8) se obţine $y_x' = 0$ a. p., egalitatea în relaţia Schwarz dă $x_x' = k$ const. a.p., iar egalitatea în (1.3) implică a.p. $y_y' = \frac{k}{Q}$ şi $x_x' = 0$. Într-adevăr, dilatarea maximă avînd loc a. p. pe direcţia axei x şi paralelele la această axă fiind transformate în paralele la axa x', paralelele la axa y corespund a.p. la direcţia de dilatare minimă şi vor fi transformate ortogonal imaginilor axelor mici — deci paralel cu axa y'.

deci repetînd raţionamentul de mai sus şi notînd $\tilde{\omega} = \frac{\tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1}$ respectiv $\tilde{\omega}' = \frac{\tilde{\omega}'_2}{\tilde{\omega}'_1}$, obţinem

$$\frac{\Im\,\tilde{\omega}}{Q} \leqslant \Im\,\tilde{\omega}' \leqslant Q\,\Im\,\tilde{\omega}, \tag{5.10}$$

cazurile extremale $\tilde{\omega}' = \mathcal{R}\,\tilde{\omega} + i\,Q^{\mp 1}\,\Im\,\tilde{\omega}$ corespunzînd la $z'(z)$ transformări afine cu cîtul de dilatare Q şi dilatarea maximă respectiv minimă în direcţia $\tilde{\omega}_1$. Dar $\tilde{\omega} = \mathcal{T}(\omega)$, şi $\tilde{\omega}' = \mathcal{T}(\omega')$, unde $\mathcal{T}$ este transformarea liniară

$$\tilde{Z} = \frac{c + dZ}{a + bZ}. \tag{5.11}$$

Prin urmare, revenind prin transformarea $\mathcal{T}^{-1}$ la ω şi ω', deducem din inegalităţile (5.10), că ω' se află situat într-un domeniu $D_{\mathcal{T}}$ limitat de două cercuri din U, tangente la axa reală în punctul $\eta = -\frac{a}{b}$ [15] şi situate la distanţa $\ln Q$ de ω; dreapta neeuclidiană prin ω, ortogonală acestor cercuri (ce trece prin punctul η), le intersectează în două puncte ω', care corespund la transformările extremale $z'(z)$ menţionate mai sus.

Fie $\mathcal{S}$ transformarea

$$Z' = \frac{\gamma + \delta Z}{\alpha + \beta Z} \tag{5.12}$$

cu α, β, γ, δ reali şi $\alpha\delta - \gamma\beta > 0$. Putem aproxima $\mathcal{S}$ cu transformări $\mathcal{T}$, (5.11), avînd coeficienţi întregi, astfel încît (5.10) are loc şi pentru $\tilde{\omega} = \mathcal{S}(\omega)$ respectiv $\tilde{\omega}' = \mathcal{S}(\omega')$. Prin urmare, $\omega' \in D = \bigcap D_{\mathcal{S}}$, unde $\mathcal{S}$ parcurge mulţimea tuturor transformărilor (5.12).

3° Evident, $C_{\ln Q}(\omega) \subset D$, fiecare domeniu $D_{\mathcal{S}}$ fiind imaginea prin $\mathcal{S}^{-1}$ a unei benzi, care include $C_{\ln Q}[\mathcal{S}(\omega)]$.

Mai mult, $C_{\ln Q}(\omega) = D$. Dacă $\omega' \in D$, fie $\mathcal{S}^*$ o transformare (5.12), unde $\eta = -\frac{\alpha}{\beta}$ este un punct de intersecţie al dreptei neeuclidiene $\omega\omega'$ cu axa reală. Deoarece $\omega' \in D_{\mathcal{S}^*}$, rezultă că $d[\mathcal{S}^*(\omega'), \mathcal{S}^*(\omega)] \leqslant \ln Q$ sau că $\omega' \in C_{\ln Q}(\omega)$.

4° Să demonstrăm că oricare ar fi punctul $\omega' \in C_{\ln Q}(\omega)$, există o reprezentare Q-cvasiconformă: $(R, \alpha) \to (R', \alpha')$, unde (R', α') are modulul ω'.

---

[15]) În cazul $b = 0$, nu se obţine pe această cale nici un rezultat nou.

Fie $d(\omega, \omega') = \ln K$, $K \leqslant Q$. Ducem ca mai sus dreapta neeuclidiană $\omega\omega'$, însemnăm cu η punctul în care această dreaptă intersectează axa reală, astfel încît ω să separe ω' de η, și considerăm o transformare $\mathfrak{T}$, (5.12), pentru care $\eta = -\frac{\alpha}{\beta}$. Dacă $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, vom scrie

$$\tilde{\omega}_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$$
$$\tilde{\omega}_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

și $\tilde{\omega} = \mathfrak{T}(\omega) = \frac{\tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1}$.

Formăm o transformare afină cu cîtul de dilatare K și cu dilatarea maximă pe direcția $\tilde{\omega}_1$:

$$z'(z) = K\mathcal{R}\frac{z}{\tilde{\omega}_1} + i\mathcal{J}\frac{z}{\tilde{\omega}_1} \tag{5.13}$$

și notăm $\omega_k' = z'(\omega_k)$, $(k = 1, 2)$, și

$$\tilde{\omega}_1' = \alpha\omega_1' + \beta\omega_2'$$
$$\tilde{\omega}_2' = \gamma\omega_1' + \delta\omega_2'.$$

Se verifică prin calcul că $z'(\tilde{\omega}_k) = \tilde{\omega}_k'$, $(k = 1, 2)$, și se deduce $\tilde{\omega}_1' = K$, $\tilde{\omega}_2' = K\mathcal{R}\tilde{\omega} + i\mathcal{J}\tilde{\omega}$, de unde

$$\tilde{\omega}' = \frac{\tilde{\omega}_2'}{\tilde{\omega}_1'} = \mathcal{R}\tilde{\omega} + \frac{i}{K}\mathcal{J}\tilde{\omega},$$

ceea ce arată că $\tilde{\omega}' = \mathfrak{T}(\omega')$ [16] și că $\omega' = \frac{\omega_2'}{\omega_1'}$. Cum $z'(z + \omega_k) = z'(z) + \omega_k'$ $(k = 1, 2)$, rezultă că $z'(z)$ induce o reprezentare K-cvasiconformă $(R, \alpha) \to (R', \alpha')$.

În acest mod, propoziția 5.3 este demonstrată. Dacă lăsăm pe Q să ia orice valoare $\geqslant 1$, obținem imediat teorema 5.2. Totodată, transformarea (5.13) construită la punctul 4° de mai sus, arată că pentru suprafețe (R, α) și (R', α') de aceeași orientare și de module ω respectiv ω', cu $d(\omega, \omega') = \ln K$, există o reprezentare K-cvasiconformă f_0, care în parametrii z și z' este o transformare afină cu cîtul de dilatare K și are caracter extremal. Într-adevăr, existența unei reprezentări Q-cvasiconforme $f : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$ implică după punctele 1° — 3°, că $d(\omega, \omega') \leqslant \ln Q$, de unde $K \leqslant Q$ [f]. Reprezentarea extremală este o reprezentare Teichmüller (observația 4.6, Cap. IV). Am demonstrat astfel teorema de existență:

---

[16]) Într-adevăr, $d(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \ln K$, iar $\tilde{\omega}$ separă pe dreapta neeuclidiană $\tilde{\omega}\tilde{\omega}'$ punctele $\tilde{\omega}'$ și ∞.

TEOREMA 5.3. *Date două suprafețe riemanniene canonice* (R, α) *și* (R', α'), *de gen* 1 *și cu aceeași orientare, există o reprezentare cvasiconformă extremală* $f_0 : (R, \alpha) \to (R', \alpha')$, *iar* $\ln Q\,[f_0] = \mathrm{d}(\omega, \omega')$, *unde* ω *și* ω' *sînt modulele lui* R *respectiv* R'.

TEOREMA 5.4. *În condițiile teoremei 5.3, reprezentarea extremală este unic determinată pînă la reprezentări conforme.*

Teorema 5.4 de unicitate rezultă imediat din observația 5.1 și

PROPOZIȚIA 5.4. *Fie* ω_1 *și* ω_2 *cu* $\Im\omega > 0$ [17]), $K \geqslant 1$,

$$\mathcal{A}_K(z) = K\Re z + i\Im z$$

și $\omega_k' = \mathcal{A}_K(\omega_k)$, $(k = 1, 2)$. *Dacă* $z'(z)$ *este o reprezentare* Q*-cvasiconformă a planului* z *pe planul* z', *care verifică relațiile* :

$$z'(z + \omega_k) = z'(z) + \omega_k', \qquad (k = 1, 2),$$

atunci $Q \geqslant K$ *și egalitatea are loc numai pentru o transformare*

$$z'(z) = \mathcal{A}_K(z) + B$$

cu B *număr complex.*

Prima afirmație a acestei propoziții, inegalitatea $Q \geqslant K$ rezultă și din propoziția 5.3. Totuși ea va fi redemonstrată, pentru a putea cerceta cazul $Q = K$.

Să remarcăm că funcția $z'(z) - \mathcal{A}_K(z)$, fiind dublu periodică, este mărginită. Există deci constanta M, astfel încît

$$|z'(z) - \mathcal{A}_K(z)| \leqslant M,$$

oricare ar fi punctul z din plan. Să notăm cu P paralelogramul fundamental 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$, ω_2 și cu P_L pătratul $\{z \mid 0 \leqslant x, y \leqslant L\}$, $L > 0$. Un segment $s_y = \{z \mid 0 \leqslant x \leqslant L,\ y = \text{const.} \in [0, L]\}$ va fi transformat de $z'(z)$ într-o curbă pentru care distanța extremităților

$$|z'(iy) - z'(L + iy)| = |z'(iy) - \mathcal{A}_K(iy) + KL + \mathcal{A}_K(L + iy) - z'(L + iy)| \geqslant KL - 2M$$

Deci aproape pentru toate valorile $y \in [0, L]$ putem scrie

$$KL - 2M \leqslant \int_0^L |z_x'(z)|\,\mathrm{d}x,$$

sau, integrînd relativ la y pe intervalul $[0, L]$,

$$KL^2 - 2ML \leqslant \iint_{P_L} |z_x'(z)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[17]) Nu presupunem $\omega_1 > 0$.

Să notăm cu $\Omega = \max(|\omega_1 + \omega_2|, |\omega_1 - \omega_2|)$ diametrul lui P. Totalitatea paralelogramelor rețelei determinate de ω_1 și ω_2, care acoperă P_L, sînt incluse în reuniunea cercurilor cu centrul în P_L și rază Ω — un pătrat cu latura $L + 2\Omega$ — prin urmare aceste paralelograme acoperă o arie $\leqslant (L + 2\Omega)^2$. Cum aria fiecărui paralelogram este $\mathcal{J}\omega_2\bar{\omega}_1$, numărul acestor paralelograme este $\leqslant \dfrac{(L+2\Omega)^2}{\mathcal{J}\omega_2\bar{\omega}_1}$. Avem deci

$$KL^2 - 2ML \leqslant \frac{(L+2\Omega)^2}{\mathcal{J}\omega_2\bar{\omega}_1} \iint_P |z'_x(z)|\,dx\,dy,$$

de unde, cînd $L \to \infty$, obținem

$$K\mathcal{J}\omega_2\bar{\omega}_1 \leqslant \iint_P |z'_x(z)|\,dx\,dy.$$

Aplicînd din nou inegalitatea Schwarz-Buniakowski, relația (1.3) din Cap. IV și transformarea $\mathcal{A}_K$, rezultă

$$K^2\mathcal{J}\omega_2\bar{\omega}_1 \leqslant Q\mathcal{J}\omega'_2\,\bar{\omega}'_1 = QK\mathcal{J}\omega_2\bar{\omega}_1,$$

deci $K \leqslant Q$. Cazul $K = Q$ implică

$$|z'_x(z)|^2 = QJ_{z'/z}(z)$$

a.p., deci pentru transformarea $z'(z)$ corespunzătoare, cîtul de dilatare este K și dilatarea maximă este pe direcția axei x a.p. Prin urmare, $z'(z)$ și $\mathcal{A}_K(z)$ sînt soluții în sens generalizat ale aceleiași ecuații Beltrami și după propoziția 1.2 din Cap. IV, $z'(z) = A\,\mathcal{A}_K(z) + B$, unde $A = 1$, fiindcă $z'(\omega_1) = \mathcal{A}_K(\omega_1)$.

Teorema 5.4 se obține din propoziția 5.4 și punctul 4° al propoziției 5.3, folosind transformarea $\dfrac{z}{\tilde{\omega}_1} = Z$.

Rezultatele de mai sus permit organizarea spațiului Teichmüller $\mathbf{T}_1$ ca spațiu metric. Într-adevăr, am demonstrat că în mulțimea reprezentărilor cvasiconforme $f\colon (R, \alpha) \to (R', \alpha')$, unde (R, α) și (R', α') sînt suprafețe riemanniene canonice de gen 1 și cu aceeași orientare, există o reprezentare extremală f_0, unic determinată pînă la o reprezentare conformă, pentru care

$$Q[f_0] \leqslant Q[f]$$

și

$$Q[f_0] = \mathrm{d}(\omega, \omega'),$$

ω și ω' fiind modulele lui (R, α) respectiv (R', α'). Definim și acum distanța Teichmüller (5.1) sau (5.1'), iar aplicația $(R, \alpha) \to \omega$ va reprezenta o izometrie între $\mathbf{T}_1$ și U.[18] Prin urmare, obținem

[18] Spațiul $\mathbf{M}_1$ al suprafețelor riemanniene compacte de gen 1, conform echivalente, corespunde biunivoc cu suprafața riemanniană formată factorizînd U prin grupul modular (5.4).

TEOREMA 5.1'. *Spaţiul metric* $\mathbf{T}_1$ *este omeomorf cu* E_2.

3. Cazul $g = 1$ putea fi tratat cu ajutorul teoremei generale cînd $g>1$, observînd că existenţa unui grup tranzitiv de reprezentări conforme ale torului pe el însuşi (grup ce depinde de doi parametri reali) face ca reprezentarea extremală să devină unică abia prin fixarea unei perechi de puncte corespunzătoare ([1], Cap. II). Teichmüller nu a considerat însă numai cazul suprafeţelor riemanniene închise, ci şi cazul suprafeţelor riemanniene bordate sau nu, dar compacte, pe care se dau h perechi de puncte interioare şi atunci cînd există curbe frontieră, k perechi de puncte frontieră (h, $k \geqslant 0$) şi se cere reprezentarea cvasiconformă extremală în fiecare clasă de omeomorfisme omotope, ce păstrează orientarea şi fac să se corespundă punctele fiecăreia dintre perechile date. Aceste cazuri se reduc la cel al suprafeţelor închise cu gen > 1, ([1], Cap. II sau [6], p. 129).

Teichmüller a înlăturat de altfel şi ipoteza orientabilităţii, considerînd varietăţi riemanniene 2-dimensionale orientabile sau nu[19], bordate sau nu, dar triangulabile şi compacte (admiţînd o triangulare finită), pe care se dau perechi de puncte ca mai sus. El a numit *domenii fundamentale* aceste varietăţi şi a indicat *formula dimensiunii*:

$$\sigma - \rho = -6 + 6g + 3\gamma + 3n + 2h + k,$$

unde g este genul, n numărul curbelor frontieră, γ numărul elementelor neorientabile ale varietăţii (K reuzhaubenzahl [37], p. 140) h şi k numerele perechilor de puncte corespondente ca mai sus, ρ numărul parametrilor grupului continuu de reprezentări conforme ale domeniului fundamental pe el însuşi, iar σ dimensiunea spaţiului euclidian omeomorf cu spaţiul format de clasele de domenii fundamentale conform echivalente, în mulţimea domeniilor fundamentale topologic echivalente, [42].

Bibliografie

1. L. V. AHLFORS, *On quasiconformal mappings.* J. Analyse Math., *3* (1954).
2. — *The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces.* Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960.
3. — *Some remarks on Teichmüller's space of Riemann surfaces.* Ann. Math., *74*, *1*, (1961).
4. — *Teichmüller spaces.* Proc. Intern. Congr. Math., Stockholm, 1962.
5. — *The modular function and geometric properties of quasiconformal mappings.* Proc. Conference Complex Analysis, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.
6. Л. АЛЬФОРС — Л. БЕРС, *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения*, И. Л. Москва, 1961.
7. L. V. AHLFORS-L. SARIO, *Riemann Surfaces.* Princeton Univ. Press, 1960.
8. П. С. АЛЕКСАНДРОВ, *Введение в общую теорию множеств и функций.* ОГИЗ, Гос. издат. тех. теор. лит., Москва — Ленинград, 1948.

[19] Suprafaţă cu reprezentări parametrice conforme, indiferent dacă păstrează sau nu orientarea.

9. C. Andreian Cazacu, *Probleme moderne de teoria funcțiilor. (Reprezentări cvasiconforme)* Ed. Acad. R.P.R., București, 1965.
10. P. Appell-E. Goursat-P. Fatou, *Théorie des fonctions algebriques et des transcendentes qui s'y rattachent.* II, Gauthier-Villars, Paris, 1930.
11. L. Bers, *Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem.* Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960.
12. — *Spaces of Riemann surfaces.* Proc. Intern. Congr. Math. Edinburgh, 1958.
13. — *Automorphic forms and general Teichmüller Spaces.* Proc. Conference Complex Analysis, Springer, Berlin-Heidelburg-New York, 1965.
14. — *Riemann Surfaces.* New York University, 1957—58.
15. N. Bourbaki, *Topologie générale.* III. Hermann, Paris; Ed. rusă. Gos. Iz. Fiz. Mat. L. Moskva, 1958.
16. L. E. J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten.* Math. Ann., **71** (1912).
17. — *Aufzählung der Abbildungsklassen endlichfach zusammenhängender Flächen.* Math. Ann., **82** (1921).
18. G. Călugăreanu, *Lecții de teoria funcțiilor.* II, Cluj, 1947.
19. H. Cartan, *Theorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann, Paris, 1961; ed. rusă Iz. I. L. Moskva, 1963.
20. H. Grauert, *On the number of moduli of complex structures.* Contributions to Function Theory, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1960.
21. A. Grothendieck, *Techniques et constructions en géométrie analytique.* I—X, Sem. H. Cartan, 13 1960/61, 1, 2. 2ed. Sécretariat Math. Paris, 1962.
22. H. Grötzsch, *Uber die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen.* Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Nat. Kl., **80** (1928).
23. H. Hopf, *Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten.* Math. Ann., **96** (1927).
24. — *Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen.* J. r. angew. Math., **165** (1931).
25. Hu Sze-Tsen, *Homotopy Theory.* Acad. Press, New York, London, 1959; ed. rusă Iz Mir, Moskva, 1964.
26. H. Kneser, *Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen.* Math. Ann., 103 (1930).
27. K. Kodaira-D. C. Spencer, *On deformations of complex analytic structures,* I—II, Ann. Math., **67** (1958).
28. S. Lefschetz, *Introduction to Topology.* Princeton Univ. Press, 1949.
29. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций.* Гос. издат. тех. теор. лит., Москва — Ленинград, 1950.
30. М. А. Наймарк, *Нормированные кольца,* Гос. издат. тех. теор. лит., Москва, 1956.
31. R. Nevanlinna, *Uniformisierung.* Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953; ed. rusă, Izdat. I. L., Moskva, 1955.
32. A. Pfluger, *Theorie der Riemannschen Flächen.* Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.
33. H. Poincaré, *Théorie des groups fuchsiens.* Acta Math., *1* (1882).
34. H. E. Rauch, *Variational methods in the problem of the moduli of Riemann surfaces.* Contributions to the Function Theory, Tata Inst. Found. Res., Bombay, 1960.
35. L. Schwartz, *Variedades analitias complejas.* Univ. Colombia, 1956; Ed. rusă, Iz. Mir, Moskva, 1964.

36. H. SEIFERT, *Bemerkungen zur stetigen Abbildung von Flächen.* Abh. Math. Sem. Hansis. Univ., *12* (1936).
37. H. SEIFERT — W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie.* Teubner, Leipzig, 1934.
38. G. SPRINGER, *Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley.* Publ., Reading, Mass., 1957.
39. S. STOILOW, *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă.* vol. I, Ed. didactică și pedagogică, București, 1961.
40. — *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă.* vol. II, Ed. Academiei R.P.R., București, 1958.
41. — *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques.* Gauthier-Villars, Paris, 1938, sau 1956 ; ed. rusă Izdat. Nauka, Moskva, 1964.
42. O. TEICHMÜLLER, *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale.* Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl., **22** (1940).
43. — *Bestimmung der extremalen quasikonformen Abbildungen bei geschlossenen orientierten Riemannschen Flächen.* Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl., **4** (1943).
44. — *Veränderliche Riemannsche Flächen.* Deutsche Math., **7** (1944).
45. C. TELEMAN, *Elemente de topologie și varietăți diferențiabile.* Ed. didactică și pedagogică, București, 1964.
46. A. WEIL, *Modules des surfaces de Riemann.* Séminaire Bourbaki, 168, Mai 1958.
47. H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche.* Teubner, Leipzig, 1913.

Redactor responsabil : PETRE MOCANU
Tehnoredactor : CONSTANTIN STANCIU

Dat la cule : 14.05.66. Bun de tipar : 15.12.66. Apărut 1966. Tiraj 2180. Hîrtie scris II A de 63 g/m². Coli editoriale 25,71. Coli de tipar 24,75. C.Z. pentru bilioteci mari 517.535.2. C.Z. pentru biblioteci mici 517.5.

Întreprinderea Poligrafică „Informația", Str. Brezoianu nr. 23—25, București, Republica Socialistă România.
comanda 163